



Contribution à la théorie des interféromètres atomiques

Charles Antoine

► To cite this version:

Charles Antoine. Contribution à la théorie des interféromètres atomiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT: . tel-00007967v2

HAL Id: tel-00007967

<https://theses.hal.science/tel-00007967v2>

Submitted on 13 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE D'ÉTUDE DU RAYONNEMENT ET DE LA MATIÈRE
EN ASTROPHYSIQUE

Équipe de Relativité, Gravitation et Astrophysique

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

spécialité : Physique Théorique

présentée par

Charles ANTOINE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI

Sujet :

CONTRIBUTION À LA
THÉORIE DES INTERFÉROMÈTRES ATOMIQUES

Soutenue le 16 décembre 2004 devant le jury composé de :

M. Jacques VIGUÉ
M. Serge REYNAUD
M. Philippe TOURENC
M. Ernst RASEL
M. Philippe BOUYER
M. Chritian J. BORDÉ

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse

Table des matières

Avant-Propos	iv
1 Introduction	1
1.1 Bref historique de l'interférométrie à ondes de matière	3
1.2 Applications, performances et limitations théoriques	5
1.3 Plan du mémoire	7
2 Formalisme ABCD et extensions	9
2.1 Hamiltonien considéré	10
2.1.1 Origine et approximations	10
2.1.2 Hamiltonien au plus quadratique	14
2.2 Matrices ABCD	17
2.2.1 Origine et définition	17
2.2.2 Propriétés des matrices ABCD	18
2.2.3 Exemples et cas particuliers	20
2.2.4 Action et fonction principale de Hamilton	23
2.3 Evolution temporelle des paquets d'ondes atomiques	26
2.3.1 Equation d'évolution et propagateur	26
2.3.2 Paquets d'ondes atomiques et fonction génératrice	27
2.3.3 Notation des paquets d'ondes atomiques	30
2.3.4 Théorème $ABCD$	32
2.4 Théorie des Opérateurs Intégrales Premières	34
2.4.1 Introduction	34
2.4.2 Définition et intérêt des opérateurs intégrales premières	35
2.4.3 Une famille d'opérateurs intégrales premières pour Hamiltoniens quelconques	40
2.4.4 Une autre démonstration du théorème ABCD	42
2.4.5 Cas particulier : le propagateur	49
2.4.6 Interprétation en terme d'opérateurs création-annihilation	50
2.4.7 Conclusion	52
3 Théorie et modélisation des séparatrices laser	55
3.1 Introduction	56
3.2 Cadre de l'étude et approximations considérées	58
3.2.1 Précisions concernant le cadre général d'étude	58
3.2.2 Approximations et restrictions considérées	63
3.3 Différentes formes de l'équation à résoudre	70
3.3.1 Transformations unitaires et représentation d'interaction	71
3.3.2 Etude préliminaire de l'équation $\frac{d}{dt} \varphi_3(t)\rangle = iM_{op}(t) \cdot \varphi_3(t)\rangle$	79
3.3.3 Autres équations équivalentes	87
3.4 Méthodes de résolution	96
3.4.1 Position du problème et présentation des méthodes	96
3.4.2 Recherche de solutions exactes : la théorie $z(t)$	99
3.4.3 Approche directe : solution sous forme de développements	104
3.4.4 Approximation des équations	114
3.4.5 Bilan	121

3.5	Transformations unitaires inverses et matrice S : schéma ttt	123
3.5.1	Cas $t_1 = t_0$:	124
3.5.2	Cas $t > t_1 > t_0$:	134
3.5.3	Bilan : schéma ttt	139
3.6	Etude du cas libre	145
3.6.1	Vitesses de groupe des états adiabatiques	146
3.6.2	Expression et propriétés de la solution de Rabi	154
3.6.3	Séparation d'un paquet d'ondes atomique fin	164
3.6.4	Paquet d'ondes atomique quelconque	171
3.6.5	Bilan et extensions	181
3.7	Cas général et modélisation ttt champ fort généralisée	184
3.7.1	Position du problème	184
3.7.2	Recherche des vitesses de groupe et approximation du désaccord	185
3.7.3	Bilan : modélisation ttt champ fort généralisée	186
3.7.4	Lien avec les modélisations antérieures et conclusion	188
4	Modélisation des interféromètres atomiques	197
4.1	Modélisation des différents éléments d'un interféromètre atomique	199
4.1.1	Modélisation de la source atomique	199
4.1.2	Modélisation des séparatrices laser	210
4.1.3	Modélisation des zones sombres	232
4.1.4	Modélisation de la détection	234
4.2	Une nouvelle approche des interféromètres	238
4.2.1	Chemins homologues et représentation spatio-temporelle	240
4.2.2	Théorème des quatre points finaux	244
4.3	Expression du signal de franges	257
4.3.1	Multiples chemins atomiques et signal de sortie	257
4.3.2	Signal de franges avec modélisation ttt -champ faible	261
4.3.3	Signal de franges avec modélisations ttt champs forts	281
5	Applications	293
5.1	Méthode générale de modélisation	295
5.2	Interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques	304
5.2.1	Signal de franges avec les modélisations infiniment fine et ttt champ faible des séparatrices	305
5.2.2	Signal de franges avec la modélisation ttt champ fort généralisée des séparatrices	318
6	Conclusion et perspectives	331
A	Formules mathématiques utiles	335
A.1	Propriétés de l'opérateur trace	335
A.2	Commutateurs	336
A.3	Commutateurs avec les opérateurs canoniques	336
A.4	Intégration d'équations matricielles ou opératoriels	336
A.5	Commutateurs et exponentielles de matrice	339
A.6	Formules de Glauber et de Baker-Campbell-Hausdorff	340
A.7	Dérivation d'une exponentielle de matrice	341
A.8	Fonction δ	341
A.9	Intégrales Gaussiennes	342
A.10	Translations et représentations position et impulsion	342
A.11	Matrices de Pauli	344
A.12	Rotation à 3 D	344
B	Propriétés des matrices ABCD	347

C Développement de Taylor des matrices ABCD	351
D Matrices ABCD pour H_{ext} indépendant du temps	355
D.1 Quelques résultats de théorie des matrices	356
D.2 Application au calcul des matrices ABCD	358
E Précision concernant l'expression de H_{ext} pour le champ de gravité terrestre	361
F Modélisation des séparatrices pour paquets d'ondes incidents quelconques	365
F.1 Présentation de la modélisation	365
F.2 Cas des transitions avec changement d'état interne ($a \mapsto b$)	366
F.3 Cas des transitions sans changement d'état interne ($a \mapsto a$)	373
F.4 Résumé des modélisations considérées	379
G Quelques résultats concernant les matrices $X_{\nu D}$ et $Y_{\nu D}$	383
H Valeur numérique des différents termes du déphasage	387
BIBLIOGRAPHIE	395

Avant-Propos

Ce travail de thèse s'est déroulé d'octobre 2001 à Novembre 2004, au sein de l'Équipe de Relativité, Gravitation et Astrophysique (ERGA), équipe universitaire du LERMA (Laboratoire d'Étude du Rayonnement et de la Matière en Astrophysique, UMR 8112), à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. Je remercie Philippe TOURENC, responsable de l'ERGA, et Jean-Michel LAMARRE, directeur du LERMA, pour leur accueil et les efforts qu'ils ont faits pour me permettre de travailler dans de très bonnes conditions matérielles malgré le déménagement de l'ERGA sur le site d'Ivry en raison du désamiantage à Jussieu.

Je remercie par ailleurs le CNRS et la DGA qui ont co-financé ma bourse de doctorat.

Mon travail de thèse a été effectué sous la direction de Christian J. BORDÉ, auquel je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour son enthousiasme, son ouverture scientifique et les nombreuses connaissances qu'il a su me transmettre avec passion. J'ai été particulièrement sensible à la confiance qu'il a placée en moi, me laissant une large autonomie dans l'orientation et le déroulement de mon travail.

Je remercie en outre Philippe BOUYER, Ernst RASEL, Serge REYNAUD, Philippe TOURENC et Jacques VIGUÉ pour l'intérêt et l'attention qu'ils ont portés à mon travail en participant à mon jury de soutenance, et plus particulièrement Jacques VIGUÉ et Serge REYNAUD qui ont gentiment accepté la lourde charge de rapporteur. Leurs conseils et observations sur le mémoire de thèse m'ont été d'une précieuse aide.

Ce fût une chance et un immense plaisir de naviguer quotidiennement sur le navire ERGA, en compagnie du capitaine TOURENC et de ses matelots à la gentillesse légendaire : Béatrice GUIBAL, Annie et Hervé LEMARCHAND, Françoise TRAN-MINH, Jérôme GARIEL, Gérard LEDENMAT, Anne-Laure MELCHIOR, Nico DOS SANTOS, Pierre ENCRENAZ, Monica VARVELLA, Marie-Christine ANGONIN, Jean-François PANIS, Cécile BARBACHOUX, Gérard GAURON, Richard BONNAIRE, Patrick DEBBASCH, Gilbert MARCILHACY, Patrick BOISSÉ, Pacôme DELVA, Madhi CISSOKO et le regretté Jean-Pierre VIGIER. Je les remercie tous pour leur disponibilité, leur soutien, leur bonne humeur et leur amitié. Ils m'ont donné une belle idée de ce que peut-être la recherche désintéressée.

Ce travail de thèse a été l'occasion d'une étroite collaboration avec les équipes du SYRTE, et plus particulièrement avec les membres du groupe "Capteurs inertiels" de Noël DIMARCQ et Arnaud LANDRAGIN. Je tiens notamment à remercier Benjamin CANUEL, Patrick CHEINET, André CLAIRON, Irène COURTILLOT, Jérôme FILS, Alexandre GAUGUET, David HOLLEVILLE, François IMPENS, Pierre LEMONDE, Franck PEREIRA, Albin VIRDIS, Peter WOLF, Florence YVER-LEDUC et Thomas ZANON pour leur appui constant, ainsi que pour les discussions enrichissantes et constructives que j'ai eues avec eux.

Je remercie également tous les membres du GREX et toutes les personnes qui le font vivre de près ou de loin. J'ai été très heureux de participer à cette "petite entreprise" incarnant une conception ouverte, conviviale et désintéressée de la recherche, et qui, je le souhaite, ne connaîtra pas la crise. Je remercie notamment Serge REYNAUD, Pierre TEYSSANDIER, Bartolomé COLL, Éric GOURGOULHON, Luc BLANCHET, Richard BONNEVILLE, Sylvie LÉON, François MIGNARD, Pierre FAYET, Pierre TOUBOUL, Christophe SALOMON, Jacques BAUDON, Paul FEATONBY, Marc-Thierry JAEKEL, Astrid LAMBRECHT, Brahim LAMINE, Pierre-François COHADON, Jean-Michel COURTY, et bien sûr Monique BONNAMY pour leur générosité, leur écoute et leurs conseils.

Je tiens par ailleurs à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont aidé et soutenu dans mon projet de post-doctorat au TIFR de Bombay, et tout particulièrement Michèle LEDUC pour sa disponibilité, sa motivation et sa joie de vivre communicatrice. Je remercie également C. S. UNNIKRIISHNAN pour son aide précieuse dans la mise en place de ce projet et pour son accueil chaleureux dans son laboratoire. Je remercie Ashok MOHAPATRA, Sanjukta ROY, Saptarishi CHAUDHURI, Vasant NATARAJAN,

Umakant D. RAPOL et Hema RAMACHANDRAN pour leur accueil et leur collaboration pendant l'année 2004.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, durant ces années de travail, notamment Jean DALIBARD, Serge HAROCHE, Claude COHEN-TANNOUDJI, Claude FABRE, Bernard LINET et Dominique HIRONDEL pour la richesse et la limpidité de leurs cours ; les élèves de Maîtrise de Physique de Paris VI pour leurs questions pertinentes et "rafraîchissantes" ; Kai BONGS, Maximilien PORTIER et Romain LAUNAY pour la richesse de nos discussions sur certains aspects de ma thèse ; Nicole RIBET pour sa disponibilité, sa gentillesse et son écoute ; Annette BEAUVAIS et Annick GASSAIS pour leur aide toujours efficace ; Basarab et Laurent pour leurs conseils amicaux ; Stéphanie, Françoise, David, Albin, Alexandre, Benjamin, Patrick, Noël, Arnaud et François pour leur aide extrêmement précieuse les jours précédant la soutenance et le "jour J" ; Michael le "débugueur fou" pour sa générosité, sa patience et son aide infinies ; enfin, toutes celles et ceux qui sont venus assister à ma soutenance, me témoignant ainsi de leur soutien et faisant de cet événement une fête.

Pour terminer, je souhaite remercier tous les coeurs qui m'ont permis de traverser sereinement et joyeusement ces années de recherches, de questionnements et de découvertes : mes amis, ma famille et surtout Stéphanie.

“ On ne peut résoudre un problème avec le mode de pensée qui l’a créé. ”

Albert Einstein

“ S’il n’y a pas de solution, c’est qu’il n’y a pas de problème. ”

Devise Shadok

Chapitre 1

Introduction

Cela fera bientôt un siècle que nous explorons et exploitons les propriétés ondulatoires de la matière. Leur mise en évidence dans les années 1920 a en effet permis d'étendre aux ondes de matière toutes les expériences utilisant des interférences à ondes lumineuses. Cette intéressante symétrie entre matière et lumière a ainsi conduit au développement conjoint de deux des domaines les plus actifs de la physique actuelle : l'optique atomique et l'interférométrie atomique.

On aurait tort de croire que l'objet d'étude de ces deux disciplines est restreint aux seuls atomes. En effet, le mot atomique est générique : il désigne tout type de matière pouvant être manipulé de façon cohérente, c'est-à-dire de façon telle que l'on sâche limiter et contrôler les processus modifiant de façon aléatoire la phase des ondes matérielles (et détruisant, par la même, les franges d'interférences). Une des ambitions de l'interférométrie atomique est d'ailleurs de pouvoir faire interférer des quantités de matière toujours plus importantes, afin d'explorer la frontière entre les mondes classique et quantique (interférences de bio-molécules dans le groupe de Zeilinger à Vienne, étude de la transition classique/quantique au LKB à Paris...).

L'interférométrie atomique se nourrissant des progrès effectués en optique atomique, elle y a puisé dernièrement ses deux composants principaux - la source et les séparatrices - donnant ainsi une autre dimension à la symétrie lumière-matière. On peut en effet observer aujourd'hui aussi bien un interféromètre où la source est une onde lumineuse cohérente (laser) et où les séparatrices sont matérielles (miroirs et lames semi-réfléchissantes), qu'un interféromètre où la source est une onde matérielle cohérente (condensats de Bose-Einstein) et où les séparatrices sont faites de lumière (séparatrices à ondes laser stationnaires ou progressives). L'analogie n'est cependant pas parfaite, car nous ne disposons pas encore de "laser à atomes" à proprement parler (même si l'expression est utilisée pour désigner des atomes sortant de façon quasi-continue d'un condensat). Toutefois, plusieurs travaux en cours visent à amplifier de façon cohérente des ondes de matière (à partir de champs atomiques ou moléculaires).

Dans ce contexte, plusieurs études théoriques ont vu le jour, permettant de proposer des expériences originales de physique fondamentale ou appliquée, et de rendre compte, avec succès, du signal de franges observé en sortie des divers types d'interféromètre atomique (pour le principe de fonctionnement de ces appareils, voir la figure 1.1).

Cependant, le niveau de précision, de sensibilité et de stabilité de ces appareils (gyromètres, gravimètres, gradiomètres, horloges en fontaine ou optiques...) est aujourd'hui devenu tel qu'il n'est plus consistant avec les approximations usuellement réalisées (traitement quasi-classique et modélisations simplifiées des séparatrices, traitement non-simultané de l'action de plusieurs champs inertiels et gravitationnels...).

Le présent travail a précisément pour ambition d'aller au-delà de ces approximations, pour fournir une modélisation des interféromètres atomiques cohérente avec les objectifs - actuels ou envisagés - de ces appareils (en particulier dans le cadre des programmes spatiaux en cours d'étude).

Ce mémoire expose le travail effectué dans cet objectif, tant au sujet de l'étude théorique et de la modélisation des différents éléments constitutifs d'un interféromètre atomique (source, séparatrices, zones sombres entre les séparatrices, détection), qu'au sujet de sa modélisation globale à l'aide de nouveaux outils de calcul du déphasage (chemins homologues et théorème des quatre points finaux).

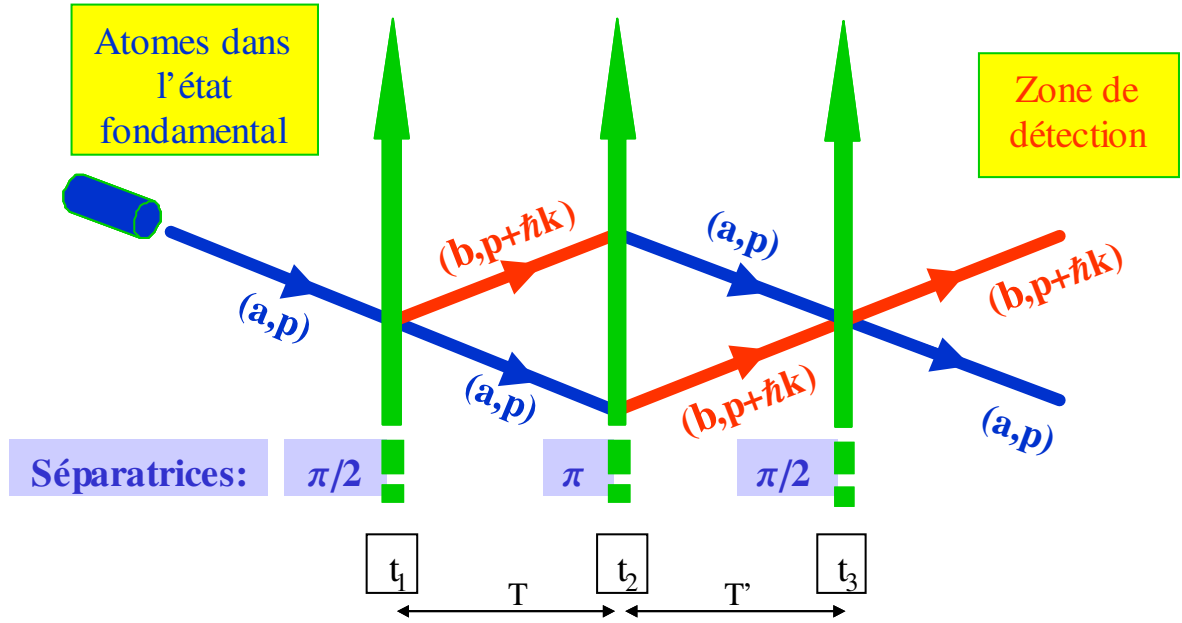


FIG. 1.1: Schéma de principe d'un interféromètre atomique. L'appareil est constitué de quatre zones spatio-temporelles distinctes : la **zone source**, d'où sont issus les atomes qui vont être lâchés ou lancés dans l'interféromètre ; les **séparatrices** (miroirs et lames semi-réfléchissantes) servant à diviser, défléchir et recombinaison les paquets d'ondes atomiques dans l'interféromètre ; les **zones sombres** entre les séparatrices ; la **zone de détection**, qui fournit le signal de franges interférométrique (amplitude, contraste et déphasage). Les atomes associés aux deux bras de cet interféromètre (de type Ramsey-Bordé symétrique) peuvent être repérés à la fois par leurs états externe et interne. D'autres géométries (horloges en fontaine, interféromètre de Ramsey-Bordé asymétrique) sont détaillées dans la partie 4.2.1.

Le résultat principal de cette étude est l'obtention d'une expression analytique du signal de franges complet (déphasage, contraste et amplitude) valable pour une très large variété d'interféromètres, et plus précisément pour :

- tous types de géométries d'interféromètre
- tous types de sources atomiques ou moléculaires (thermiques, froides, ultrafroides)
- tous types de séparatrices, spatiales ou temporelles, pour lesquelles l'approximation à deux ondes est valide (séparatrices temporelles à deux niveaux effectifs, séparatrices spatiales en régime de Bragg...)
- tous types de champs inertiels et gravitationnels (traités simultanément) dont le potentiel représentatif est de degré au plus deux en position et impulsion (rotations, accélérations, gradients d'accélération, ondes gravitationnelles...), les termes d'ordre supérieur étant, par conséquent, accessibles de façon perturbative
- tout type de détection (le signal de franges est fourni avant et après processus de détection).

En outre, cette expression rend notamment compte :

- de la structuration dispersive qui a lieu dans les séparatrices (sélectivité en vitesse, multiplication des paquets d'ondes en sortie, dispersion anormale et effet Borrmann...)
- de l'action simultanée de plusieurs champs inertiels et gravitationnels sur les séparatrices
- des différences de masse effective (terme d'horloge et effets relativistes).

Avant de détailler les trois outils de base de notre modélisation (formalisme ABCD, schéma ttt, chemins homologues), et de montrer comment obtenir cette expression générale du signal de franges, il est intéressant de rappeler les étapes historiques clefs de l'étude et de la construction des interféromètres

atomiques. Nous donnerons également quelques informations sur les nombreux domaines d'application de ces appareils, leur performances actuelles, et les limitations que l'on vise à dépasser dans cette étude.

1.1 Bref historique de l'interférométrie à ondes de matière

La possibilité de réaliser des interféromètres à ondes de matière est apparue dans les années 1920, lorsque de Broglie postula qu'à toute particule matérielle d'impulsion p , on pouvait associer une onde dont la longueur d'onde est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

dite "relation de de Broglie" [1].

Malgré la difficulté de détecter ce caractère ondulatoire de la matière (les longueurs de De Broglie atomiques typiques sont en effet inférieures de plusieurs ordres de grandeur aux longueurs d'ondes optiques), celui-ci fut très vite démontré expérimentalement, grâce aux travaux de Davisson et Germer [2], Estermann et Stern [3], et Halban [4] portant respectivement sur la diffraction des électrons, des atomes d'Hélium et des neutrons.

En ce qui concerne les électrons, les premiers interféromètres furent construits par Marton en 1952 [5], et Möllenstedt en 1955 [6] ; ils furent rapidement améliorés grâce aux développements de la microscopie électronique (pour une revue détaillée de ce type d'interférométrie, voir [7, 8] et [9]).

Le premier interféromètre à neutrons fut, quant à lui, construit en 1962 par Maier et Springer [10] ; mais le premier véritable signal de franges fut obtenu en 1974 par l'équipe de Rauch [11], dont l'interféromètre servit de modèle à toute une série d'expériences menées à la fin des années 1970 (effet Sagnac et mesure du déphasage dû à la gravité terrestre [12], changement de signe d'un spin 1/2 après rotation spatiale de 2π [13]) et dans les années 1980 (effets Aharonov-Bohm scalaire et Aharonov-Casher par exemple [14]). Une revue détaillée des interféromètres à neutron et de leurs applications est réalisée dans [15].

Pour les atomes, la chronologie est un peu plus délicate à établir, car on a, pendant longtemps, réalisé des interféromètres atomiques sans le savoir. En effet, ce n'est que dans les années 1980 que l'on s'est rendu compte que certaines expériences de spectroscopie, menées depuis les années 1950 [16] pour divers types d'atomes et de molécules, pouvaient être interprétées comme de véritables expériences d'interférométrie atomique. Plus précisément, c'est Bordé, en 1984 [17] et 1989 [18], qui montra comment la méthode de Ramsey, en spectroscopie optique, conduisait à de vrais interféromètres atomiques, dans lesquels les atomes des différents bras interférométriques devaient être repérés à la fois par leur état interne et leur état externe. Les premiers interféromètres de ce type ont été construits en 1979 par Berquist et al. [19].

En dehors de cette ré-interprétation des expériences de spectroscopie, les premiers signaux d'interférences atomiques furent détectés en 1965 par Hundhausen et Pauli [20] ; et le premier interféromètre atomique fut construit en 1973 par Sokolov [21]. Ce n'est qu'au milieu des années 1980 que se manifesta un réel intérêt pour ce type d'interférométrie, lorsque les progrès réalisés en physique atomique (fabrication de nanostructures périodiques) et en optique atomique (refroidissement laser [voir la partie 4.1.1] et séparatrices à ondes laser stationnaires ou progressives) permirent de manipuler de façon cohérente des ondes atomiques, recréant ainsi, pour les atomes, tous les composants utilisés en interférométrie lumineuse (miroirs et séparatrices). Il fallut ainsi attendre 1991 pour voir apparaître les premiers interféromètres atomiques utilisant :

- des séparatrices mécaniques (Carnal et Mlynek [22] avec deux fentes, Keith et al. [23] avec des microstructures matérielles)

- des séparatrices laser (Riehle et al. [24] avec des transitions à un photon, Kasevich et Chu [25] avec des transitions Raman stimulées)
- des séparatrices magnétiques (Robert et al. [26] par effet Stern-Gerlach)

Plus tard, en 1995, Rasel et al. [27] et Giltner et al. [28] complétèrent le lien entre les deux types de séparatrices - mécaniques et lumineuses - en réalisant un interféromètre où la séparation atomique était obtenue grâce à des microstructures lumineuses (transitions Raman dégénérées et régime de Kapitza-Dirac). Un autre lien fût mis à jour en 1995, avec la réalisation d'une version temporelle des séparatrices mécaniques [29] (rebonds d'atomes sur une onde évanescence désaccordée vers le bleu, jouant ainsi le rôle de miroir à atomes).

Depuis lors, de nombreux autres interféromètres atomiques (ou moléculaires [30, 31, 32, 33]) ont vu le jour, utilisant divers types de séparatrices et d'atomes (voir la partie 3.2), et poursuivant des objectifs différents (voir le paragraphe suivant). Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur aux dernières revues couvrant ce sujet : [34, 35, 36, 37, 38, 39].

Les horloges atomiques, utilisées notamment pour définir le Temps Atomique International, existent depuis les années 1950. Il existe principalement deux types d'horloges basées sur l'utilisation d'atomes neutres : les horloges micro-ondes et les horloges optiques. Les premières ne nécessitent pas de géométrie fermée (méthode usuelle d'interrogation de Ramsey à deux séparatrices), contrairement aux horloges optiques, pour lesquelles l'important recul encaissé par les atomes nécessite de refermer les trajectoires en sortie.

Comme nous l'avons dit plus haut, le lien avec l'interférométrie atomique a été réalisé dans les années 1980 par Bordé, qui a montré de façon explicite comment ré-interpréter ces horloges en termes d'interféromètres atomiques. Signalons également l'existence, depuis la fin des années 1980, d'une nouvelle géométrie plus efficace pour les horloges micro-ondes. Il s'agit de la géométrie en fontaine [40, 41] - aujourd'hui largement utilisée - que permirent notamment par les progrès effectués ces deux dernières décennies dans le domaine du refroidissement atomique (voir [42, 43] pour une revue des différents mécanismes de refroidissement existants, ainsi que la partie 4.1.1).

Ce rapide historique ne serait pas complet sans évoquer les avancées majeures qui ont eu lieu ces dernières années concernant le traitement théorique des interféromètres atomiques. En fait, peu d'études théoriques globales existent à ce jour, les très nombreuses avancées concernant essentiellement les différents éléments constitutifs d'un interféromètre atomique, à savoir la source atomique (voir partie 4.1.1), les séparatrices à atomes (voir chapitre 3 et partie 4.1.2), et les zones dites "sombres" entre les séparatrices (voir chapitre 2). Nous ne dirons que quelques mots de ces éléments largement détaillés dans la suite du mémoire.

Pendant longtemps, les calculs de déphasage interférométrique se sont basés sur un traitement quasi-classique de l'évolution des atomes, sur une modélisation simplifiée des séparatrices (voir la partie 3.7 et le paragraphe 4.1.2), et sur un traitement perturbatif de l'action des champs extérieurs (gravitationnels, inertiels, électromagnétiques...), ces approximations étant justifiées par la faible précision des interféromètres existants. Le cadre théorique communément utilisé était alors celui initié par Feynman (voir [44, 45, 46, 47, 48] et paragraphe 4.2.1) en termes d'évolution d'ondes planes, "le long" des trajectoires classiques suivies par les centres des paquets d'ondes présents dans l'interféromètre. Ce formalisme a notamment permis de mettre en évidence l'effet d'un gradient d'accélération dans un interféromètre utilisé comme gravimètre (Wolf & Tournenc en 1999 [49]) et de calculer l'effet perturbatif de certains termes d'ordre supérieur [50].

Un autre formalisme, proposé il y a près de 15 ans par Bordé, est à la source d'améliorations importantes. Ce formalisme, appelé "ABCD", en référence aux matrices du même nom habituellement rencontrées en optique Gaussienne, a pour objectif de fournir une description cohérente et unifiée des divers types d'interféromètres atomiques et de rendre compte de façon la plus précise possible de l'action simultanée de plusieurs champs extérieurs sur l'interféromètre.

Il est présenté pour la première fois en 1990 [51] pour décrire la propagation de paquets d'ondes atomiques en présence de divers champs gravito-inertiels. S'en suit alors une étude théorique systématique des différentes séparatrices laser (en champ fort avec une modulation de l'amplitude laser

[30, 52], en présence de gravité [53, 54], etc. ; voir chapitre 3), ainsi qu’une généralisation du calcul du déphasage interférométrique pour un champ atomique quantifié dans un cadre relativiste [55, 56] (ce calcul généralise la formule de Linet-Tourrenc [57] à des champs atomiques de spin non-nul). Enfin, en 2001 [58] et 2002 [35], Bordé présente les expressions analytiques du déphasage mesuré en sortie d’un gradiomètre et d’un gyromètre atomiques, et dérive, avec Wolf, l’expression quantique du signal de franges d’une fontaine atomique [35, 59].

Signalons également le récent travail du groupe de Vigué [34] sur l’utilisation d’états de Bloch pour calculer le déphasage d’interféromètres atomiques utilisant des séparatrices à réseaux de phase ou d’amplitude (permettant entre autres d’aller au-delà du modèle en ondes planes qui n’est plus pertinent pour ce type de séparatrices).

Soulignons par ailleurs les travaux d’Audretsch et Marzlin [60] sur le calcul du déphasage créé par un nombre arbitraire de séparatrices (avec une modélisation simplifiée de ces dernières), qui rendent compte - sous forme de développements - de l’action de plusieurs champs inertiels et gravitationnels sur l’interféromètre.

Enfin, d’autres problèmes liés à l’interférométrie atomique ont récemment été étudiés : décohérence dans les interféromètres atomiques dans le groupe de Reynaud [61], et mise en évidence de limitations importantes dans les mesures d’effets relativistes tenus par des interféromètres atomiques (Angonin-Willaime et al. [62]).

1.2 Applications, performances et limitations théoriques

Le domaine d’application des interféromètres atomiques est extrêmement vaste.

En effet, ces derniers étant sensibles aux effets gravitationnels, comme les autres types d’interféromètres à ondes de matière, ils peuvent être utilisés comme gravimètres [63] et gradiomètres [64, 65] (ce que ne permet pas l’interférométrie lumineuse), avec des applications immédiates en géodésie, en géophysique, dans la mesure de la constante de gravitation G [66, 67] et dans le test du principe d’équivalence [63, 66], etc.

Les interféromètres atomiques sont également sensibles aux effets inertiels (rotations, accélération...), et leur utilisation en tant que gyromètres [68, 69] et accéléromètres est l’une des plus prometteuses (comme en témoignent les sensibilités actuelles rappelées ci-après).

Les interféromètres atomiques présentent par ailleurs de nombreux avantages par rapport aux interféromètres électroniques et neutroniques : outre leur plus grande sensibilité de structure du fait que les atomes ont une longueur de De Broglie plus faible, ils ne sont pas sensibles aux champs électromagnétiques parasites (neutralité électrique des atomes) et ne nécessitent pas la présence d’un système complexe de production de la source (contrairement aux neutrons). De plus, les progrès accomplis dans les domaines du piégeage, du refroidissement et de la manipulation d’atomes permettent de réaliser des interféromètres atomiques à la fois compacts, très sensibles et ayant un fort contraste. Ces trois qualités ouvrent la voie à toutes les applications dédiées à la navigation, qu’elle soit terrestre, sous-marine ou spatiale.

Bien sûr, comme nous l’avons déjà souligné, l’utilisation d’atomes dont on peut manipuler les degrés de liberté - à la fois internes et externes - permet de généraliser les dispositifs usuels de spectroscopie et de réaliser des mesures de fréquences avec diverses géométries d’interféromètre (configuration Ramsey-Bordé asymétrique par exemple). Cette ré-interprétation en termes d’interféromètres atomiques des horloges - micro-ondes ou optiques - fait définitivement tomber les barrières entre horloges atomiques et senseurs inertiels : on peut en effet considérer que toute horloge atomique est un senseur inertiel, et réciproquement. Ainsi, les applications propres aux horloges (références de fréquence, systèmes de positionnement type GPS, synchronisation de réseaux de télécommunication...) peuvent être vues comme d’authentiques applications d’interférométrie atomique.

D’autre part, le signal de franges interférométrique pourra dépendre - selon le type de géométrie considéré - du rapport h/m_{at} (dès qu’il y a dissymétrie en fait), ce qui offre la possibilité de mesurer

la constante de structure fine avec précision [66] et d'une façon totalement indépendante des calculs d'Electrodynamique Quantique ¹.

Enfin, lorsque les deux bras principaux de l'interféromètre sont suffisamment espacés, il est possible d'appliquer une perturbation sur un seul des deux bras, et ainsi d'avoir accès à diverses propriétés de physique atomique et moléculaire (polarisabilité électrique [70], indice de réfraction d'un gaz plus ou moins dense [71, 72, 73] ...).

En ce qui concerne leurs performances, les interféromètres atomiques actuels (utilisés en tant que senseurs inertiels ou gravitationnels) ont une sensibilité du même ordre de grandeur, voire supérieure, à celle des meilleurs autres senseurs (gyromètres laser, gravimètres à coin cube, balances de torsion...), et leur potentiel de perfectionnement est énorme (en gyrométrie par exemple).

La sensibilité extrême de ces appareils offre la possibilité d'étendre leurs applications à des tests de physique fondamentale : principe d'équivalence, mesure des paramètres PPN, mesure d'effets tenus de Relativité Générale (effet Lense-Thirring par exemple), mesure de la variation de α et de c , recherche d'une cinquième force, détection d'ondes gravitationnelles...

Néanmoins, comme on l'a déjà dit, les approximations effectuées dans la modélisation de ces interféromètres atomiques et dans le calcul de leur signal de franges ne sont plus compatibles avec leur niveau de performance.

Il est en effet assez simple de constater que les termes négligés par ces approximations (la structuration dispersive des séparatrices et l'action de champs inertiels et gravitationnels d'ordres supérieurs essentiellement) sont aujourd'hui du même ordre de grandeur que les sensibilités mesurées ou recherchées.

Par exemple, l'effet du gradient de gravité terrestre sur un gyromètre entraîne une correction de l'ordre de quelques $10^{-10} \text{ rad.s}^{-1}$, ce qui correspond à la précision actuelle des meilleurs gyromètres atomiques (sensibilité de $6.10^{-10} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ en 2000 [68]). Il en est de même pour les gradiogravimètres, sur lesquels l'effet des termes croisés du type "gradient-rotation" conduit à une correction de l'ordre de quelques 10^{-10} en valeur relative, ie à moins d'un ordre de grandeur de la sensibilité relative obtenue avec les meilleurs gravimètres atomiques (incertitude absolue égale à 5.10^{-9} en 2001 [66]) et gradiomètres atomiques (sensibilité de $4.10^{-9} \text{ s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ en 2002 [65]). Plus contraignante encore, la présence d'un gradient de gravité dans les expériences de mesure de α conduit à une correction de quelques 10^{-9} , supérieure à l'incertitude visée (incertitude égale à 7.10^{-9} dans le groupe de Chu [66]). Enfin, pour ce qui est des horloges optiques, on prévoit des corrections dues au gradient de gravité terrestre de l'ordre de quelques 10^{-17} en fréquence relative, ce qui pourrait s'avérer gênant dans les années venir compte tenu de leur perfectionnement attendu (la stabilité en fréquence, qui est actuellement de $4.10^{-15} \text{ Hz}^{-1/2}$ [74, 75], est limitée théoriquement par le bruit de projection quantique à $10^{-18} \text{ Hz}^{-1/2}$).

Eut égard aux objectifs annoncés, ces limitations sévères révèlent la nécessité de disposer aujourd'hui d'une expression du signal de franges tenant compte de l'effet simultané de plusieurs rotations, accélérations et gradients d'accélération, qui soit en outre analytique, afin de permettre d'atteindre de façon perturbative l'effet de termes d'ordre supérieur, comme les gradients de gradients d'accélération (ce qui est nécessaire pour les projets spatiaux du type HYPER [76, 62] ou pour les mesures de la constante de gravitation G [66, 67]).

Il est également fondamental de pouvoir disposer d'une modélisation pertinente des séparatrices atomiques prenant en compte les propriétés dispersives particulières de ces éléments.

On peut en effet montrer que, sous certaines conditions, le déphasage en sortie d'un interféromètre atomique peut être modifié par la structuration particulière des paquets d'ondes atomiques ayant lieu dans les séparatrices laser. L'effet Borrmann atomique entraîne, par exemple, des corrections de l'ordre

¹Grâce à la relation :

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c} \frac{m_p}{m_e} \frac{m_{at}}{m_p} \frac{h}{m_{at}}$$

où les trois premiers rapports du membre de droite sont connus à mieux que 10^{-9} .

de τ/T dans le déphasage de sortie d'un gyromètre atomique, où T est le temps de vol interférométrique total et où τ est le temps que met un atome pour traverser l'onde laser (voir partie 5.2.2).

Pour toutes ces raisons, il importe aujourd'hui d'aller au-delà des approximations communément utilisées dans la modélisation des interféromètres atomiques, et d'obtenir une expression du signal de franges rendant compte de tous les effets listés ci-dessus. C'est dans cette perspective que s'inscrit la présente étude.

1.3 Plan du mémoire

Le présent mémoire comporte des développements théoriques et d'autres parties plus pratiques (modélisations).

En ce qui concerne la modélisation des interféromètres atomiques, l'objectif est de fournir une expression analytique du signal de franges la plus générale et complète possible, et d'utilisation la plus commode pour le lecteur. C'est pourquoi un chapitre entier est dédié à la méthode pratique de modélisation. En outre, des rappels sont régulièrement effectués au fil du texte pour en simplifier la compréhension, de sorte à faciliter, dans la mesure du possible, une éventuelle lecture autonome de chaque chapitre du mémoire.

En ce qui concerne les aspects plus théoriques, l'objectif est non seulement d'approfondir et de généraliser les deux outils de base de l'étude (formalisme ABCD et schéma ttt), mais également de développer de nouveaux outils théoriques, concernant aussi bien la propagation d'ondes matérielles dans des champs inertiels et gravitationnels quelconques (par la théorie des opérateurs intégrales premières), que l'étude des séparatrices laser en présence de certains de ces champs (schéma ttt généralisé, méthode des états adiabatiques successifs, méthode de l'élimination opératorielle, modélisation ttt champs forts, effet Borrmann généralisé...), ou encore la mise en évidence d'invariants symplectiques utiles à l'interprétation et à la simplification de l'expression des déphasages (théorème des quatre points finaux).

De façon plus précise, le chapitre 2 commence par définir le cadre théorique - et plus particulièrement l'Hamiltonien H_{ext} - qui sera utilisé dans les chapitres suivants pour l'étude des séparatrices laser et des interféromètres atomiques. Il détaille ensuite le formalisme ABCD (définition et propriétés des matrices ABCD, intérêt et application du théorème ABCD), qui traite principalement de l'évolution de paquets d'ondes atomiques en présence des divers champs inertiels et gravitationnels représentés par H_{ext} . Il présente enfin une nouvelle méthode de résolution de l'équation de Schrödinger pour tout Hamiltonien (dépendant ou non du temps), fondée sur la théorie des opérateurs intégrales premières, et montre comment cette méthode peut généraliser l'approche ABCD à tous types d'Hamiltonien.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude et à la modélisation des séparatrices atomiques, et plus particulièrement des séparatrices à ondes laser progressives. Il commence par rappeler le cadre d'étude du problème, en précisant les approximations et limitations considérées. Il montre ensuite comment simplifier l'équation obtenue (passage dans la représentation d'interaction, passage(s) dans le référentiel tournant, approximations de certains termes non pertinents), avant de détailler différentes méthodes de résolution de cette dernière. Le *schéma ttt généralisé* est alors exposé en détail dans la partie 3.5. Il montre comment décrire, de façon rigoureuse, l'interaction atome-laser - en présence des champs inertiels et gravitationnels décrits au chapitre 2 - sous forme d'une interaction instantanée équivalente (matrice S). L'étude du cas libre (ie sans champ inertiel, ni gravitationnel) est ensuite détaillée, d'abord pour un paquet d'ondes atomique incident à très faible largeur en impulsion, puis pour un paquet d'ondes quelconque. Une modélisation réaliste de l'effet Borrmann et de la structuration dispersive des séparatrices est proposée dans ce cas libre, mais également dans le cas plus général où l'on tient compte de l'action des champs inertiels et gravitationnels pendant l'interaction laser.

Le chapitre 4 aborde la modélisation des interféromètres atomiques. Il commence par donner une description unifiée des diverses sources atomiques utilisées aujourd'hui, puis rappelle l'expression des

modélisations établies précédemment (séparatrices et zones sombres), avant de calculer l'effet des processus de détection. Il introduit ensuite deux outils importants : le concept de chemins homologues et le théorème des quatre points finaux, qui permettent d'exprimer le déphasage en sortie d'un interféromètre atomique sous une forme analytique très compacte. Le signal de franges complet est alors calculé explicitement pour deux modélisations des séparatrices, notamment celle réalisée au chapitre 3 ; et les différents résultats ainsi obtenus sont ensuite comparés.

Le chapitre 5 expose la méthode pratique d'utilisation de cette modélisation générale des interféromètres atomiques. Celle-ci est ensuite détaillée dans le cas des interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques (géométrie Mach-Zehnder), tout d'abord selon l'une des modélisations simplifiées des séparatrices (infiniment fine ou ttt champ faible), puis selon les modélisations ttt champs forts établies au chapitre 3. Les corrections d'ordre supérieur (termes croisés du type gradient d'accélération - rotation) et l'effet Borrmann généralisé sont alors obtenus de façon explicite, puis commentés.

Chapitre 2

Formalisme ABCD et extensions

Ce chapitre traite de l'évolution des paquets d'ondes atomiques en présence de champs inertiels et gravitationnels. Il a essentiellement pour but de :

1. définir précisément le cadre théorique - et plus particulièrement l'Hamiltonien - qui sera utilisé dans les chapitres suivants (pour l'étude des séparatrices laser et des interféromètres atomiques),
2. passer en revue et approfondir le formalisme "ABCD" introduit récemment en optique atomique (définition et propriétés des matrices ABCD, intérêt et application du théorème ABCD...),
3. proposer une méthode générale de résolution de l'équation de Schrödinger pour tout Hamiltonien (dépendant ou non du temps), en s'appuyant sur la théorie des opérateurs intégrales premières (et montrer comment elle généralise l'approche ABCD pour connaître l'évolution de paquets d'ondes atomiques dans un potentiel extérieur quelconque),
4. faire le lien avec le formalisme d'opérateurs création-annihilation introduit dans [51], et en donner une nouvelle perspective,
5. enfin, introduire et détailler plusieurs concepts également très importants pour la suite de l'étude (fonction génératrice, invariant symplectique...).

2.1 Hamiltonien considéré

2.1.1 Origine et approximations

Bien qu'il n'existe pas, à ce jour, de théorie totalement consistante avec la Relativité Générale et la Théorie Quantique Relativiste des Champs, il est cependant possible de décrire l'effet - sur des atomes - des champs inertiels et gravitationnels usuels dans un cadre qui tient compte à la fois de la Relativité Générale et de la seconde quantification du champ atomique. Parmi les différentes approches connues, une méthode a été plus particulièrement étudiée par Bordé dans les années 90 [58, 77, 78]. Elle revient, par exemple, à considérer les équations de champ usuelles (pour un spin donné) dans un espace-temps courbe, dont le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ rend compte de la gravitation. Les atomes apparaissent alors comme les quanta d'un champ matériel, dont la masse et le spin sont définis respectivement à partir de leur niveau d'énergie interne et de leur moment angulaire total. Selon la valeur du spin atomique, on est ainsi amené à utiliser les équations de Klein-Gordon, Dirac, Proca...

L'étude de l'équation de Dirac - couplée à des champs gravitationnels faibles et à des champs électromagnétiques - a déjà été réalisée dans le cadre de l'interférométrie atomique [77, 78], afin de mettre en évidence les différentes contributions possibles au déphasage final, et en particulier les termes dépendant du spin. Néanmoins, cette approche néglige de nombreux autres effets qui peuvent être très importants en interférométrie atomique [58], comme la structure et l'évolution particulière des paquets d'ondes atomiques, la trajectoire réelle de leur centre (trajectoires perturbées), l'effet structurant des séparatrices...

Par conséquent, afin d'obtenir un cadre de travail qui nous permette de traiter le maximum de ces effets, nous ne tiendrons pas compte du spin des atomes, et nous considérerons simplement l'équation de Klein-Gordon pour un champ atomique scalaire [58, 79] :

$$\left[\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi = 0 \quad (2.1)$$

Celui-ci sera couplé aux champs inertiels et gravitationnels par l'intermédiaire du d'Alembertien \square exprimé en fonction du tenseur métrique :

$$\square \varphi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right]$$

où $g := \det(g_{\mu\nu})$.

A ce stade, il nous faut définir ce que l'on entend par les " $g_{\mu\nu}$ ".

Dans cette étude, nous allons en fait nous placer en champ faible, ie que nous admettons qu'il existe un système de coordonnées dans lequel le tenseur métrique s'écrit sous la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

avec la métrique Minkowskienne :

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Deux raisons principales nous conduisent à ce choix :

- premièrement, le fait de considérer des $g_{\mu\nu}$ quelconques soulève de nombreux problèmes conceptuels (voir [58, 78]), alors qu'un traitement au premier ordre permet de les éviter,

- deuxièmement, on peut rendre compte de tous les effets inertiels et gravitationnels connus en optique atomique grâce à un tel tenseur métrique (voir paragraphe suivant).

Finalement, l'équation de Klein-Gordon précédente devient :

$$\boxed{\left[\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) \partial^\mu \varphi - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi = 0} \quad (2.2)$$

avec :

$$h := h^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

Contrairement à une idée reçue, le passage de cette équation à une équation du type "Schrödinger" ne repose pas sur une approximation non-relativiste, mais sur une **approximation de phase et d'amplitude lentement variables**.

Dans le cas d'une telle approximation en effet, le champ scalaire φ est quasi-monochromatique (énergie E_0 constante, amplitude $\varphi_0(t)$ variant peu avec le temps) et s'écrit :

$$\varphi = \varphi_0 e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} - \frac{2i E_0}{\hbar} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} - \frac{E_0^2}{\hbar^2} \varphi \simeq - \frac{2i E_0}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{E_0^2}{\hbar^2} \varphi$$

qui conduit à l'équation :

$$i \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{E_0}{2} + \frac{m^2 c^4}{2 E_0} \right) \varphi - \frac{\hbar^2 c^2}{2 E_0} \nabla^2 \varphi - \frac{\hbar^2 c^2}{2 E_0} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$$

où il faut appliquer la règle : $\partial_t \longrightarrow -i E_0 / \hbar$ pour le dernier terme.

Finalement, en représentation impulsion, on obtient l'équation de Schrödinger suivante :

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{E_0}{2} + \frac{m^2 c^4}{2 E_0} \right) \varphi - \frac{c^2}{2 E_0} p^j p_j \varphi + \frac{c^2}{2 E_0} p_\mu h^{\mu\nu} p_\nu \varphi} \quad (2.3)$$

(où la règle précédente devient $p_0 \longrightarrow E_0 / c$).

Cette équation est valable pour des particules de masse quelconque, en particulier pour des particules non-massives ($m = 0$), dont la vitesse est égale à la vitesse de la lumière c . Le passage de 2.2 à 2.3 ne correspond donc pas à une approximation non-relativiste, qui consisterait à développer les solutions des équations précédentes en puissances de v_{at}/c (où v_{at} est de l'ordre de grandeur des vitesses atomiques typiques considérées) et à ne conserver que les termes d'ordre au plus deux ¹.

Pour retrouver l'équation non-relativiste habituelle [57, 77] :

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[m c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + p_\mu \frac{h^{\mu\nu}}{2m} p_\nu \right] \varphi} \quad (2.4)$$

il faut alors choisir comme énergie au repos l'énergie de masse :

$$E_0 = m c^2 \quad (2.5)$$

¹ A ne pas confondre évidemment avec le fait de traiter $h_{\mu\nu}$ au premier ordre

Approximation parabolique :

On peut voir en fait que ce choix $E_0 = mc^2$ revient à approximer localement la courbe de dispersion usuelle :

$$p \mapsto E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

qui est une hyperbole, par une parabole tangente en $p = 0$ (voir figure 2.1) :

$$E(p) \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

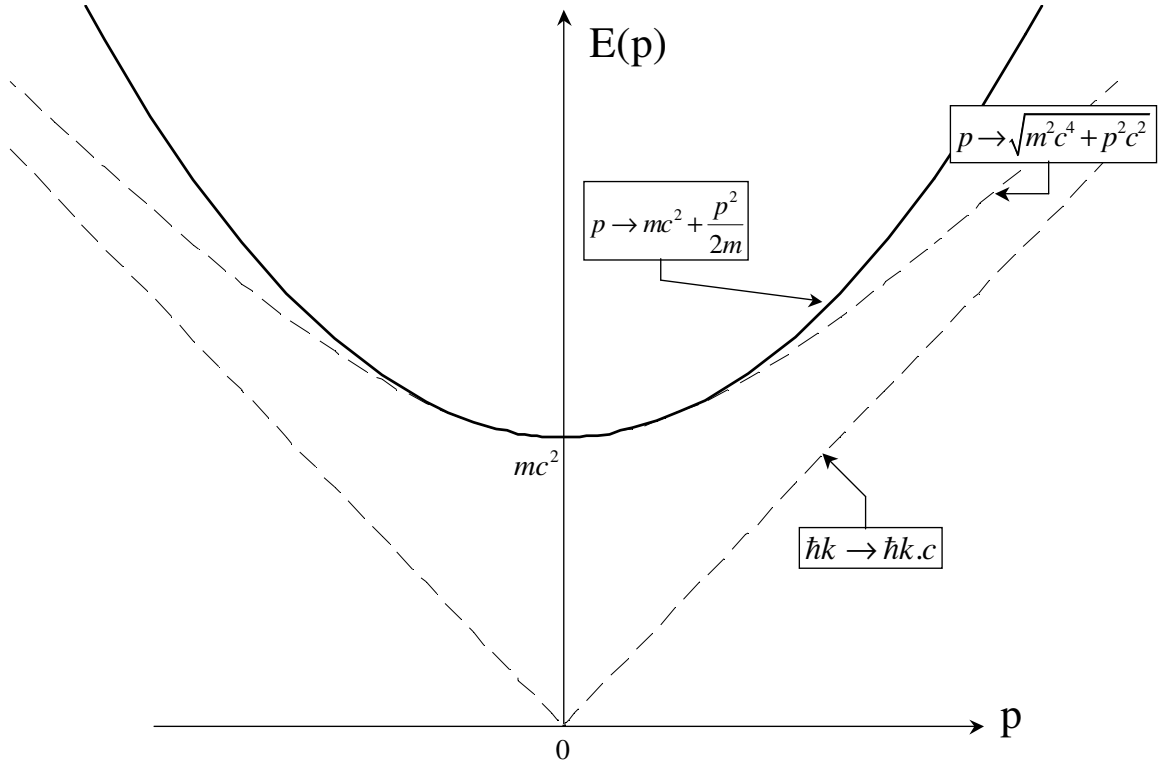


FIG. 2.1: Diagrammes d'énergie-impulsion pour particules massives et non-massives (en trait pointillé). Approximation non-relativiste (en trait plein).

Néanmoins, cette approximation n'est pertinente que pour des vitesses atomiques proches de zéro. Dès que l'on considère des atomes en mouvement (d'impulsion moyenne p_0), il semble plus avantageux d'approximer localement cette courbe de dispersion hyperbolique par une courbe tangente au point $(p_0, E(p_0))$.

On peut ainsi développer $E(p)$ en puissances de $(p - p_0)/mc$, mais cela conduit à un terme linéaire en p qui change beaucoup la physique dans l'équation de Schrödinger obtenue. Un autre choix, introduit récemment par Bordé dans [79], est de développer $E(p)$ en puissances de $(p^2 - p_0^2)/m^2 c^2$:

$$E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{p^2 - p_0^2}{m^2 c^2 + p_0^2}} \right) \simeq \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2} + \frac{1}{2} \frac{p^2 - p_0^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2/c^2}}$$

et ainsi d'approximer la courbe de dispersion précédente par une parabole tangente au point $(p_0, E_0 := E(p_0))$ (voir figure 2.2) :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\tilde{m}c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m^*} + p_\mu \frac{h^{\mu\nu}}{2m^*} p_\nu \right] \varphi \quad (2.6)$$

avec :

$$m^* := E_0/c^2 \quad \text{et} \quad \tilde{m} := \frac{E_0}{2c^2} + \frac{m^2 c^2}{2E_0} = \frac{m^*}{2} \left(1 + \frac{m^2}{m^{*2}} \right) \quad (2.7)$$

Cette approximation, qui résulte d'une "parabolisation" de l'équation hyperbolique $E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, sera appelée par la suite "**approximation parabolique**".

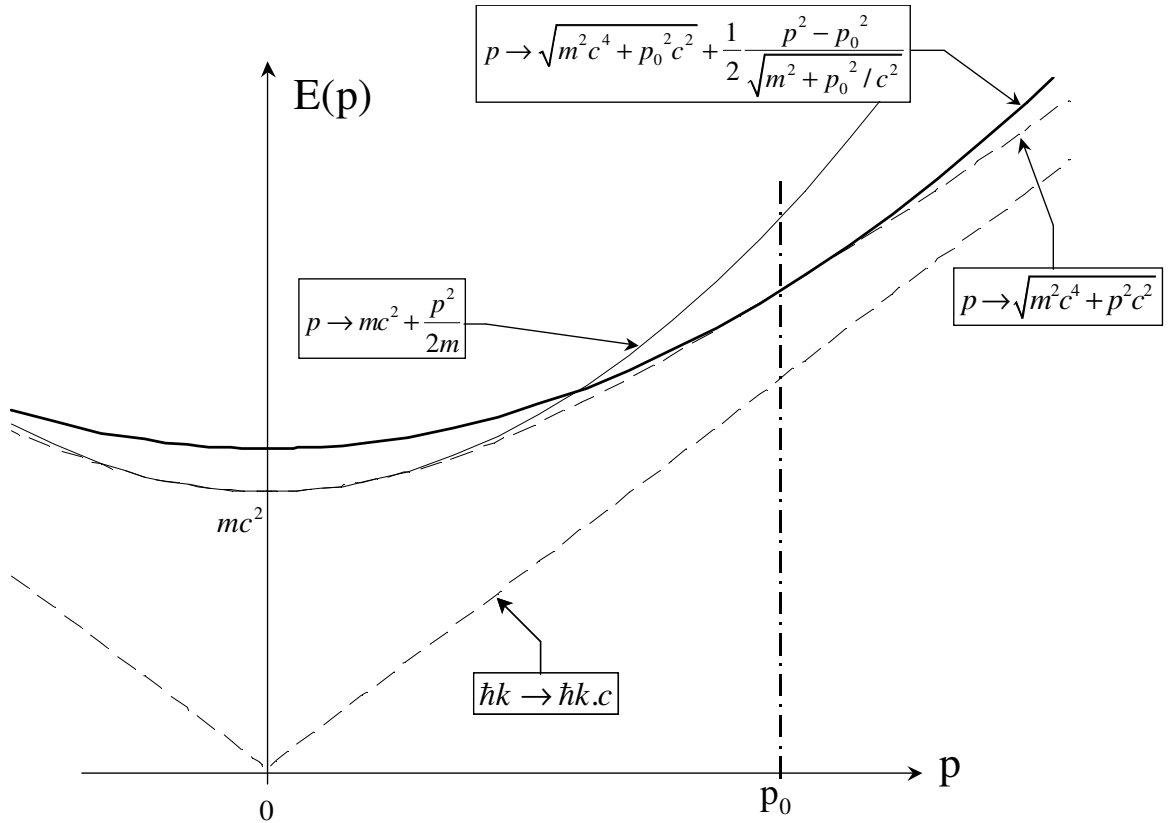


FIG. 2.2: Diagrammes d'énergie-impulsion pour particules massives et non-massives (en trait pointillé). Comparaison entre l'approximation non-relativiste habituelle (parabole centrée en $p=0$), et le développement autour de p_0 proposé par Bordé [79] (parabole centrée en p_0).

Signalons que ce choix permet d'obtenir une équation valable pour des particules massives **et** non-massives² (par exemple, pour une onde lumineuse monochromatique, on a : $m=0$ et $E_0 := \hbar\omega$). On dispose donc d'une approche unificatrice de l'évolution des ondes à la fois matérielles et lumineuses (aux propriétés dispersives près, pour la lumière).

L'équation obtenue ne repose donc pas sur une approximation non-relativiste, mais simplement sur une *approximation de faible vitesse* au voisinage de la vitesse p_0/m . En ce sens, l'équation précédente 2.6 reste bien relativiste dans un petit intervalle de vitesse autour de p_0/m .

²En effet, bien que les courbes $p \mapsto E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ (pour les atomes) et $\hbar k \mapsto E_\omega(\hbar k) = \hbar\omega = \hbar k.c$ (pour la lumière) soient très différentes autour de la valeur $p = \hbar k = 0$, elles tendent vers le même comportement lorsque $p = \hbar k$ augmente. L'approximation de ces courbes de dispersion par la parabole précédente sera donc d'autant meilleure que $p = \hbar k$ sera grand.

Par la suite nous considérerons seulement les ondes matérielles, pour lesquelles nous prendrons l'équation non-relativiste habituelle (sauf mention contraire et explicite de cette *approximation parabolique*, ie de la présence des deux masses effectives m^* et \tilde{m}).

2.1.2 Hamiltonien au plus quadratique

L'équation de Schrödinger abtenue précédemment

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + p_\mu \frac{h^{\mu\nu}}{2m} p_\nu \right] \varphi$$

avec :

$$\boxed{p_\mu \frac{h^{\mu\nu}}{2m} p_\nu = \frac{mc^2}{2} h_{00} - c \vec{h} \cdot \vec{p} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{h} \cdot \vec{p}}{2m}} \quad (2.8)$$

où :

$$\vec{h} := \{h^{0i}\} \quad \text{et} \quad \vec{\Rightarrow h} := \{h^{ij}\}$$

fait apparaître des termes linéaires et quadratiques en impulsion. Chacun des termes de $h^{\mu\nu}$ a une origine physique particulière, et peut dépendre du temps et du vecteur position \vec{r} . Donnons en quelques exemples.

Le terme

$$\boxed{\frac{mc^2}{2} h_{00}}$$

qui ne dépend pas de \vec{p} , a pour origine, par exemple :

- l'action d'un potentiel du type Newtonien :

$$h_{00} = \frac{2}{c^2} U(\vec{r}, t)$$

Par exemple dans le cas d'un champ gravitationnel planétaire, on obtient :

$$\frac{mc^2}{2} h_{00} = -m \vec{g}(t) \cdot \vec{r} - \frac{m}{2} \vec{r} \cdot \vec{\Rightarrow \gamma}(t) \cdot \vec{r} - \dots \quad (2.9)$$

où l'on reconnaît la **gravité** usuelle \vec{g} et la "matrice **gradient de gravité**" $\vec{\Rightarrow \gamma}$. On peut également voir ces termes comme résultant de l'action d'un champ d'**accélération** (avec un **gradient d'accélération**), ou encore comme l'effet d'un tenseur de courbure $R_{0i0j} r^i r^j$.

- l'effet d'ondes gravitationnelles en jauge de Fermi :

$$\frac{mc^2}{2} h_{00}^F = -\frac{m}{2} \vec{r} \cdot \vec{\Rightarrow \gamma}^F(t) \cdot \vec{r}$$

avec :

$$\vec{\Rightarrow \gamma}^F(t) = \frac{\omega_{GW}^2}{2} \vec{h}_F \cos(\omega_{GW} t + \phi)$$

Le terme linéaire

$$\boxed{-c \vec{p} \cdot \vec{h}}$$

peut, quant à lui, rendre compte des rotations, quelle qu'en soit l'origine :

- référentiel en **rotation** (artificielle, terrestre...) :

$$\vec{h}(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}/c \quad (2.10)$$

- **effet Lense-Thirring** :

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{1}{2} (\gamma_{PPN} + 1 + \alpha_1/4) \frac{GI}{c^2} \frac{\vec{\omega} r^2 - 3(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \quad (2.11)$$

où G est la constante de gravitation, I le moment angulaire du corps en rotation et $\vec{\omega}$ son vecteur rotation, et où γ_{PPN} et α_1 sont les paramètres post-post-Newtonien usuels ($\gamma_{PPN} = 1$ et $\alpha_1 = 0$ en Relativité Générale).

Cet effet relativiste - dit gravito-magnétique - est dû à la modification de la métrique locale à proximité de corps massifs en rotation, et se traduit entre autres par l'apparition - locale - d'un vecteur de rotation effectif $\vec{\Omega}_{LT}$.

Le mot "gravito-magnétisme" fait alors référence au fait que les lignes de champ de $\vec{\Omega}_{LT}(t)$ ont la même structure que celles du champ magnétique créé par un dipôle. Plusieurs expériences tentent actuellement de mesurer l'effet Lense-Thirring dû à la rotation terrestre (Gravity Probe B par exemple), et un projet spatial de détection par interférométrie atomique est également en cours (voir [76]).

Enfin, le terme quadratique en impulsion

$$\boxed{\vec{p} \cdot \vec{h} \cdot \vec{p} / 2m}$$

rend essentiellement compte de l'action d'**ondes gravitationnelles** en jauge d'Einstein :

$$\vec{h}(t) = \vec{h}_E \cdot \cos(\omega_{GW} t + \phi) \quad (2.12)$$

Lorsque l'on tient compte du spin des atomes, de nombreux autres termes sont présents dans $p_\mu \frac{\hbar^{\mu\nu}}{2m} p_\nu$ [58]. Citons entre autres l'effet De Sitter (geodetic precession) qui fait intervenir \vec{h} et qui se traduit par une précession du spin atomique (effet gravito-magnétique analogue à celui de Lense-Thirring).

Si l'on considère que l'effet des **gradients de gradients** (d'accélération ou de gravité) est suffisamment faible par rapport aux autres effets listés ci-dessus, on peut alors restreindre les termes de $p_\mu \frac{h^{\mu\nu}}{2m} p_\nu$ à ceux qui sont au plus quadratiques en position (ie en le vecteur \vec{r}). On obtient finalement que la plupart des effets inertiels et gravitationnels usuels peuvent être décrits grâce à un Hamiltonien extérieur au plus quadratique en impulsion **et** en position. De plus, du fait que notre calcul du déphasage interférométrique est exact pour tous les termes de cet Hamiltonien, nous pourrions quand même avoir accès à l'effet de termes d'ordre supérieur de façon perturbative (pour les gradients de gradients par exemple).

L'Hamiltonien typique que l'on doit considérer s'écrit par conséquent :

$$H_{ext} = mc^2 + \frac{\vec{p} \cdot \left(1 + \vec{h}(t)\right) \cdot \vec{p}}{2m} - \vec{p} \cdot \left(\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}\right) - m \vec{g}(t) \cdot \vec{r} - \frac{m}{2} \vec{r} \cdot \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{r} \quad (2.13)$$

où \vec{h} et $\vec{\gamma}$ sont ici des matrices 3×3 .

En fait, nous allons nous placer dans un cas encore plus général en considérant tous les termes possibles d'un **Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion** :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\beta}(t) \cdot \vec{p}}{2m} - \vec{r} \cdot \vec{\alpha}(t) \cdot \vec{p} - \frac{m}{2} \vec{r} \cdot \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{r} - m \vec{g}(t) \cdot \vec{r} + \vec{f}(t) \cdot \vec{p} \quad (2.14)$$

ie avec des coefficients $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, \vec{f} et \vec{g}

- exprimés avec des **matrices 3×3 non-diagonales** (pour $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$),
- et **dépendant du temps**.

Remarquons que le champ d'action de cet Hamiltonien ne se limite pas aux seuls effets inertiels et gravitationnels. Il peut en effet rendre compte de tout potentiel pouvant s'écrire sous la forme d'un développement au plus quadratique en \vec{r} , en particulier de tout potentiel piégeant (du type de ceux utilisés dans les horloges atomiques qui conduisent à l'effet Lamb-Dicke)³. De plus, bien que nous n'envisagions par la suite que des atomes neutres, les résultats que l'on obtiendra à partir d'un tel Hamiltonien seront également valables pour tout potentiel électromagnétique pouvant s'écrire sous la forme d'un développement au plus quadratique en \vec{r} et \vec{p} (*champs électriques* ou *champs magnétiques uniformes* par exemple).

³L'Hamiltonien que l'on considère permet de traiter également les oscillateurs harmoniques amortis (généralisés et à 3 dimensions).

2.2 Matrices ABCD

2.2.1 Origine et définition

Historiquement, les matrices $ABCD$ ont été introduites en optique atomique pour rendre compte - par analogie avec les méthodes utilisées en optique Gaussienne - de l'évolution de paquets d'ondes atomiques Hermite-Gaussiens (pour une comparaison des deux méthodes, voir [51]).

La justification d'une telle approche est triple. Premièrement, parce qu'il est intéressant d'obtenir une méthode, aussi puissante que la méthode $ABCD$ en optique, permettant de décrire l'évolution des ondes atomiques sous forme d'une *matrice de transfert*. Ensuite, parce qu'à l'approximation paraxiale, l'équation de propagation d'un mode laser est *analogue à une équation de Schrödinger* à deux dimensions, et que l'on peut donc transposer directement de nombreux résultats d'optique Gaussienne [51]. Et enfin, parce que l'on sait - grâce au théorème d'Ehrenfest - que le centre (\vec{r}_c, \vec{p}_c) d'un paquet d'ondes atomique soumis à un tel Hamiltonien H_{ext} (au plus quadratique en position et impulsion) évolue de façon *classique* selon une *loi linéaire* du type $ABCD$:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_c(t) \\ \vec{p}_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_c(t_0) \\ \vec{p}_c(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix}$$

où A, B, C et D sont des matrices 3×3 .

On peut alors se demander :

1. comment les "coefficients" $A, B, C, D, \vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$ s'expriment en fonction des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \vec{f}$ et \vec{g} de H_{ext} ,
2. comment évoluent les autres caractéristiques du paquet d'ondes atomique (largeurs en position et impulsion par exemple).

Nous examinerons dans la partie suivante comment le *théorème ABCD* répond à la seconde question. En particulier, nous verrons que les *largeurs* en position et en impulsion obéissent également à une loi linéaire du type $ABCD$, et plus précisément que cette loi est *la même* que celle qui régit l'évolution des données centrales \vec{r}_c et \vec{p}_c .

Quant à la première question, il suffit de résoudre les équations classiques du mouvement pour l'Hamiltonien :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p} \cdot \beta(t) \cdot \vec{p}}{2m} - \vec{r} \cdot \alpha(t) \cdot \vec{p} - \frac{m}{2} \vec{r} \cdot \gamma(t) \cdot \vec{r} - m \vec{g}(t) \cdot \vec{r} + \vec{f}(t) \cdot \vec{p}$$

Les équations de Hamilton pour cet Hamiltonien s'écrivent alors sous la forme :

$$\frac{d\chi}{dt} = \Gamma(t) \chi + \Phi(t) \quad (2.15)$$

à l'aide du bi-vecteur :

$$\chi := \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p}/m \end{pmatrix}$$

et avec :

$$\Gamma(t) := \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Un tel Hamiltonien au plus quadratique conduit donc à des équations de Hamilton *linéaires*, dont la solution s'écrit :

$$\chi(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \chi(t_0) + \begin{pmatrix} \overrightarrow{\xi}(t, t_0) \\ \overrightarrow{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

avec :

$$\mathcal{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} := \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} dt' \right) \right) \quad (2.19)$$

et où on a utilisé l'opérateur \mathcal{T} de Dyson (voir appendice A), et :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\xi}(t, t_0) \\ \overrightarrow{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} := \int_{t_0}^t \mathcal{M}(t, t') \Phi(t') dt' \quad (2.20)$$

Lorsque l'on a $\overrightarrow{\xi}$, on obtient directement $\overrightarrow{\phi}$ par la relation :

$$\overrightarrow{\phi} = \beta^{-1} \left(\frac{d\overrightarrow{\xi}}{dt} - \alpha \overrightarrow{\xi} - \overrightarrow{f} \right)$$

Les matrices $ABCD$ sont donc définies comme les *coefficients linéaires* de la solution des équations de Hamilton pour ce $H_{ext}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t)$ [51, 58, 80, 81, 35].

Il convient de souligner d'une part que les matrices $ABCD$ ne dépendent que des termes quadratiques $H_{ext}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t)$ - alors que les vecteurs $\overrightarrow{\xi}$ et $\overrightarrow{\phi}$ dépendent de tous les paramètres de H_{ext} - d'autre part que tous ces termes sont obtenus de façon classique (et non quantique).

2.2.2 Propriétés des matrices ABCD

Les matrices $ABCD$ possèdent de nombreuses propriétés très intéressantes, dont la plupart découlent de la *structure symplectique* de la mécanique Hamiltonienne. Certaines de ces propriétés sont détaillées dans l'appendice B, et nous ne rappelons ici que les principales.

– **Propriété d'évolution :**

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \alpha A + \beta C \\ \dot{B} &= \alpha B + \beta D \\ \dot{C} &= \gamma A + \alpha C \\ \dot{D} &= \gamma B + \alpha D \end{aligned} \quad (2.21)$$

- **Propriétés de symétrie :** les *familles* de matrices suivantes sont symétriques :

$$\boxed{\tilde{A}C \quad , \quad C\tilde{D} \quad , \quad \tilde{D}B \quad , \quad B\tilde{A}}$$

$$\boxed{DB^{-1} \quad , \quad B^{-1}A \quad , \quad AC^{-1} \quad , \quad C^{-1}D} \quad (2.22)$$

$$\boxed{A\tilde{D} \quad \text{et} \quad \tilde{A}D} \quad , \quad \boxed{B\tilde{C} \quad \text{et} \quad \tilde{B}C}$$

- **Propriétés d'unitarité :**

$$\boxed{\tilde{A}D - \tilde{C}B = 1} \quad (2.23)$$

$$\boxed{A\tilde{D} - B\tilde{C} = 1}$$

- **Matrice inverse :**

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{B} \\ -\tilde{C} & \tilde{A} \end{pmatrix}} \quad (2.24)$$

- **Propriétés de groupe :**

$$[\mathcal{M}(t, t_0)]^{-1} = \mathcal{M}(t_0, t)$$

d'où :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}(t_0, t) & -\tilde{B}(t_0, t) \\ -\tilde{C}(t_0, t) & \tilde{A}(t_0, t) \end{pmatrix}} \quad (2.25)$$

$$\mathcal{M}(t, t') . \mathcal{M}(t', t_0) = \mathcal{M}(t, t_0)$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} A(t, t') . A(t', t_0) + B(t, t') . C(t', t_0) &= A(t, t_0) \\ A(t, t') . B(t', t_0) + B(t, t') . D(t', t_0) &= B(t, t_0) \\ C(t, t') . A(t', t_0) + D(t, t') . C(t', t_0) &= C(t, t_0) \\ C(t, t') . B(t', t_0) + D(t, t') . D(t', t_0) &= D(t, t_0) \end{aligned}} \quad (2.26)$$

- **Nullité de C :**

$$\boxed{\gamma = 0 \Leftrightarrow C = 0} \quad (2.27)$$

2.2.3 Exemples et cas particuliers

– **Cas libre :**

Dans ce cas, l'Hamiltonien H_{ext} précédent s'écrit simplement :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

d'où :

$$\boxed{M(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

et la solution des équations du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + (t - t_0) \frac{\vec{p}(t_0)}{m} \\ \vec{p}(t) &= \vec{p}(t_0) \end{aligned}$$

– **Gravité - ou accélération - simple :**

Dans ce cas H_{ext} s'écrit :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - m \vec{g}(t) \cdot \vec{r}$$

d'où :

$$M(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \vec{g}(t') \cdot (t - t') dt' \\ \int_{t_0}^t \vec{g}(t') dt' \end{pmatrix}} \quad (2.29)$$

ou encore, lorsque \vec{g} est indépendant du temps :

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g} (t - t_0)^2 / 2 \\ \vec{g} (t - t_0) \end{pmatrix}$$

– **Gradient de gravité ou d'accélération, potentiel harmonique :**

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{m}{2} \vec{r} \cdot \gamma \cdot \vec{r}$$

d'où (pour γ indépendant du temps) :

$$M(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] & \gamma^{-1/2} \sinh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] & \cosh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

où les sinus et cosinus hyperboliques sont définis par :

$$\begin{aligned} \cosh \left[\overset{\Rightarrow}{\gamma}^{1/2} T \right] &:= \sum_{i=0}^{\infty} \overset{\Rightarrow}{\gamma}^i \frac{T^{2i}}{(2i)!} \\ \sinh \left[\overset{\Rightarrow}{\gamma}^{1/2} T \right] &:= \sum_{i=0}^{\infty} \overset{\Rightarrow}{\gamma}^i \frac{T^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

Lorsqu'il y a un terme de gravité simple \vec{g} en plus, les matrices $ABCD$ précédentes sont inchangées mais les vecteurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$ deviennent :

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} (\cosh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] - 1) \vec{g} \\ \gamma^{-1/2} \sinh[\gamma^{1/2}(t - t_0)] \vec{g} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

– **Rotation :**

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{r} \cdot \alpha(t) \cdot \vec{p}$$

avec (voir fin de l'appendice A) :

$$\alpha(t) = i \vec{J} \cdot \vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z(t) & -\Omega_y(t) \\ -\Omega_z(t) & 0 & \Omega_x(t) \\ \Omega_y(t) & -\Omega_x(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où $\vec{\Omega}(t) = (\Omega_x(t), \Omega_y(t), \Omega_z(t))$ est le vecteur de rotation instantanée (dépendant du temps).

On a ainsi la relation suivante entre α et $\vec{\Omega}$:

$$\alpha \cdot \vec{u} = -\vec{\Omega} \times \vec{u} \quad \text{pour tout vecteur } \vec{u}$$

Les matrices $ABCD$ correspondantes sont :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(t, t_0) & (t - t_0) \cdot \mathcal{R}(t, t_0) \\ 0 & \mathcal{R}(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

où :

$$\mathcal{R}(t, t_0) := \mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t \alpha(t') dt'} \right) \quad (2.34)$$

est la matrice de rotation associée à $\vec{\Omega}(t)$.

Lorsque $\vec{\Omega}$ est constant, on peut exprimer $\mathcal{R}(t, t_0)$ de façon simple avec des cosinus et sinus (voir formule A.13 de l'appendice A). Par exemple, pour une rotation suivant l'axe z , ie pour $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, on obtient simplement :

$$\mathcal{R}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos[\Omega(t - t_0)] & \sin[\Omega(t - t_0)] & 0 \\ -\sin[\Omega(t - t_0)] & \cos[\Omega(t - t_0)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Hamiltonien indépendant du temps

Les expressions précédentes donnant 2.19 et 2.20 sont valides pour un Hamiltonien H_{ext} dépendant du temps (et au plus quadratique en position et impulsion). Cependant, dans beaucoup d'expériences d'interférométrie atomique, l'action des champs inertiels et gravitationnels sur les atomes peut être modélisée par à un Hamiltonien indépendant du temps.

C'est le cas, par exemple, des interféromètres atomiques posés sur le sol dans le but de mesurer les effets gravitationnel et inertiels terrestres (gyromètres du SYRTE à Paris [69], du IOQ à Hannovre [82] et celui du groupe de Kasevich à Yale [68] ; gravimètres du SYRTE [83], du LENS à Florence [67] et du groupe de Chu à Stanford [66] ; gradiomètre de Kasevich à Yale [65] ...) ou de s'en passer (horloges atomiques non-embarquées...). En effet, dans le référentiel lié à la terre - ie dans le référentiel usuel du laboratoire, ou encore dans celui où les faisceaux laser sont au repos (ce sont d'ailleurs les lasers qui définissent en fait ce référentiel) - les champs inertiels et gravitationnels terrestres sont indépendants du temps (en première approximation bien sûr).

Lorsque H_{ext} est indépendant du temps, les matrices $ABCD$ (et $\vec{\xi}$, $\vec{\phi}$) s'écrivent alors simplement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix}} = e^{\Gamma \cdot (t - t_0)} \quad (2.35)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix}} = \Gamma^{-1} (e^{\Gamma \cdot (t - t_0)} - 1) \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

en fonction de l'exponentielle de la matrice Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

L'inconvénient de ces solutions exactes est qu'elles s'expriment à l'aide de l'exponentielle d'une matrice 6×6 peu commode à manipuler. Il est donc intéressant d'examiner s'il est possible de calculer explicitement les différents termes des matrices $ABCD$. C'est le cas pour la matrice Γ , la théorie des matrices permettant précisément de montrer comment transformer l'exponentielle d'une matrice 6×6 en une matrice 6×6 d'exponentielles. La méthode est détaillée dans l'appendice D, où l'expression des éléments de matrices est fournie.

Souvent, seuls les premiers termes du développement de ces matrices $ABCD$ sont pertinents dans les calculs de déphasage. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de considérer les solutions analytiques de l'appendice D. Il suffit juste de développer l'exponentielle en puissances de $\Gamma \cdot (t - t_0)$, et de ne conserver que les puissances voulues de β , $\alpha \cdot (t - t_0)$ et $\gamma \cdot (t - t_0)^2$. Un tel développement de Taylor est donné dans l'appendice C.

– Ondes gravitationnelles

L'expression des éléments de $h_{\mu\nu}$ dans le cas des ondes gravitationnelles dépend fortement du choix du système de coordonnées.

Ainsi, dans le **système de coordonnées d'Einstein**, on obtient :

$$\vec{\beta}(t) = \vec{h}_E \cdot \cos(\omega_{GW} t + \phi) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}(t) = 0$$

où ω_{GW} est la fréquence des ondes gravitationnelles.

Des formules précédentes, on déduit alors - au premier ordre en \vec{h}_E [79] :

$$\begin{cases} A(t, t_0) = 1 \\ B(t, t_0) = t - t_0 + \frac{\vec{h}_E}{\omega_{GW}} \cdot [\sin(\omega_{GW} t + \phi) - \sin(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \\ C(t, t_0) = 0 \\ D(t, t_0) = 1 \end{cases}$$

Dans l'autre système de coordonnées usuel - celui de **Fermi** - on obtient par ailleurs :

$$\vec{\beta}(t) = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}(t) = \frac{\omega_{GW}^2}{2} \vec{h}_F \cos(\omega_{GW} t + \phi)$$

qui conduit à :

$$\begin{cases} A(t, t_0) = 1 - \frac{\omega_{GW} \vec{h}_F}{2} \sin(\omega_{GW} t_0 + \phi) \cdot (t - t_0) - \frac{\vec{h}_F}{2} \cdot [\cos(\omega_{GW} t + \phi) - \cos(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \\ B(t, t_0) = (t - t_0) \cdot \left[1 - \frac{\vec{h}_F}{2} \cdot [\cos(\omega_{GW} t + \phi) + \cos(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \right] \\ \quad + \frac{\vec{h}_F}{\omega_{GW}} \cdot [\sin(\omega_{GW} t + \phi) - \sin(\omega_{GW} t_0 + \phi)] + \frac{\vec{h}_F t_0}{2} \cdot [\cos(\omega_{GW} t + \phi) - \cos(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \\ C(t, t_0) = \frac{\vec{h}_F}{2\omega_{GW}} \cdot [\sin(\omega_{GW} t + \phi) - \sin(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \\ D(t, t_0) = 1 + \frac{\omega_{GW} \vec{h}_F}{2} \sin(\omega_{GW} t + \phi) \cdot (t - t_0) + \frac{\vec{h}_F}{2} \cdot [\cos(\omega_{GW} t + \phi) - \cos(\omega_{GW} t_0 + \phi)] \end{cases}$$

au premier ordre en \vec{h}_F .

2.2.4 Action et fonction principale de Hamilton

Les matrices $ABCD$ peuvent être obtenues de multiples façons, chacune d'elles correspondant à une approche différente de la mécanique classique. Ainsi, nous venons de voir comment les obtenir grâce aux équations de Hamilton, mais on peut également les obtenir en résolvant l'équation de Hamilton-Jacobi [58] :

$$\partial_t S + H_{ext} \left(\vec{r}, \vec{\nabla}_{\vec{r}} S, t \right) = 0 \quad (2.37)$$

Cette équation permet en effet d'avoir accès à la *fonction principale de Hamilton* [84] :

$$\boxed{S(\vec{r}, t, \vec{r}', t')}$$

qui vérifie :

$$\begin{aligned}\partial_t S + H_{ext}(\vec{r}, \vec{\nabla}_{\vec{r}} S, t) &= 0 \\ \partial_{t'} S - H_{ext}(\vec{r}', \vec{\nabla}_{\vec{r}'} S, t') &= 0\end{aligned}$$

et qui fait intervenir les matrices $ABCD$. Cette fonction particulière - plus connue sous le nom d'*action fonction des coordonnées* [85, 86] - se révélera d'une grande utilité dans la prochaine partie (*théorème ABCD*).

Le lien avec les matrices $ABCD$ est simple. Lorsque l'Hamiltonien H_{ext} est au plus quadratique en position et impulsion, cette fonction $S(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$ est également au plus quadratique en \vec{r} et \vec{r}' . En réécrivant alors les équations du mouvement :

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} S \quad \text{et} \quad \vec{p}' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} S$$

sous la forme " $(\vec{r}, \vec{p}) = \text{fonction}(\vec{r}', \vec{p}')$ ", on fait apparaître trois coefficients matriciels qu'on note A , B et D , et que l'on complète en définissant une matrice C , vérifiant la relation d'unitarité : $C := DB^{-1}A - \widetilde{B^{-1}}$.

Finalement, pour l'Hamiltonien que l'on considère, on obtient :

$$\boxed{S(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{m}{2} \left[(r - \xi) DB^{-1} (r - \xi) - 2(r - \xi) \widetilde{B^{-1}} r' + r' B^{-1} A r' \right] + m\phi(r - \xi) + \frac{m}{2} \int_{t'}^t dt'' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi)} \quad (2.38)$$

où on a supprimé les flèches sur les vecteurs pour une meilleure lisibilité.

Comme on l'a déjà dit, cette fonction principale de Hamilton est égale à l'action fonction de ses coordonnées, et il en **résulte un lien très fort entre l'action classique S_{cl} et cette fonction $S(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$** :

$$\boxed{S_{cl}(t, t_0) = S_{cl}(t, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0) = S(\vec{r}_{cl}(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0), t, \vec{r}_0, t_0)} \quad (2.39)$$

où $\vec{r}_{cl}(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ est le vecteur position évolué classiquement de t_0 à t (en partant de (\vec{r}_0, \vec{p}_0) à t_0) :

$$\vec{r}_{cl}(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0) = A(t, t_0) \vec{r}_0 + B(t, t_0) \vec{p}_0/m + \vec{\xi}(t, t_0)$$

On obtient par conséquent l'expression de l'action classique pour un tel Hamiltonien H_{ext} :

$$\boxed{S_{cl}(t, t_0) = \frac{m}{2} \left[r_0 \tilde{A} C r_0 + \frac{p_0}{m} \tilde{B} D \frac{p_0}{m} + 2r_0 \tilde{C} B \frac{p_0}{m} \right] + m\phi(Ar_0 + B\frac{p_0}{m}) + \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi)} \quad (2.40)$$

On peut alors écrire cette action classique sous une forme différente en faisant apparaître les deux **points finaux** :

$$(\vec{r}_0, \vec{p}_0) \quad \text{et} \quad (\vec{r}_1, \vec{p}_1) := (\vec{r}_{cl}(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0), \vec{p}_{cl}(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0))$$

En effet, on montre facilement que :

$$\vec{r}_0 \cdot \tilde{AC} \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}_0}{m} \cdot \tilde{BD} \frac{\vec{p}_0}{m} + 2\vec{r}_0 \cdot \tilde{CB} \frac{\vec{p}_0}{m} = \vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m} - \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{\phi}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{\xi}_1 \cdot \vec{\phi}_1$$

avec la notation :

$$\vec{\xi}_1 := \vec{\xi}(t, t_0) \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_1 := \vec{\phi}(t, t_0)$$

d'où :

$$\begin{aligned} S_{cl}(t, t_0)/m &= \frac{1}{2} \left(\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m} \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{\phi}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^t dt' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi) - \vec{\xi}_1 \cdot \vec{\phi}_1 \right] \end{aligned}$$

Mais on peut aussi montrer que :

$$\int_{t_0}^t dt' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi) - \vec{\xi}_1 \cdot \vec{\phi}_1 = \int_{t_0}^t dt' (g\xi - f\phi)$$

car :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\xi}_1 \cdot \vec{\phi}_1) = \phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + g\xi + f\phi$$

Par conséquent, on obtient l'expression suivante pour $S_{cl}(t, t_0)/m$:

$$S_{cl}(t, t_0)/m = \frac{1}{2} \vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} - \frac{1}{2} \vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m} + \frac{1}{2} \vec{\phi}_1 \cdot \vec{r}_1 - \frac{1}{2} \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left(\vec{g}(t') \cdot \vec{\xi}(t') - \vec{f}(t') \cdot \vec{\phi}(t') \right)$$

(2.41)

qui se révèlera très utile pour établir le théorème des quatre points finaux (voir partie 4.2.2).

2.3 Evolution temporelle des paquets d'ondes atomiques

2.3.1 Equation d'évolution et propagateur

On aimerait maintenant savoir comment évolue un atome (ou plutôt la *fonction d'onde* associée à cet atome) en présence des potentiels décrits dans l'Hamiltonien extérieur H_{ext} . Pour cela, il faut résoudre l'équation de Schrödinger suivante :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) |\psi(t)\rangle} \quad (2.42)$$

où $H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t)$ est obtenu à partir de l'Hamiltonien classique $H_{ext}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ par le principe de correspondance usuel :

$$\boxed{H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) := \frac{\vec{p}_{op} \cdot \beta(t) \cdot \vec{p}_{op}}{2m} - \vec{r}_{op} \cdot \frac{\alpha(t)}{2} \cdot \vec{p}_{op} + \vec{p}_{op} \cdot \frac{\alpha(t)}{2} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \gamma(t) \cdot \vec{r}_{op} - m \vec{g}(t) \cdot \vec{r}_{op} + \vec{f}(t) \cdot \vec{p}_{op}} \quad (2.43)$$

en n'oubliant pas de symétriser correctement le terme $\vec{r} \cdot \alpha(t) \cdot \vec{p}$ afin de garantir l'hermiticité de $H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t)$ (que l'on pourra aussi noter simplement H_{ext} par la suite). Nous allons voir que les matrices ABCD calculées dans la partie précédente ont alors un rôle très important dans la solution.

Mais avant d'aller plus loin, nous allons changer de point de vue en considérant l'équation de Schrödinger non pas sur le ket $|\psi\rangle$, mais sur l'opérateur d'évolution U :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U = H_{ext} U \quad (2.44)$$

où $U(t, t_0)$ est défini par :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.45)$$

et vaut :

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left(\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt' \right] \right) \quad (2.46)$$

avec l'aide de l'opérateur \mathcal{T} de Dyson (voir appendice A).

En représentation position, cet opérateur d'évolution devient ce que l'on appelle un *propagateur* :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}' \rangle \quad (2.47)$$

qui permet de relier les *fonctions d'ondes* initiale (à l'instant t_0) et évoluée (à l'instant t) :

$$\boxed{\langle \vec{r} | \psi(t) \rangle = \psi(\vec{r}, t) = \int d^3 \vec{r}' K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) \cdot \psi(\vec{r}', t_0)} \quad (2.48)$$

Le propagateur est donc un outil précieux pour savoir comment évolue un *paquet d'ondes atomique* quelconque. Il reste maintenant à connaître l'expression de ce propagateur pour un tel Hamiltonien H_{ext} au plus quadratique en position et impulsion.

Son expression, en fait assez simple, va nous amener à comprendre pourquoi on a introduit et calculé la fonction principale de Hamilton. En effet, il existe une propriété, démontrée par Van Vleck

en 1928 [87], et plus récemment par Bordé [51, 58], qui lie le propagateur à la fonction principale de Hamilton (dans le cas d'un tel Hamiltonien) :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)\right] \quad (2.49)$$

Ce propagateur peut être construit par application d'une suite de transformations unitaires [35] - sur le ket de l'équation initiale par exemple - afin d'éliminer pas à pas les différents termes de H_{ext} . Il peut également être obtenu dans le cadre de la *théorie des opérateurs intégrale première*, comme cela sera fait dans la partie 2.4.

Maintenant que l'on connaît la forme du propagateur (fonction Gaussienne en \vec{r} et \vec{r}'), reste à savoir comment effectuer l'intégration spatiale permettant de passer du paquet d'ondes au temps t_0 à celui évolué au temps $t > t_0$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \int d^3\vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)} \cdot \psi(\vec{r}', t_0) \quad (2.50)$$

C'est précisément le but du paragraphe suivant.

2.3.2 Paquets d'ondes atomiques et fonction génératrice

On ne sait pas, dans le cas général, comment réaliser l'intégration spatiale :

$$\int d^3\vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)} \cdot \psi(\vec{r}', t_0)$$

où $\psi(\vec{r}', t_0)$ est une fonction de \vec{r}' quelconque. On peut néanmoins chercher à décomposer ce $\psi(\vec{r}', t_0)$ sur une base de l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes où, pour chaque élément de cette base, on sait effectuer l'intégration précédente.

Il existe de nombreuses bases de l'espace des fonctions d'ondes qui remplissent cette condition (par exemple celles du type "Gaussienne \times Polynômes orthogonaux du type Legendre, Laguerre, Hermite..."), mais nous utiliserons ici uniquement la base complète des modes Hermito-Gaussiens (à trois dimensions). Cette base de fonctions, dont les éléments sont du type :

$$\text{Gaussienne} \times \text{Polynôme d'Hermite 3D d'ordre } n$$

et qui est très utilisée en optique Gaussienne, présente également plusieurs avantages en optique atomique :

- i. comme on vient de le dire, les modes Hermito-Gaussiens forment une base complète de l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes.
- ii. les modes Gaussiens ont une forme proche de beaucoup de paquets d'ondes atomiques réels, et le produit de ces Gaussiennes par des polynômes d'Hermite rend bien compte de leur écart à une pure Gaussienne. Les modes Hermito-Gaussiens peuvent être ainsi vus comme une des généralisations les plus naturelles des Gaussiennes usuelles.

Soulignons que notre objectif est d'obtenir une description proche de la réalité expérimentale, et donc d'utiliser une base de fonctions "plus physiques" que la pseudo-base des ondes planes. Néanmoins, les calculs en interférométrie atomique peuvent être menés avec des ondes "quasi-planes" :

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}\vec{0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

ie des ondes planes munies d'un centre fictif .

Enfin, il existe un lien très fort entre un propagateur et les ondes planes, comme cela sera montré dans la partie 2.4.

- iii. le théorème ABCD du paragraphe suivant s'applique non-seulement aux modes Gaussiens, mais également à tout mode Hermito-Gaussien.
- iv. la fonction génératrice de ces modes Hermito-Gaussiens est simple : c'est une Gaussienne (à une dimension comme à trois dimensions).

Le dernier point est très important car dans la suite de ce mémoire nous utiliserons à diverses reprises cette notion de *fonction génératrice*. Rappelons donc en quoi consiste cette méthode.

Une fonction génératrice est en fait une fonction dépendant d'un ou plusieurs paramètres, pouvant être développée sous forme d'une somme dont chaque terme dépend de façon unique de ces paramètres, par exemple sous forme d'une puissance particulière des paramètres :

$$F_{\text{généré}}(\vec{\alpha}) = \sum_{l,m,n} f_{lmn} \cdot \alpha_x^l \cdot \alpha_y^m \cdot \alpha_z^n$$

Chacun de ces termes est donc repérable de façon univoque dans le développement, d'où le nom de fonction "génératrice".

Maintenant, si on applique un opérateur à cette fonction génératrice, et que cet opérateur est linéaire, alors on connaîtra l'action de cet opérateur sur chacun des termes du développement précédent :

$$\begin{aligned} Op[F_{\text{généré}}(\vec{\alpha})] &= \sum_{l,m,n} g_{lmn} \cdot \alpha_x^l \cdot \alpha_y^m \cdot \alpha_z^n \\ &= \sum_{l,m,n} Op[f_{lmn}] \cdot \alpha_x^l \cdot \alpha_y^m \cdot \alpha_z^n \\ \implies Op[f_{lmn}] &= g_{lmn} \end{aligned}$$

Si ces termes sont les éléments d'une base d'un certain espace (un espace de fonctions par exemple), alors connaître l'action d'un opérateur linéaire sur la fonction génératrice reviendra à connaître l'action de cet opérateur sur chaque élément de la base, et donc, par combinaisons linéaires, sur tout élément de l'espace.

Dans notre cas, la fonction génératrice Gaussienne $F_{\text{généré}}$ "génère" les *modes Hermito-Gaussiens* (à 3D) qui forment une base complète de l'espace des fonctions d'ondes :

$$F_{\text{généré}}(\vec{r}; X, Y, Z, \vec{\alpha}) := \exp\left(\vec{r} \frac{X}{2} \vec{r} + i \vec{r} Y \vec{\alpha} + \vec{\alpha} \frac{Z}{2} \vec{\alpha}\right) = e^{\vec{r} \frac{X}{2} \vec{r}} \cdot \sum_{l,m,n} i^{l+m+n} \cdot \alpha_x^l \cdot \alpha_y^m \cdot \alpha_z^n \cdot \mathcal{H}_{lmn}\left(\vec{Y} \vec{r}, -\frac{Z}{2}\right) \quad (2.51)$$

Bilan : en connaissant l'action du propagateur sur une telle Gaussienne, on connaîtra son action sur n'importe quel mode Hermito-Gaussien, et donc, par combinaisons linéaires, sur toute fonction d'onde.

La définition des polynômes d'Hermite à 3 dimensions diffère selon les auteurs [88]. La façon la plus simple de les introduire est alors de les définir comme on vient de le faire, ie à partir d'une fonction génératrice Gaussienne (avec coefficients matriciels 3D). Les polynômes d'Hermite ainsi obtenus sont faciles à manipuler, mais en contre-partie certaines difficultés apparaissent. Par exemple, le terme \mathcal{H}_{lmn} dépend de ses indices l, m, n d'une façon beaucoup plus complexe que les polynômes d'Hermite à 1D (\mathcal{H}_n ne dépendant que de l'unique indice n). En ce sens, les \mathcal{H}_{lmn} définis précédemment ont une expression très différente de celle qui est usuellement utilisée pour les polynômes d'Hermite à une dimension.

Par la suite, nous prendrons donc, pour $\psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0)$, une Gaussienne (avec coefficients matriciels 3×3 complexes) du type :

$$\mathcal{G}_{\vec{\alpha}}(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0) := \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\vec{r}' - \vec{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\vec{r}' - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \left(\vec{p}_0 - 2\hbar \widetilde{X_0^{-1} \vec{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \vec{\alpha} X_0^{-1} Z_0 \vec{\alpha} \right] \quad (2.52)$$

ou encore plus simplement le paquet d'ondes suivant :

$$\psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\vec{r}' - \vec{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\vec{r}' - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0 \right] \quad (2.53)$$

en sous entendant les termes constants $-2\hbar \widetilde{X_0^{-1} \vec{\alpha}}$ et $\frac{1}{2} \vec{\alpha} X_0^{-1} Z_0 \vec{\alpha}$ dans l'exponentielle, et où le sens physique des matrices X_0 et Y_0 sera précisé au paragraphe suivant.

Pour une telle fonction d'onde initiale, on peut alors facilement effectuer l'intégration suivante :

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \int d^3 \vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)} \cdot \psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0)$$

et ainsi avoir accès à la *solution générale* $\psi(\vec{r}, t)$ (c'est le but du théorème *ABCD*).

Remarque sur la forme de la solution générale :

Avant que le théorème *ABCD* ne nous donne l'expression complète de la solution générale $\psi(\vec{r}, t)$, on peut déjà savoir quelle sera sa forme. Nous allons voir d'ailleurs qu'elle a la même forme que le propagateur, ou, dit autrement, que *le propagateur est la fonction génératrice d'une base de fonction de l'espace de Hilbert*.

On sait en effet que l'action d'un propagateur sur un paquet d'ondes ayant la même forme que lui redonne un autre propagateur :

$$\int d^3 \vec{r}' K(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \cdot K(\vec{r}', t', \vec{r}_0, t_0) = K(\vec{r}, t, \vec{r}_0, t_0) \quad (2.54)$$

Cette propriété, qui résulte simplement de la structure de groupe des opérateurs d'évolution :

$$U(t, t') U(t', t_0) = U(t, t_0) \quad (2.55)$$

exprime également le fait que tout propagateur est solution de l'équation de Schrödinger correspondante.

Ainsi, si on arrive à mettre $\psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0)$ sous une forme analogue à celle du propagateur, on saura que la solution générale a précisément la forme de ce propagateur.

Or on vient justement de voir que $\psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0)$ et le propagateur avaient la même forme Gaussienne. On peut donc affirmer, avant tout calcul, que la solution générale

$$\psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \int d^3 \vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)} \cdot \psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0)$$

a la même forme (Gaussienne) que le propagateur.

2.3.3 Notation des paquets d'ondes atomiques

Comme nous venons de le dire, nous utiliserons par la suite, à de nombreuses reprises, la méthode de la fonction génératrice, en considérant l'évolution non pas d'un paquet d'ondes atomique quelconque, mais celle d'un paquet d'ondes atomique Gaussien :

$$\boxed{\psi(\vec{r}', t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar}(\vec{r}' - \vec{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\vec{r}' - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0}} \quad (2.56)$$

Précisons alors le sens des paramètres matriciels X_0 et Y_0 de cette fonction d'onde (les autres paramètres \vec{r}_0 et \vec{p}_0 s'interprètent comme les *position et impulsion centrales* - ou *moyennes* - de ce paquet d'ondes).

Ces matrices X_0 et Y_0 (matrices 3×3 à coefficients complexes) ont été introduites par analogie avec celles qui sont utilisées en optique Gaussienne. Ainsi, de la même façon que l'on peut définir un rayon de courbure complexe en optique pour décrire la structure d'un faisceau laser, on peut définir pour les paquets d'ondes atomiques des *largeurs matricielles complexes en position et impulsion*.

Ces matrices X_0 et Y_0 peuvent alors être reliées simplement aux largeurs en position et impulsion usuelles. Par exemple, pour un paquet d'ondes minimal à une dimension, on a :

$$\begin{aligned} iX_0 &= \Delta z & : \text{largeur initiale en position} \\ mY_0 &= \frac{\hbar}{\Delta z} & : \text{largeur initiale en impulsion} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{im}{2\hbar}Y_0X_0^{-1} = -\frac{1}{2\Delta z^2}$$

De plus, nous verrons au paragraphe suivant que ces largeurs complexes évoluent selon la même loi *ABCD* que les centres du paquet d'ondes :

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t)X_0 + B(t)Y_0 \\ Y(t) &= C(t)X_0 + D(t)Y_0 \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas libre, on retrouve la relation usuelle d'étalement des paquets d'ondes atomiques :

$$\frac{im}{2\hbar}Y(t)X(t)^{-1} = \frac{im}{2\hbar}Y_0(X_0 + Y_0 * t)^{-1} = -\frac{1}{2\Delta z^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{i\hbar}{m\Delta z^2}t\right)}$$

Même à trois dimensions, il est ainsi aisé de passer des matrices X et Y aux largeurs habituelles de l'espace des phases. Cependant, le passage inverse est délicat, car il faut pour cela définir préalablement des *matrices de largeurs réelles* en position et impulsion, pour ensuite les relier aux matrices complexes X et Y .

On peut en fait définir de telles matrices de largeurs réelles de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_{rr} &: = \left\langle \vec{r}_{op} \vec{\widetilde{r}}_{op} \right\rangle - \langle \vec{r}_{op} \rangle \cdot \langle \vec{\widetilde{r}}_{op} \rangle \\ m^2 \vec{\Delta}_{vv} &: = \left\langle \vec{p}_{op} \vec{\widetilde{p}}_{op} \right\rangle - \langle \vec{p}_{op} \rangle \cdot \langle \vec{\widetilde{p}}_{op} \rangle \\ m \vec{\Delta}_{rv} &: = \left\langle \vec{r}_{op} \vec{\widetilde{p}}_{op} \right\rangle - \langle \vec{r}_{op} \rangle \cdot \langle \vec{\widetilde{p}}_{op} \rangle \\ m \vec{\Delta}_{vr} &: = \left\langle \vec{p}_{op} \vec{\widetilde{r}}_{op} \right\rangle - \langle \vec{p}_{op} \rangle \cdot \langle \vec{\widetilde{r}}_{op} \rangle \end{aligned} \quad (2.57)$$

où le signe $\langle \rangle$ désigne la moyenne atomique sur le ket $|\psi\rangle$:

$$\langle \vec{r}_{op} \rangle := \langle \psi | \vec{r}_{op} | \psi \rangle$$

et où l'on a défini quatre opérateurs (attention à la place de la transposition) :

$$\vec{r}_{op} \quad \widetilde{\vec{r}_{op}} \quad \vec{p}_{op} \quad \widetilde{\vec{p}_{op}} \quad \vec{r}_{op} \quad \widetilde{\vec{p}_{op}} \quad \vec{p}_{op} \quad \widetilde{\vec{r}_{op}}$$

Par exemple, $\vec{\Delta}_{rr}$ s'écrit en fonction des largeurs à 1D usuelles :

$$\vec{\Delta}_{rr} = \begin{pmatrix} \langle x_{op}^2 \rangle - \langle x_{op} \rangle^2 & \langle x_{op} y_{op} \rangle - \langle x_{op} \rangle \cdot \langle y_{op} \rangle & \langle x_{op} z_{op} \rangle - \langle x_{op} \rangle \cdot \langle z_{op} \rangle \\ \langle x_{op} y_{op} \rangle - \langle x_{op} \rangle \cdot \langle y_{op} \rangle & \langle y_{op}^2 \rangle - \langle y_{op} \rangle^2 & \langle y_{op} z_{op} \rangle - \langle y_{op} \rangle \cdot \langle z_{op} \rangle \\ \langle x_{op} z_{op} \rangle - \langle x_{op} \rangle \cdot \langle z_{op} \rangle & \langle y_{op} z_{op} \rangle - \langle y_{op} \rangle \cdot \langle z_{op} \rangle & \langle z_{op}^2 \rangle - \langle z_{op} \rangle^2 \end{pmatrix}$$

L'équation d'évolution de ces matrices est simple :

$$\frac{dV}{dt} = \Gamma V + V \Gamma \quad (2.58)$$

où :

$$V := \begin{pmatrix} \vec{\Delta}_{rr} & \vec{\Delta}_{rv} \\ \vec{\Delta}_{vr} & \vec{\Delta}_{vv} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

et où Γ est la matrice déjà rencontrée lors de l'étude des matrices ABCD :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Cette équation s'intègre en (voir appendice A) :

$$V(t) = \mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} dt'} \right) \cdot V(t_0) \cdot \mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t \widetilde{\begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix}} dt'} \right)$$

ie :

$$V(t) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot V(t_0) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{A(t, t_0)} & \widetilde{B(t, t_0)} \\ \widetilde{C(t, t_0)} & \widetilde{D(t, t_0)} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Le problème est alors de déterminer deux matrices complexes X_0 et Y_0 telles que :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0^* & Y_0^* \end{pmatrix} = V(t_0) \quad (2.61)$$

car alors on pourrait écrire :

$$V(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t)^* & Y(t)^* \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

et le lien entre les matrices de largeurs réelles précédentes et les matrices X et Y serait univoque.

A 1D, ce lien est simple à construire (une seule phase à choisir), mais à 3D, il n'a pas encore été réalisé du fait du nombre très important de phases relatives à choisir et d'équations à résoudre.

Bilan sur la notation : Nous considérerons donc par la suite des paquets d'ondes Gaussiens du type :

$$\frac{1}{\sqrt{\det(X)}} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_c) Y X^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_c) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot \vec{p}_c} \quad (2.64)$$

ie centrés en \vec{r}_c et \vec{p}_c , et ayant X et Y comme largeurs complexes en position et impulsion.

2.3.4 Théorème ABCD

Cette propriété, démontrée par Bordé en 2001 [58] - dont une autre démonstration sera donnée dans la partie suivante - précise comment évolue temporellement un paquet d'ondes atomique de forme Gaussienne (et même de forme Hermito-Gaussienne) pour un Hamiltonien H_{ext} au plus quadratique en position et impulsion.

Ce théorème montre plus particulièrement que le lien entre un tel paquet d'ondes à l'instant t_0 et le paquet d'ondes évolué à l'instant $t_1 > t_0$ dépend uniquement des matrices $ABCD$ calculées (classiquement) auparavant.

Ainsi, pour un paquet d'ondes initial $wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)$ centré en (\vec{r}_0, \vec{p}_0) et ayant X_0 et Y_0 comme largeurs complexes :

$$\psi(\vec{r}, t_0) = wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\vec{r}-\vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0}$$

on obtient au temps $t_1 > t_0$ le paquet d'ondes suivant :

$$\boxed{\psi(\vec{r}, t_1) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)} wp(\vec{r}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1)} \quad (2.65)$$

ie un paquet d'ondes ayant la même structure qu'au temps t_0 , auquel on a ajouté une phase $S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)/\hbar$ - qui n'est rien d'autre que l'action classique entre t_0 et t_1 - et dont les nouveaux paramètres $\vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1$ sont reliés à ceux au temps t_0 par la loi $ABCD$ classique :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t_1, t_0) & B(t_1, t_0) \\ C(t_1, t_0) & D(t_1, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t_1, t_0) \\ \vec{\phi}(t_1, t_0) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t_1, t_0) & B(t_1, t_0) \\ C(t_1, t_0) & D(t_1, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Trois points méritent alors d'être soulignés :

1. le paquet d'ondes évolué a la *même forme* que le paquet d'ondes initial,
2. les largeurs complexes obéissent à une *loi linéaire du type ABCD*,
3. cette loi $ABCD$ est *la même* que celle qui régit l'évolution des centres en position et impulsion.

A la lumière du théorème d'Ehrenfest, ce résultat n'a rien de surprenant pour un tel Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion, et le théorème $ABCD$ peut être vu simplement comme une généralisation du théorème d'Ehrenfest pour les largeurs de paquets d'ondes.

Illustrons ce théorème $ABCD$ dans le cas libre.

Exemple du cas libre :

Dans ce cas, les matrices $ABCD$ s'écrivent :

$$A = D = 1 \quad C = 0 \quad B = t_1 - t_0$$

d'où :

$$\begin{cases} X_1 = X_0 + Y_0 \cdot (t_1 - t_0) \\ Y_1 = Y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (t_1 - t_0) \cdot \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 = \vec{p}_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{\vec{p}_0^2}{2m} (t_1 - t_0)$$

et on retrouve bien l'évolution usuelle d'un tel paquet d'ondes atomique :

$$\psi(\vec{r}, t_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0 + Y_0 \cdot (t_1 - t_0))}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\vec{p}_0^2}{2m} (t_1 - t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_0 X_0^{-1} [1 + Y_0 X_0^{-1} (t_1 - t_0)] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + i(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{p}_1}$$

Théorème ABCD en représentation $|\vec{p}\rangle$:

Il est intéressant de transposer les résultats obtenus ci-dessus en représentation position $|\vec{r}\rangle$, dans l'autre représentation canonique, ie la représentation impulsion $|\vec{p}\rangle$. On peut en effet montrer que le passage d'une représentation à l'autre s'effectue de la façon suivante (en utilisant les résultats de l'appendice A) :

Si le ket $|\psi(t_0)\rangle$ s'écrit en représentation position :

$$\psi(\vec{r}, t_0) := \langle \vec{r} | \psi(t_0) \rangle = wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_0) + i(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0}$$

alors il devient en représentation impulsion :

$$\boxed{\psi(\vec{p}, t_0) := \langle \vec{p} | \psi(t_0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{m \det(Y_0)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} \vec{r}_0 \cdot \vec{p}}} \quad (2.68)$$

et réciproquement.

Le théorème ABCD en représentation impulsion s'écrit par conséquent :

Pour un paquet d'ondes *impulsionnel* initial $wp(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)$ centré en (\vec{r}_0, \vec{p}_0) et ayant X_0 et Y_0 comme largeurs complexes :

$$\psi(\vec{p}, t_0) = wp(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) = \frac{1}{\sqrt{m \det(Y_0)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} \vec{r}_0 \cdot \vec{p}}$$

on obtient au temps $t_1 > t_0$ le paquet d'ondes impulsionnel suivant :

$$\boxed{\psi(\vec{p}, t_1) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)} wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1)} \quad (2.69)$$

ie un paquet d'ondes ayant la même structure impulsionnelle qu'au temps t_0 , auquel on a ajouté une phase $S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)/\hbar$ - qui n'est rien d'autre que l'action classique entre t_0 et t_1 - et dont les nouveaux paramètres $\vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1$ sont reliés à ceux au temps t_0 par la loi *ABCD* classique.

2.4 Théorie des Opérateurs Intégrales Premières

Dans cette partie, nous allons montrer comment l'utilisation des opérateurs intégrales premières permet de démontrer très simplement le théorème ABCD, tout en donnant une plus vaste perspective au problème de l'évolution des paquets d'ondes atomiques.

2.4.1 Introduction

Il y a de nombreuses façons de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) |\psi(t)\rangle \quad (2.70)$$

Si l'Hamiltonien H_{ext} est suffisamment simple - par exemple lorsqu'il ne dépend que d'un seul opérateur indépendant du temps - on peut choisir une représentation adaptée (par exemple la représentation $|\vec{p}\rangle$ dans le cas libre, ie lorsque $H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) = \vec{p}_{op}^2/2m$) et transformer l'équation précédente en une équation différentielle ordinaire. On peut alors résoudre cette équation différentielle temporelle de diverses façons (solutions exactes, développements du type Magnus ou autres... voir partie 3.4) et exprimer ainsi analytiquement la solution $|\psi(t)\rangle$.

On peut également chercher à transformer - à l'aide de transformations unitaires - l'équation de Schrödinger en une autre équation plus simple à résoudre. En ce sens, on peut toujours intégrer formellement l'équation précédente sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{T} \left(\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt' \right] \right) |\psi(t_0)\rangle$$

où \mathcal{T} est l'opérateur de Dyson (voir appendice A). Reste alors à obtenir une expression analytique pour cet opérateur d'évolution :

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt'} \right)$$

qui n'est rien d'autre que le propagateur lorsque l'on se place en représentation position :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}' \rangle$$

Dans le cas d'un Hamiltonien au plus quadratique (en position et impulsion), on peut alors exprimer simplement ce propagateur, comme on l'a vu dans les paragraphes précédents (par une méthode directe [87, 51] ou par une construction pas à pas en éliminant les différents termes de H_{ext} par des transformations unitaires [35]).

En dehors de ces méthodes qui s'appuient essentiellement sur la résolution directe de l'équation de Schrödinger, il existe une méthode peu connue - ou en tous cas peu utilisée ⁴ - qui est extrêmement puissante pour résoudre cette équation : il s'agit de la théorie des opérateurs intégrales premières [89].

Inspirée des résultats de mécanique classique au sujet des intégrales premières, cette méthode va nous permettre non seulement de simplifier considérablement la recherche de solutions de 2.70, mais également de mettre en évidence des concepts importants, comme celui d'invariant symplectique, donnant ainsi la possibilité de dégager une méthode générale de résolution de l'équation de Schrödinger pour des Hamiltoniens plus que quadratiques.

⁴La théorie des opérateurs intégrales premières est très utilisée en mécanique quantique dans l'étude du moment cinétique orbital, où l'ECOC (H, \vec{L}^2, L_z) de trois opérateurs intégrales premières (de complexité croissante) permet de déterminer les bons nombres quantiques (n, l, m) de la solution de l'équation de Schrödinger. Cette méthode est également utilisée pour établir le théorème d'Ehrenfest concernant l'évolution des position et impulsion moyennes (voir ci-après), ainsi que leur lien avec les résultats classiques.

Signalons qu'une méthode proche de celle-ci a été développée par Omote et Kamefuchi [90, 91]. Ils n'utilisent pas le terme "opérateur intégrale première", mais parlent de "description de Hamilton-Jacobi". Leur formalisme s'appuie sur la description de Heisenberg, et consiste également à chercher des quantités invariantes classiquement, dont l'équivalent quantique permet de résoudre une équation de Schrödinger dépendant du temps (le lien entre la description de Heisenberg et la théorie des opérateurs intégrales premières sera précisé plus loin).

Nous allons donc d'abord rappeler ce que sont les opérateurs intégrales premières et quel est leur intérêt principal. Ensuite, nous verrons comment obtenir toute une famille d'opérateurs intégrales premières dans le cas d'un Hamiltonien quelconque. Nous insisterons en particulier sur l'un de ces opérateurs - le plus simple - dont les valeurs propres sont intimement liées au concept d'invariant symplectique, et dont les vecteurs propres - dans le cas d'un Hamiltonien au plus quadratique - permettent de démontrer avec très peu de calculs le théorème ABCD. Enfin, nous montrerons comment le propagateur peut être vu comme un cas particulier du résultat précédent, et nous ferons le lien avec les opérateurs de création-annihilation introduits dans [51] et [35].

2.4.2 Définition et intérêt des opérateurs intégrales premières

Par définition, un opérateur intégrale première est un opérateur $I(t)$ qui vérifie l'équation suivante :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} = [H_{ext}, I]} = H_{ext} I - I H_{ext} \quad (2.71)$$

où H_{ext} est un Hamiltonien *quelconque*.

On peut alors facilement démontrer les deux propriétés fondamentales suivantes (où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution usuel, solution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien H_{ext}), qui établissent que :

*les solutions de l'équation de Schrödinger sont les vecteurs propres des opérateurs intégrales premières,
et réciproquement.*

(par souci de simplicité, on suppose dans toute cette partie que les valeurs propres considérées ne sont pas dégénérées)

Propriété 1 :

*Si $I(t)$ est un opérateur intégrale première,
et si $|\varphi_0\rangle$ est vecteur propre de $I_0 = I(t_0)$ pour la valeur propre e_0 au temps t_0 ,
alors $|\varphi(t)\rangle = U(t, t_0) |\varphi_0\rangle$ est vecteur propre de $I(t)$ pour la même valeur propre e_0 .*

Preuve. Si :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} = [H_{ext}, I] \\ I_0 |\varphi_0\rangle = e_0 \cdot |\varphi_0\rangle \\ |\varphi(t)\rangle = U(t, t_0) |\varphi_0\rangle \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\varphi(t)\rangle) &= i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi(t)\rangle + I i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle \\ &= (H_{ext} I - I H_{ext}) |\varphi(t)\rangle + I i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle \\ &= H_{ext} (I |\varphi(t)\rangle) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 I |\varphi(t)\rangle &= (I |\varphi\rangle)(t) = U(t, t_0) (I |\varphi\rangle)(t_0) = U(t, t_0) I_0 |\varphi_0\rangle \\
 &= U(t, t_0) e_0 \cdot |\varphi_0\rangle = e_0 \cdot U(t, t_0) |\varphi_0\rangle \\
 &= e_0 \cdot |\varphi(t)\rangle
 \end{aligned}$$

■

Propriété 2 :

Réciproquement,
si $I(t)$ est un opérateur intégrale première,
et si, pour tout t , $|\varphi(t)\rangle$ est vecteur propre de $I(t)$ pour la valeur propre e_0 ,
où e_0 est indépendante du temps,
alors $|\varphi(t)\rangle$ obéit à l'équation de Schrödinger.

Preuve. Si :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} = [H_{ext}, I] \\ I |\varphi(t)\rangle = e_0 \cdot |\varphi(t)\rangle \\ \frac{de_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

alors :

$$\begin{aligned}
 e_0 \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\varphi(t)\rangle) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e_0 \cdot |\varphi(t)\rangle) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\varphi(t)\rangle) = i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\varphi(t)\rangle + I i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle \\
 &= (H_{ext} I - I H_{ext}) |\varphi(t)\rangle + I i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle \\
 &= H_{ext} I |\varphi(t)\rangle + I \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle - H_{ext} |\varphi(t)\rangle \right) \\
 &= H_{ext} e_0 \cdot |\varphi(t)\rangle + I \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle - H_{ext} |\varphi(t)\rangle \right)
 \end{aligned}$$

ie :

$$e_0 \cdot \left(i\hbar \frac{d}{dt} (|\varphi(t)\rangle) - H_{ext} |\varphi(t)\rangle \right) = I \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle - H_{ext} |\varphi(t)\rangle \right)$$

et par conséquent $i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle - H_{ext} |\varphi(t)\rangle$ est proportionnel au ket $|\varphi(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle - H_{ext} |\varphi(t)\rangle = \alpha \cdot |\varphi(t)\rangle$$

avec α une constante indépendante du temps.

Comme H_{ext} est défini à une constante près (ou que $|\varphi(t)\rangle$ est définie à une phase constante près), on obtient finalement :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = H_{ext} |\varphi(t)\rangle$$

■

Ces propriétés montrent le grand intérêt de connaître des opérateurs intégrales premières. En effet, les équations aux valeurs propres de ces opérateurs sont souvent plus simples à résoudre que l'équation de Schrödinger. On peut donc commencer par résoudre une de ces équations aux valeurs propres, pour ensuite reporter les solutions trouvées dans l'équation de Schrödinger initiale, et ainsi achever de déterminer $|\varphi(t)\rangle$.

Les équations aux valeurs propres des opérateurs intégrales premières ne déterminent en effet la fonction d'onde solution qu'à une phase (dépendant du temps) près, et il faut donc reporter cette fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger afin de déterminer ce facteur de phase (égal à $S_{cl}(t, t_0)/\hbar$ dans le cadre du théorème ABCD). Cela prendra plus de sens dans les paragraphes suivants.

En outre, lorsque l'on connaît un opérateur intégrale première $I(t)$ et que l'on cherche à résoudre l'équation de Schrödinger précédente pour un ket initial $|\psi(t_0)\rangle$, la méthode est la suivante :

- i. tout d'abord, on cherche les vecteurs propres de $I(t)$. Ces $|\varphi_j(t)\rangle$ forment alors, pour tout t , une base de l'espace de Hilbert.
- ii. ensuite, on décompose $|\psi(t_0)\rangle$ sur la base des $|\varphi_j(t_0)\rangle$:

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_j c_{j0} \cdot |\varphi_j(t_0)\rangle$$

- iii. on obtient finalement le ket à l'instant t :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \sum_j c_{j0} \cdot U(t, t_0) |\varphi_j(t_0)\rangle = \sum_j c_{j0} \cdot |\varphi_j(t)\rangle$$

Ce schéma de résolution souligne également l'un des avantages les plus importants des opérateurs intégrales premières : *leurs valeurs propres sont de bons nombres quantiques* (comme on le verra lors de l'établissement du théorème ABCD). En effet, toute solution de l'équation de Schrödinger peut être indexée à l'aide de valeurs propres de ces opérateurs, et cette indexation reste inchangée au cours du temps.

Avant d'exposer notre recherche des opérateurs intégrales premières et d'en montrer plus clairement l'intérêt, signalons trois autres propriétés intéressantes de ces opérateurs (les démonstrations sont simples) :

Propriété 3 :

*Si $I(t)$ est un opérateur intégrale première,
ie :*

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} = [H_{ext}, I]$$

alors :

$$I(t) U(t, t_0) = U(t, t_0) I(t_0) \quad (2.72)$$

et réciproquement

Propriété 4 :

*Si $I(t)$ et $J(t)$ sont deux opérateurs intégrales premières,
alors*

$$I(t) J(t), \quad J(t) I(t) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot I(t) + \mu \cdot J(t)$$

sont aussi des opérateurs intégrales premières.

ie que tout produit et toute combinaison linéaire (avec coefficients indépendants du temps) d'opérateurs intégrales premières sont également opérateurs intégrales premières.

Propriété 5 :

*Si $I(t)$ est un opérateur intégrale première,
alors
sa valeur moyenne est constante :*

$$\frac{d}{dt} \langle I(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | I(t) | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | ([I, H] + i\hbar \partial_t I) | \psi \rangle = 0$$

*Remarque : **théorème d'Ehrenfest :***

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{r}_{op} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{r}_{op}, H] \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{p}_{op} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{p}_{op}, H] \rangle \end{aligned}$$

Remarque importante :

Il faut faire attention à ne pas confondre l'équation de définition des opérateurs intégrales premières :

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} = [H_{ext}, I]$$

avec l'équation de Heisenberg :

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H = i\hbar \frac{\partial O_H}{\partial t} + [O_H, H_{ext}] \quad (2.73)$$

qui régit l'évolution des opérateurs "O" en description (ou représentation) de Heisenberg.

On rappelle que cette description de Heisenberg s'obtient en reportant l'évolution temporelle des kets - valable en description de Schrödinger - sur les opérateurs :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{Schrödinger} &= |\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_{Heisenberg} \\ \text{où } U(t, t_0) \text{ vérifie : } & i\hbar \frac{d}{dt} U = H_{ext} U \end{aligned}$$

Par exemple, l'équation aux valeurs propres dans ces deux descriptions devient :

$$\begin{aligned} \text{Schrödinger : } & A_S(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) |\varphi(t)\rangle = a. |\varphi(t)\rangle \\ \text{Heisenberg : } & A_H(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) |\varphi(t_0)\rangle = a. |\varphi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_H(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) &: = U^{-1}(t, t_0) A_S(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) U(t, t_0) \\ &= A_S(\vec{R}_{op}(t, t_0), \vec{P}_{op}(t, t_0), t) \end{aligned}$$

où l'on a écrit les opérateurs canoniques en description de Heisenberg sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0) &:= U^{-1}(t, t_0) \overrightarrow{r}_{op} U(t, t_0) \\ \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0) &:= U^{-1}(t, t_0) \overrightarrow{p}_{op} U(t, t_0)\end{aligned}} \quad (2.74)$$

C'est dans cette description d'ailleurs que le lien avec la mécanique classique est le plus immédiat. En effet, selon 2.73, les équations d'évolution de ces opérateurs \overrightarrow{R}_{op} et \overrightarrow{P}_{op} sont égales à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overrightarrow{R}_{op} = \frac{1}{i\hbar} \left[\overrightarrow{R}_{op}, H_{ext} \left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0), t \right) \right] \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{P}_{op} = \frac{1}{i\hbar} \left[\overrightarrow{P}_{op}, H_{ext} \left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0), t \right) \right] \end{cases}$$

ie (voir appendice A) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overrightarrow{R}_{op} = \left[\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{P}} H_{ext}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t) \right]_{\overrightarrow{r} \rightarrow \overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{p} \rightarrow \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0)} \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{P}_{op} = - \left[\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} H_{ext}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t) \right]_{\overrightarrow{r} \rightarrow \overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{p} \rightarrow \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0)} \end{cases} \quad (2.75)$$

et l'on obtient ainsi des équations semblables aux équations de Hamilton classiques.

Par exemple, avec l'Hamiltonien particulier des parties précédentes (au plus quadratique en position et impulsion) :

$$H_{ext}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}, t) = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \beta(t) \cdot \overrightarrow{p}}{2m} - \overrightarrow{r} \cdot \alpha(t) \cdot \overrightarrow{p} - \frac{m}{2} \overrightarrow{r} \cdot \gamma(t) \cdot \overrightarrow{r} - m \overrightarrow{g}(t) \cdot \overrightarrow{r} + \overrightarrow{f}(t) \cdot \overrightarrow{p}$$

on obtient simplement les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overrightarrow{R}_{op} = \alpha(t) \cdot \overrightarrow{R}_{op} + \beta(t) \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m + \overrightarrow{f}(t) \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{P}_{op}/m = \alpha(t) \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m + \gamma(t) \cdot \overrightarrow{R}_{op} + \overrightarrow{g}(t) \end{cases}$$

En réécrivant l'équation de Heisenberg 2.73 comme :

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H = i\hbar \frac{d}{dt} (U^{-1} O_S U) = U^{-1} \left(i\hbar \frac{\partial O_S}{\partial t} + [O_S, H_{ext}] \right) U$$

le lien avec l'équation des opérateurs intégrales premières devient évident. En effet, lorsque l'opérateur O_S est opérateur intégrale première (en description de Schrödinger), l'opérateur O_H qui lui est associé en description de Heisenberg est une intégrale première au sens habituel de la mécanique classique :

$$\frac{d}{dt} O_H = 0$$

ie aussi :

$$\frac{d}{dt} \left[O_S \left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0), t \right) \right] = 0 \quad (2.76)$$

exprimant que l'opérateur $O_H = O_S \left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0), \overrightarrow{P}_{op}(t, t_0), t \right)$ décrit une quantité *invariante*.

Depuis le célèbre papier de Noether en 1918 [92], de nombreux travaux ont consisté à identifier les quantités invariantes (tant d'un point de vue classique que quantique) propres à des systèmes où l'Hamiltonien dépend explicitement du temps. La plupart de ces études (Lutzky [93], Chattopadhyay [94]...) s'appuient sur le théorème de Noether [84], ou sur la transformation de l'Hamiltonien dépendant du temps en un Hamiltonien indépendant du temps grâce à des transformations canoniques bien choisies (l'Hamiltonien obtenu étant alors un invariant) [95, 90], ou plus simplement encore sur l'utilisation de diverses familles d'ansätze (polynômes en \vec{r} et \vec{p}) [96, 97].

Au paragraphe suivant, nous allons précisément montrer comment obtenir toute une nouvelle famille d'invariants, valables pour les deux types de mécanique, classique et quantique.

2.4.3 Une famille d'opérateurs intégrales premières pour Hamiltoniens quelconques

Il n'y a pas de règle générale pour obtenir des opérateurs intégrales premières, et leur recherche n'est a priori pas évidente. Nous allons montrer néanmoins comment obtenir toute une classe de ces opérateurs pour un Hamiltonien H_{ext} *quelconque* (en effet, dans ce paragraphe, comme dans le précédent, on ne suppose *pas* que H_{ext} est au plus quadratique en position et impulsion). Les calculs qui suivent sont donc *valables pour tout Hamiltonien, dépendant ou non du temps*.

On peut d'abord voir facilement que les deux opérateurs suivants :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{R}_{op} &:= \overrightarrow{R}_{op}(t_0, t) \\ \overrightarrow{P}_{op} &:= \overrightarrow{P}_{op}(t_0, t)\end{aligned}} = U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) \neq \begin{pmatrix} \overrightarrow{R}_{op} \\ \overrightarrow{P}_{op} \end{pmatrix}(t, t_0) \quad (2.77)$$

sont bien des opérateurs intégrales premières, où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution usuel, défini pour un Hamiltonien quelconque :

$$U(t, t_0) := \mathcal{T} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\overrightarrow{r}_{op}, \overrightarrow{p}_{op}, t') dt'} \right)$$

(où \mathcal{T} est l'opérateur chronologique de Dyson, dont la définition est rappelée dans l'appendice A).

Preuve.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{R}_{op} &= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \right] \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) + U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U^{-1}(t, t_0) \right] \\ &= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \right] \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) - U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \right] U^{-1}(t, t_0) \\ &= H_{ext} U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) - U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0) H_{ext} \\ &= [H_{ext}, U(t, t_0) \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}_{op} \\ \overrightarrow{p}_{op} \end{pmatrix} U^{-1}(t, t_0)] = [H_{ext}, \overrightarrow{R}_{op}^{-}] \end{aligned}$$

■

Ces opérateurs sont en fait simplement les opérateurs *inverses* de $\overrightarrow{R}_{op}(t, t_0)$ et $\overrightarrow{P}_{op}(t, t_0)$ ("inverses" au sens de "évolution inverse").

Dans le cas libre, par exemple, on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}_{op} = \overrightarrow{r}_{op} + \frac{\overrightarrow{p}_{op}}{m} (t - t_0) \\ \overrightarrow{P}_{op} = \overrightarrow{p}_{op} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{R}_{op} = \overrightarrow{r}_{op} - \frac{\overrightarrow{p}_{op}}{m} (t - t_0) \\ \overrightarrow{P}_{op} = \overrightarrow{p}_{op} \end{cases}$$

et dans le cas d'un Hamiltonien au plus quadratique, il faut utiliser les résultats de la partie précédente, en intervertissant t et t_0 (évolution inverse) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{op}} = A(t, t_0) \overrightarrow{r_{op}} + B(t, t_0) \overrightarrow{p_{op}}/m + \overrightarrow{\xi}(t, t_0) \\ \overrightarrow{P_{op}}/m = C(t, t_0) \overrightarrow{r_{op}} + D(t, t_0) \overrightarrow{p_{op}}/m + \overrightarrow{\phi}(t, t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{op}} = A(t_0, t) \overrightarrow{r_{op}} + B(t_0, t) \overrightarrow{p_{op}}/m + \overrightarrow{\xi}(t_0, t) \\ \overrightarrow{P_{op}}/m = C(t_0, t) \overrightarrow{r_{op}} + D(t_0, t) \overrightarrow{p_{op}}/m + \overrightarrow{\phi}(t_0, t) \end{cases}$$

Du fait de la propriété suivante des matrices ABCD (voir partie 2.2 et appendice B) :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}(t_0, t) & -\tilde{B}(t_0, t) \\ -\tilde{C}(t_0, t) & \tilde{A}(t_0, t) \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

on peut même ré-écrire ces termes $\overrightarrow{R_{op}}$ et $\overrightarrow{P_{op}}$ en fonction des matrices ABCD habituelles (ie ayant le sens normal d'évolution) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{op}} = \tilde{D}(t, t_0) \overrightarrow{r_{op}} - \tilde{B}(t, t_0) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \overrightarrow{\xi}(t_0, t) \\ \overrightarrow{P_{op}}/m = -\tilde{C}(t, t_0) \overrightarrow{r_{op}} + \tilde{A}(t, t_0) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \overrightarrow{\phi}(t_0, t) \end{cases} \quad (2.79)$$

et on verra au paragraphe suivant comment également exprimer $\overrightarrow{\xi}^- := \overrightarrow{\xi}(t_0, t)$ et $\overrightarrow{\phi}^- := \overrightarrow{\phi}(t_0, t)$ en fonction de $\overrightarrow{\xi}(t, t_0)$ et $\overrightarrow{\phi}(t, t_0)$.

En examinant la démonstration précédente, on se rend alors compte qu'en fait tout opérateur du type :

$$\boxed{U(t, t_0) O U^{-1}(t, t_0)} \quad (2.80)$$

où O est un opérateur quelconque indépendant du temps, est également opérateur intégrale première.

De plus, comme tout produit et toute combinaison linéaire (avec coefficients indépendants du temps) d'opérateurs intégrales premières sont également opérateurs intégrales premières, on obtient que les opérateurs suivants sont aussi opérateurs intégrales premières :

$$\boxed{\sum_{i,j,k \dots = 1,2} W_{ijk \dots} V_i^- \cdot V_j^- \cdot V_k^- \dots} \quad (2.81)$$

avec :

$$\overrightarrow{V}^- := \begin{pmatrix} \overrightarrow{R_{op}} \\ \overrightarrow{P_{op}}/m \end{pmatrix} \quad \text{ie : } \begin{cases} V_1^- := \overrightarrow{R_{op}} \\ V_2^- := \overrightarrow{P_{op}}/m \end{cases}$$

et où chaque terme $W_{ijk \dots}$ est une matrice 3×3 à coefficients complexes indépendants du temps.

Parmi les cas particuliers, citons le cas quadratique (scalaire) :

$$\widetilde{\overrightarrow{V^-}} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \overrightarrow{V^-}$$

qui fournit un invariant quadratique autre que l'Hamiltonien (lorsque celui-ci est indépendant du temps), et le cas linéaire (vectoriel) :

$$W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m \quad (2.82)$$

dont l'utilité apparaîtra plus clairement au paragraphe suivant.

Comme cela a été souligné à la fin du paragraphe précédent, tous ces opérateurs ont un équivalent en mécanique classique, sous forme d'une intégrale première classique (ie d'une quantité invariante). En ce sens, les familles d'invariants déterminées ici sont *valables pour les deux types de mécanique : classique et quantique*.

Dans le cas d'un Hamiltonien quelconque, on ne sait alors pas forcément calculer analytiquement les termes $\overrightarrow{R_{op}}$ et $\overrightarrow{P_{op}}$, et par conséquent obtenir une expression simple du terme général $W_{ijk...} \cdot V_i^- \cdot V_j^- \cdot V_k^- \dots$. Dans certains cas cependant, et dans le cas particulier d'un Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion, on sait comment exprimer $\overrightarrow{R_{op}}$ et $\overrightarrow{P_{op}}$, et tous les invariants établis précédemment peuvent être exprimés simplement grâce aux matrices ABCD.

L'intérêt de *toutes ces quantités conservées* n'a - à notre connaissance - pas encore été étudié, et c'est l'un des travaux qu'il reste à effectuer (en particulier, le rôle de ces familles d'invariants - et des symétries associées - pour des Hamiltoniens dépendant du temps, décrivant l'évolution de systèmes non-conservatifs). Le cas linéaire $W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m$ est en effet d'une grande utilité pour l'étude de l'évolution de paquets d'ondes atomiques, comme nous allons le voir maintenant.

2.4.4 Une autre démonstration du théorème ABCD

Ce paragraphe montre comment l'opérateur $W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m$ permet de redémontrer simplement le théorème ABCD. Nous détaillons volontairement ici les calculs afin de donner un exemple concret d'utilisation des opérateurs intégrales premières.

La méthode est la suivante : nous calculons d'abord le vecteur propre de l'opérateur $W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m$ pour la valeur propre $\overrightarrow{e_0}$; puis nous changeons un peu les notations afin d'être en accord avec les notations utilisées dans les autres parties de ce mémoire ; ensuite, nous rappelons ce qu'est un invariant symplectique, et nous mettons en évidence le lien entre $\overrightarrow{e_0}$ et ce type d'invariant ; enfin, nous calculons le dernier préfacteur en reportant notre solution dans l'équation de Schrödinger initiale.

Vecteur propre de l'opérateur $W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m$ pour la valeur propre $\overrightarrow{e_0}$

Ce vecteur propre $|\varphi\rangle$ obéit donc à l'équation :

$$\left[(W_1 \cdot A^- + W_2 \cdot C^-) \overrightarrow{r_{op}} + (W_1 \cdot B^- + W_2 \cdot D^-) \overrightarrow{p_{op}} / m + (W_1 \cdot \overrightarrow{\xi} + W_2 \cdot \overrightarrow{\phi}) \right] |\varphi\rangle = \overrightarrow{e_0} \cdot |\varphi\rangle$$

qui devient en représentation position :

$$(W_1.B^- + W_2.D^-) \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{im}{\hbar} \left[\vec{e}_0 - \left(W_1.\vec{\xi}^- + W_2.\vec{\phi}^- \right) - (W_1.A^- + W_2.C^-) \cdot \vec{r} \right] \cdot \varphi(\vec{r}, t)$$

où l'on note par simplicité :

$$\boxed{A^- := A(t_0, t) \neq A(t, t_0) := A} \quad (2.83)$$

Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre alors directement en :

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(t) e^{-\frac{im}{2\hbar} \vec{r} \cdot \left[(W_1.\widetilde{A^-} + W_2.\widetilde{C^-}) \cdot (W_1.\widetilde{B^-} + W_2.\widetilde{D^-})^{-1} \right] \cdot \vec{r} + \frac{im}{\hbar} \left[\vec{e}_0 - \left(W_1.\widetilde{\xi^-} + W_2.\widetilde{\phi^-} \right) \right] \cdot (W_1.\widetilde{B^-} + W_2.\widetilde{D^-})^{-1} \cdot \vec{r}} \quad (2.84)$$

où $f(t)$ est un terme dépendant du temps que l'on déterminera plus tard.

Changement de notation

A l'aide de la propriété suivante des matrices ABCD (voir partie 2.2 et appendice B) :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}(t_0, t) & -\widetilde{B}(t_0, t) \\ -\widetilde{C}(t_0, t) & \widetilde{A}(t_0, t) \end{pmatrix}$$

le terme :

$$-(W_1.\widetilde{A^-} + W_2.\widetilde{C^-}) \cdot (W_1.\widetilde{B^-} + W_2.\widetilde{D^-})^{-1}$$

peut en effet s'écrire :

$$\left[C(-\widetilde{W}_2) + D\widetilde{W}_1 \right] \cdot \left[A(-\widetilde{W}_2) + B\widetilde{W}_1 \right]^{-1}$$

Afin d'être en accord avec les notations des paquets d'ondes introduits au paragraphe 2.3.3, posons donc :

$$\boxed{X_0 := -\widetilde{W}_2 \quad \text{et} \quad Y_0 := \widetilde{W}_1} \quad (2.85)$$

ainsi que :

$$\begin{cases} X_1 := AX_0 + BY_0 \\ Y_1 := CX_0 + DY_0 \end{cases} \quad (2.86)$$

La fonction d'onde $\varphi(\vec{r}, t)$ s'écrit alors :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = f(t) e^{\frac{im}{2\hbar} \vec{r} \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot \vec{r} - \frac{im}{\hbar} \left[\vec{e}_0 - \left(W_1.\widetilde{\xi^-} + W_2.\widetilde{\phi^-} \right) \right] \cdot X_1^{-1} \cdot \vec{r}}} \quad (2.87)$$

Essayons maintenant de réécrire le terme :

$$W_1.\vec{\xi}^- + W_2.\vec{\phi}^- = \widetilde{Y}_0.\vec{\xi}^- - \widetilde{X}_0.\vec{\phi}^-$$

en fonction de quantités dont le sens d'évolution est normal (du type de $\vec{\xi}(t, t_0)$ ou $\vec{\phi}(t, t_0)$ par exemple).

On peut alors montrer que :

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}^- \\ \vec{\phi}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{D}(t, t_0) & \tilde{B}(t, t_0) \\ \tilde{C}(t, t_0) & -\tilde{A}(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{\xi}^- \\ \vec{\phi}^- \end{pmatrix} & : = \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t_0, t) \\ \vec{\phi}(t_0, t) \end{pmatrix} = \int_t^{t_0} \mathcal{M}(t_0, t') \Phi(t') dt' \\ & = -\mathcal{M}(t_0, t) \int_{t_0}^t \mathcal{M}(t, t') \Phi(t') dt' \\ & = -\mathcal{M}(t_0, t) \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -A(t_0, t) & -B(t_0, t) \\ -C(t_0, t) & -D(t_0, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -\tilde{D}(t, t_0) & \tilde{B}(t, t_0) \\ \tilde{C}(t, t_0) & -\tilde{A}(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

d'où :

$$\begin{aligned} \widetilde{Y_0}.\vec{\xi}^- - \widetilde{X_0}.\vec{\phi}^- & = \widetilde{Y_0}. \left(-\tilde{D}\vec{\xi}(t, t_0) + \tilde{B}\vec{\phi}(t, t_0) \right) - \widetilde{X_0}. \left(\tilde{C}\vec{\xi}(t, t_0) - \tilde{A}\vec{\phi}(t, t_0) \right) \\ & = \widetilde{AX_0 + BY_0}.\vec{\phi}(t, t_0) - \widetilde{CX_0 + DY_0}.\vec{\xi}(t, t_0) \end{aligned}$$

ie :

$$W_1.\vec{\xi}^- + W_2.\vec{\phi}^- = \widetilde{Y_0}.\vec{\xi}^- - \widetilde{X_0}.\vec{\phi}^- = \widetilde{X_1}.\vec{\phi}(t, t_0) - \widetilde{Y_1}.\vec{\xi}(t, t_0) \quad (2.89)$$

Et la fonction d'onde $\varphi(\vec{r}, t)$ s'écrit finalement :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = f(t) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \vec{r}.Y_1 X_1^{-1}.\vec{r} - \frac{im}{\hbar} \left[\vec{e_0} - \left(\vec{\phi}(t, t_0).X_1 - \vec{\xi}(t, t_0).Y_1 \right) \right] X_1^{-1}.\vec{r} \right\}} \quad (2.90)$$

Sens de $\vec{e_0}$: invariant symplectique

Nous avons obtenu au paragraphe précédent l'expression du vecteur propre $\varphi(\vec{r}, t)$ de l'opérateur

$$\widetilde{Y_0}.\vec{R_{op}} - \widetilde{X_0}.\vec{P_{op}} / m \quad (2.91)$$

associé à la valeur propre $\vec{e_0}$.

Comme $\widetilde{Y_0}.\vec{R_{op}} - \widetilde{X_0}.\vec{P_{op}} / m$ est un opérateur intégrale première, la valeur propre $\vec{e_0}$ est un invariant :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{e_0} = \vec{0}} \quad (2.92)$$

qui caractérise le vecteur propre $\varphi(\vec{r}, t)$ à tout instant t . Cette valeur propre est donc une quantité invariante qui dépend des paramètres de $\varphi(\vec{r}, t)$. Or, $\varphi(\vec{r}, t)$ étant une fonction d'onde Gaussienne, elle est caractérisée par :

- ses position et impulsion moyennes (ou centrales) :

$$\begin{cases} \vec{r}_0, \vec{p}_0 & \text{à l'instant } t_0 \\ \vec{r}_1, \vec{p}_1 & \text{à l'instant } t \end{cases}$$

- ses matrices de largeurs en position et impulsion (voir paragraphe 2.3.3 pour les notations)

$$\begin{cases} Y_0, X_0 & \text{à l'instant } t_0 \\ Y_1, X_1 & \text{à l'instant } t \end{cases}$$

- et un facteur d'amplitude qui dépend de $f(t)$

Quelle quantité invariante peut-on donc construire à partir de ces paramètres? La réponse est simple, et elle utilise un résultat de mécanique symplectique : la notion d'*invariant symplectique* [85, 98].

On peut en effet montrer que :

Propriété (invariant symplectique) :

Pour deux paires de quantités (scalaires, vecteurs, tenseurs d'ordre quelconque) :

$$\begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}$$

qui suivent la même loi ABCD :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(t_0) \\ a(t_0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta(t_0) \\ \alpha(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

alors on peut former une autre quantité :

$$\boxed{\tilde{b}.\alpha - \tilde{a}.\beta} \tag{2.93}$$

qui est invariante :

$$\tilde{b}(t) . \alpha(t) - \tilde{a}(t) . \beta(t) = \tilde{b}(t_0) . \alpha(t_0) - \tilde{a}(t_0) . \beta(t_0) = \text{constante}$$

et que l'on appelle un *invariant symplectique*.

Preuve. La démonstration repose sur l'unimodularité de la matrice d'évolution, et plus précisément sur le fait que la matrice :

$$\mathcal{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix}$$

appartient au groupe des matrices symplectiques et qu'elle vérifie donc :

$$\widetilde{\mathcal{M}} \mathbf{J} \mathcal{M} = \mathbf{J}$$

avec (voir appendice B) :

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}(t) \cdot \alpha(t) - \widetilde{a}(t) \cdot \beta(t) &= \left(\widetilde{b(t_0)} \cdot \widetilde{A(t, t_0)} + \widetilde{a(t_0)} \cdot \widetilde{B(t, t_0)} \right) \cdot (C(t, t_0) \cdot \beta(t_0) + D(t, t_0) \cdot \alpha(t_0)) \\
&\quad - \left(\widetilde{b(t_0)} \cdot \widetilde{C(t, t_0)} + \widetilde{a(t_0)} \cdot \widetilde{D(t, t_0)} \right) \cdot (A(t, t_0) \cdot \beta(t_0) + B(t, t_0) \cdot \alpha(t_0)) \\
&= \widetilde{b(t_0)} \cdot \left(\widetilde{A(t, t_0)C(t, t_0)} - \widetilde{C(t, t_0)A(t, t_0)} \right) \cdot \beta(t_0) \\
&\quad + \widetilde{b(t_0)} \cdot \left(\widetilde{A(t, t_0)D(t, t_0)} - \widetilde{C(t, t_0)B(t, t_0)} \right) \cdot \alpha(t_0) \\
&\quad + \widetilde{a(t_0)} \cdot \left(\widetilde{B(t, t_0)C(t, t_0)} - \widetilde{D(t, t_0)A(t, t_0)} \right) \cdot \beta(t_0) \\
&\quad + \widetilde{a(t_0)} \cdot \left(\widetilde{B(t, t_0)D(t, t_0)} - \widetilde{D(t, t_0)B(t, t_0)} \right) \cdot \alpha(t_0)
\end{aligned}$$

or, suivant les propriétés suivantes des matrices ABCD (voir appendice B) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A(t, t_0)C(t, t_0)} &= \widetilde{C(t, t_0)A(t, t_0)} \\
\widetilde{B(t, t_0)D(t, t_0)} &= \widetilde{D(t, t_0)B(t, t_0)} \\
\widetilde{A(t, t_0)D(t, t_0)} - \widetilde{C(t, t_0)B(t, t_0)} &= 1
\end{aligned} \tag{2.94}$$

on obtient finalement :

$$\widetilde{b}(t) \cdot \alpha(t) - \widetilde{a}(t) \cdot \beta(t) = \widetilde{b}(t_0) \cdot \alpha(t_0) - \widetilde{a}(t_0) \cdot \beta(t_0)$$

■

Or on a défini précisément Y_1 et X_1 à partir de Y_0 et X_0 suivant la loi ABCD :

$$\begin{cases} X_1 := AX_0 + BY_0 \\ Y_1 := CX_0 + DY_0 \end{cases}$$

et on sait également que les centres du paquet d'ondes $\varphi(\vec{r}, t)$ suivent la même loi ABCD (par le théorème d'Ehrenfest par exemple) :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 := A\vec{r}_0 + B\vec{p}_0/m + \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{p}_1/m := C\vec{r}_0 + D\vec{p}_0/m + \vec{\phi}(t, t_0) \end{cases}$$

On peut donc construire tout naturellement un premier invariant symplectique qui caractérise la fonction d'onde $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\boxed{\widetilde{Y}_1 \cdot \left(\vec{r}_1 - \vec{\xi}(t, t_0) \right) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(\frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{\phi}(t, t_0) \right)} \tag{2.95}$$

dont on peut vérifier facilement l'invariance temporelle :

$$\widetilde{Y}_1 \cdot \left(\vec{r}_1 - \vec{\xi}(t, t_0) \right) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(\frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{\phi}(t, t_0) \right) = \widetilde{Y}_0 \cdot \vec{r}_0 - \widetilde{X}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m}$$

Choisissons donc pour \vec{e}_0 cet invariant symplectique :

$$\boxed{\vec{e}_0 = \widetilde{Y}_0 \cdot \vec{r}_0 - \widetilde{X}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m}} \tag{2.96}$$

ie aussi :

$$\vec{e}_0 = \left(\widetilde{X}_1 \cdot \vec{\phi}(t, t_0) - \widetilde{Y}_1 \cdot \vec{\xi}(t, t_0) \right) = \widetilde{Y}_1 \cdot \vec{r}_1 - \widetilde{X}_1 \cdot \frac{\vec{p}_1}{m}$$

et réécrivons finalement $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(t) e^{\frac{im}{2\hbar} \vec{r} \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot \vec{r} - \frac{im}{\hbar} (\vec{r}_1 \cdot Y_1 X_1^{-1} - \vec{p}_1/m) \cdot \vec{r}}$$

ie encore :

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(t) e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot e^{-\frac{im}{2\hbar} \vec{r}_1 \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot \vec{r}_1 + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1}}$$

qui est du type :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} h(t) \right]} \quad (2.97)$$

avec $h(t)$ qu'il faut maintenant déterminer.

Calcul du terme restant

Reportons maintenant l'expression précédente de $\varphi(\vec{r}, t)$ dans l'équation de Schrödinger initiale afin de calculer le terme restant $h(t)$.

Comme on sait que $h(t)$ ne dépend pas de \vec{r} , on ne regardera que les termes indépendant de \vec{r} dans l'expression obtenue. On trouve finalement :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{i\hbar}{2} Tr [\beta Y_1 X_1^{-1}] + m \vec{r}_1 \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_1 \cdot \frac{\beta}{2m} \cdot \vec{p}_1 + m \vec{g} \cdot \vec{r}_1$$

qu'on peut intégrer en :

$$\begin{aligned} h(t, t_0) &= h(t_0) + \frac{m}{2} \left[r_0 \tilde{A} C r_0 + \frac{p_0}{m} \tilde{B} D \frac{p_0}{m} + 2r_0 \tilde{C} B \frac{p_0}{m} \right] \\ &\quad + m\phi \left(A r_0 + B \frac{p_0}{m} \right) + \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi) \\ &\quad + \frac{i\hbar}{2} \int_{t_0}^t Tr [\beta Y_1 X_1^{-1}] dt' \end{aligned}$$

grâce aux propriétés suivantes des matrices ABCD :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{A} C \end{pmatrix} = \tilde{C} \beta C + \tilde{A} \gamma A \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{B} D \end{pmatrix} = \tilde{D} \beta D + \tilde{B} \gamma B \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{B} C \end{pmatrix} = \tilde{D} \beta C + \tilde{B} \gamma A \end{cases}$$

On reconnait alors bien l'expression de l'action classique établie au paragraphe 2.2.4 :

$$S_{cl}(t, t_0) = \frac{m}{2} \left[r_0 \tilde{A} C r_0 + \frac{p_0}{m} \tilde{B} D \frac{p_0}{m} + 2r_0 \tilde{C} B \frac{p_0}{m} \right] + m\phi \left(A r_0 + B \frac{p_0}{m} \right) + \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi)$$

plus un terme égal à :

$$\frac{i\hbar}{2} \int_{t_0}^t Tr [\beta Y_1 X_1^{-1}] dt' = \frac{i\hbar}{2} \int_{t_0}^t Tr \left[\left(\frac{d}{dt} X_1 \right) X_1^{-1} \right] dt'$$

En utilisant alors la formule suivante donnée dans l'appendice A :

$$Tr \left(\frac{dX}{dt} \cdot X^{-1} \right) = \frac{d}{dt} (\ln(\det(X))) \quad (2.98)$$

on peut réécrire $h(t, t_0)$ sous la forme :

$$h(t, t_0) = h(t_0) + S_{cl}(t, t_0) + \frac{i\hbar}{2} [\ln(\det(X_1)) - \ln(\det(X_0))]$$

qui conduit finalement à :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e^{\frac{i\hbar}{2} h(t_0)}}{\sqrt{\det(X_1 \cdot X_0^{-1})}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t, t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)} \quad (2.99)$$

A t_0 ce paquet d'ondes devient :

$$\varphi(\vec{r}, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} h(t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot Y_0 X_0^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

ie :

$$\varphi(\vec{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot Y_0 X_0^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} \quad (2.100)$$

en prenant :

$$h(t_0) = \frac{i\hbar}{2} \ln(\det(X_0))$$

Finalement on obtient à $t > t_0$ le paquet d'ondes suivant :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_1)}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t, t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)} \quad (2.101)$$

Bilan : théorème ABCD

Nous venons de démontrer le théorème *ABCD* par une méthode différente de celles qui ont été utilisées jusqu'à maintenant : la méthode des opérateurs intégrales premières.

Une autre expression du théorème *ABCD* est ainsi la suivante :

Soit un paquet d'ondes Gaussien au temps t_0 du type :

$$\varphi(\vec{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot Y_0 X_0^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

alors on obtient l'expression du paquet d'ondes au temps $t > t_0$
(après évolution due à l'Hamiltonien au plus quadratique H_{ext}) :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_1)}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t, t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)} \quad (2.102)$$

en calculant le vecteur propre de l'opérateur :

$$\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R_{op}} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P_{op}} / m$$

pour la valeur propre :

$$\vec{e}_0 = \widetilde{Y}_0 \cdot \vec{r}_0 - \widetilde{X}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m}$$

qui est un invariant symplectique caractérisant le paquet d'ondes initial.

2.4.5 Cas particulier : le propagateur

Le propagateur

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}' \rangle$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution habituel, peut être vu d'une façon légèrement différente.

En effet, on peut toujours l'écrire sous la forme :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \int d\vec{r}'' \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}'' \rangle \cdot \langle \vec{r}'' | \vec{r}' \rangle \quad (2.103)$$

où :

$$\langle \vec{r}'' | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r}'', \vec{r}')$$

qui montre qu'un propagateur n'est rien d'autre que la fonction d'onde évoluée d'une onde plane (en position) initiale :

$$\langle \vec{p} | \vec{r}' \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'}$$

Ce propagateur n'est donc qu'un cas particulier d'évolution d'une certaine fonction d'onde, le "paquet d'ondes" initial ayant comme paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_0 = \vec{r}' \\ \vec{p}_0 = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = 0 \\ Y_0 = 1 \end{array} \right.$$

Par conséquent, en appliquant le résultat précédent (théorème ABCD selon la théorie des opérateurs intégrales premières), on obtient simplement que :

le propagateur est le vecteur propre de l'opérateur :

$$\overrightarrow{R_{op}}$$

pour la valeur propre :

$$\vec{r}'$$

D'où :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \frac{(2\pi\hbar/m)^{-3/2}}{\sqrt{\det(X_1)}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t, t_0)} e^{\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot Y_1 X_1^{-1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = A(t, t_0) \vec{r}' + \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{p}_1/m = C(t, t_0) \vec{r}' + \vec{\phi}(t, t_0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = B(t, t_0) Y_0 \\ Y_1 = D(t, t_0) X_0 \end{array} \right.$$

ainsi que :

$$S_{cl}(t, t_0) = \frac{m}{2} \vec{r}' \cdot \tilde{A} C \vec{r}' + m \vec{\phi} \cdot A \vec{r}' + \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt' \left(\vec{\phi} \beta \vec{\phi} + \vec{\xi} \gamma \vec{\xi} + 2 \vec{g} \cdot \vec{\xi} \right)$$

Et grâce aux propriétés des matrices $ABCD$, on obtient finalement :

$$\boxed{K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) \right]} \quad (2.104)$$

où :

$$S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \frac{m}{2} \left[(r - \xi) DB^{-1}(r - \xi) - 2(r - \xi) \widetilde{B^{-1}r'} + r' B^{-1} A r' \right] \quad (2.105)$$

$$+ m\phi(r - \xi) + \frac{m}{2} \int_{t'}^t dt'' (\phi\beta\phi + \xi\gamma\xi + 2g\xi)$$

est la fonction principale de Hamilton introduite et détaillée dans la partie 2.2. On retrouve alors bien l'expression obtenue dans la partie 2.3 [87, 51, 35] :

$$K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} [\det(B)]^{-1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) \right]$$

à un facteur de phase $\exp(-i3\pi/4)$ près (sans conséquence).

2.4.6 Interprétation en terme d'opérateurs création-annihilation

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que les solutions de l'équation de Schrödinger - pour un Hamiltonien *quelconque* - étaient également vecteurs propres d'une certaine famille d'opérateurs (les opérateurs intégrales premières), et plus particulièrement de l'opérateur :

$$W_1 \cdot \vec{R}_{op} + W_2 \cdot \vec{P}_{op} / m$$

avec \vec{R}_{op} et \vec{P}_{op} tels que :

$$\begin{cases} \vec{R}_{op} := \vec{R}_{op}(t_0, t) & \neq \vec{R}_{op}(t, t_0) \\ \vec{P}_{op} := \vec{P}_{op}(t_0, t) & \neq \vec{P}_{op}(t, t_0) \end{cases}$$

où $\vec{R}_{op}(t, t_0)$ et $\vec{P}_{op}(t, t_0)$ sont les solutions des équations de Hamilton *classiques*.

Dans le cas quadratique, on a vu comment cet opérateur permettait de démontrer le théorème *ABCD*, en décrivant explicitement l'évolution de ses vecteurs propres (paquets d'ondes Gaussiens). On a vu par conséquent quelle était l'action d'un tel opérateur sur une fonction d'onde *Gaussienne*, qui est, on le rappelle, fonction génératrice d'une base de fonctions d'ondes : les modes Hermito-Gaussiens (voir partie 2.3.2).

Maintenant, on aimerait pouvoir décrire *explicitement* l'effet de l'opérateur $\widetilde{Y}_0 \cdot \vec{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \vec{P}_{op} / m$ sur chacun des modes Hermito-Gaussiens. Nous allons en fait voir que cet opérateur agit sur cette base de fonctions comme un *opérateur d'annihilation* (en faisant baisser les indices du polynôme d'Hermite 3D \mathcal{H}_{lmn} intervenant dans les modes d'Hermite-Gauss). Cette approche utilisant les opérateurs intégrales premières rejoint, en ce sens, la démarche suivie dans [51] et [35] par Bordé, tout en offrant la possibilité de la généraliser pour un Hamiltonien quelconque.

L'opérateur

$$\widetilde{Y}_0 \cdot \vec{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \vec{P}_{op} / m$$

est d'ailleurs très proche de l'opérateur "A" donné dans l'appendice 2 de la référence [35]. On peut en effet écrire cet opérateur différemment en faisant agir les termes d'évolution sur les largeurs complexes X_0 et Y_0 :

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_0 \cdot \vec{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \vec{P}_{op} / m &= \widetilde{Y}_0 \cdot \left(A^- \vec{r}_{op} + B^- \vec{p}_{op} / m + \vec{\xi} \right) - \widetilde{X}_0 \cdot \left(C^- \vec{r}_{op} + D^- \vec{p}_{op} / m + \vec{\phi} \right) \\ &= \widetilde{Y}_0 \cdot \left(\widetilde{D} \vec{r}_{op} - \widetilde{B} \vec{p}_{op} / m - \widetilde{D} \vec{\xi} + \widetilde{B} \vec{\phi} \right) - \widetilde{X}_0 \cdot \left(-\widetilde{C} \vec{r}_{op} + \widetilde{A} \vec{p}_{op} / m + \vec{\phi} + \widetilde{C} \vec{\xi} - \widetilde{A} \vec{\phi} \right) \\ &= (C\widetilde{X}_0 + D\widetilde{Y}_0) \cdot \left(\vec{r}_{op} - \vec{\xi} \right) - (A\widetilde{X}_0 + B\widetilde{Y}_0) \cdot \left(\frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{\phi} \right) \end{aligned}$$

ie :

$$\boxed{\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R_{op}} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P_{op}}/m = \widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{r_{op}} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} - \overrightarrow{\phi} \right)} \quad (2.106)$$

qui diffère légèrement de l'opérateur "A" dans [35] par la prise en compte des termes $\overrightarrow{\xi}$ et $\overrightarrow{\phi}$.

On cherche donc à connaître l'action de cet opérateur

$$\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{r_{op}} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} - \overrightarrow{\phi} \right)$$

sur la fonction génératrice des modes Hermito-Gaussiens (voir partie 2.3.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_1)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{cl} \left(t, t_0; \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{p_0} - 2\hbar \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} \right) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) Y_1 X_1^{-1} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) + \frac{i}{\hbar} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{p_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\alpha} X_0^{-1} Z_0 \overrightarrow{\alpha} \right] \end{aligned}$$

prise après évolution jusqu'au temps t de la fonction génératrice initiale :

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{p_0}) \\ := &\frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) Y_0 X_0^{-1} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) + \frac{i}{\hbar} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot (\overrightarrow{p_0} - 2\hbar \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\alpha} X_0^{-1} Z_0 \overrightarrow{\alpha} \right] \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{p_1}$ valent par conséquent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1} = A \overrightarrow{r_0} + B \left(\overrightarrow{p_0} - 2\hbar \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} \right) / m + \overrightarrow{\xi} & := \overrightarrow{R_1} - 2\hbar B \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} / m \\ \overrightarrow{p_1} / m = C \overrightarrow{r_0} + D \left(\overrightarrow{p_0} - 2\hbar \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} \right) / m + \overrightarrow{\phi} & := \overrightarrow{P_1} / m - 2\hbar D \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} / m \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\left[\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(-\frac{i\hbar}{m} \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - \overrightarrow{\phi} \right) \right] \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}) \\ &= \left[\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot (\overrightarrow{p_1} / m - \overrightarrow{\phi}) \right] \cdot \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}) \\ &= \left[\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{R_1} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot (\overrightarrow{P_1} / m - \overrightarrow{\phi}) + \frac{2\hbar}{m} (\widetilde{X_1} D - \widetilde{Y_1} B) \widetilde{X_0^{-1}} \overrightarrow{\alpha} \right] \cdot \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}) \end{aligned}$$

où l'on reconnait l'invariant symplectique :

$$\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{R_1} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot (\overrightarrow{P_1} / m - \overrightarrow{\phi}) = \widetilde{Y_0} \cdot \overrightarrow{r_0} - \widetilde{X_0} \cdot \overrightarrow{p_0} / m := \overrightarrow{e_0}$$

et où l'on peut simplifier le terme suivant :

$$\begin{aligned} (\widetilde{X_1} D - \widetilde{Y_1} B) \widetilde{X_0^{-1}} &= \left[(\widetilde{X_0} \widetilde{A} + \widetilde{Y_0} \widetilde{B}) D - (\widetilde{X_0} \widetilde{C} + \widetilde{Y_0} \widetilde{D}) B \right] \widetilde{X_0^{-1}} \\ &= \widetilde{X_0} \cdot (\widetilde{A} D - \widetilde{C} B) \widetilde{X_0^{-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour arriver finalement à :

$$\left[\widetilde{Y}_1 \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\xi}) - \widetilde{X}_1 \cdot \left(-\frac{i\hbar}{m} \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - \overrightarrow{\phi} \right) \right] \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}) = \left(\overrightarrow{e_0} + \frac{2\hbar}{m} \overrightarrow{\alpha} \right) \cdot \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1})$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{m}{2\hbar} \left(\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m - \overrightarrow{e}_0 \right) |\mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1)\rangle = \overrightarrow{\alpha} \cdot |\mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1)\rangle}$$

Développons maintenant - en puissances de $\overrightarrow{\alpha}$ - les termes dépendant de $\overrightarrow{\alpha}$ dans $\mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1) &= \mathcal{G}_{\overrightarrow{0}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1) \cdot e^{i\overrightarrow{r} \cdot Y \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\alpha} \cdot \frac{Z}{2} \overrightarrow{\alpha}} \\ &= \mathcal{G}_{\overrightarrow{0}}(\overrightarrow{r}, t; \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{p}_1) \cdot \sum_{l,m,n} i^{l+m+n} \cdot \alpha_x^l \cdot \alpha_y^m \cdot \alpha_z^n \cdot \mathcal{H}_{lmn} \left(\widetilde{Y} \overrightarrow{r}, -\frac{Z}{2} \right) \end{aligned}$$

où Y et Z s'expriment en fonction de X_0, Y_0, Z_0 .

L'action de l'opérateur précédent fait donc monter les puissances de $\overrightarrow{\alpha}$ d'une unité dans cette égalité, ce qui se traduit - lorsque l'on compare les puissances de $\overrightarrow{\alpha}$ avant et après action de l'opérateur - pour chaque terme \mathcal{H}_{lmn} par :

$$\overrightarrow{1}_x \cdot \frac{m}{2\hbar} \left(\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m - \overrightarrow{e}_0 \right) \mathcal{H}_{l,m,n} = -i \cdot \mathcal{H}_{l-1,m,n}$$

écrit ici pour la composante suivant l'axe x .

L'opérateur

$$\frac{m}{2\hbar} \left(\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m - \overrightarrow{e}_0 \right)$$

apparaît donc bien comme un *opérateur d'annihilation de modes Hermito-Gaussiens 3D*.

Sans entrer dans plus de détails, on peut ensuite, comme cela est fait dans [51], définir également un *opérateur de création* similaire pour monter et descendre à volonté sur l'échelle de ces modes Hermito-Gaussiens, la fonction génératrice précédente étant ainsi vue comme un *état cohérent généralisé*. On peut également ré-exprimer l'Hamiltonien initial grâce à ces opérateurs et y faire apparaître des termes de squeezing [51].

On peut alors se demander jusqu'à quel point cette approche - consistant à exprimer les opérateurs intégrales premières en termes d'opérateurs création-annihilation, et leur vecteurs propres en terme d'états cohérents - peut être généralisée à un Hamiltonien quelconque. Il serait donc intéressant d'examiner en détail le cas d'un Hamiltonien plus que quadratique, pour vérifier si l'opérateur $\widetilde{Y}_0 \cdot \overrightarrow{R}_{op} - \widetilde{X}_0 \cdot \overrightarrow{P}_{op}/m$ conduit correctement à ce genre d'approche.

2.4.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons vu qu'il était possible d'extraire beaucoup d'informations de l'équation de Schrödinger. Nous avons mis en particulier en évidence toute une famille d'opérateurs intégrales premières, valables pour un *Hamiltonien quelconque, dépendant ou non du temps* (dont les vecteurs propres donnent accès aux solutions de l'équation de Schrödinger correspondante). On a également souligné que cette famille d'opérateurs décrit un *ensemble de quantités invariantes*, conservées à la fois en mécanique quantique et en mécanique classique.

Nous avons ensuite vu l'intérêt des opérateurs intégrales premières dans le cas particulier d'un Hamiltonien au plus quadratique (en position et impulsion), en redémontrant le théorème ABCD par cette méthode. Nous avons vu plus spécifiquement que ce dernier pouvait être vu comme un calcul de vecteur propre pour une valeur propre égale à l'un des *invariants symplectiques* associés au paquet d'ondes initial.

Insistons sur le fait que la démarche suivie ici est très différente de celles utilisées dans les démonstrations antérieures. En effet, on ne cherche pas à calculer d'abord un propagateur, pour ensuite l'appliquer sur un paquet d'ondes, et obtenir son évolution. Dans notre approche, l'évolution d'un paquet d'ondes apparaît comme une *certaine propriété* d'un opérateur intégrale première, et le propagateur comme un *cas particulier* de cette propriété.

L'utilisation des opérateurs intégrales premières donne ainsi une perspective plus large au problème de *l'évolution de paquets d'ondes atomiques en présence de champs inertiels et gravitationnels*. En effet, on a vu que, quelque soit l'Hamiltonien, les solutions de l'équation de Schrödinger étaient égales aux vecteurs propres de l'opérateur :

$$W_1 \cdot \overrightarrow{R_{op}} + W_2 \cdot \overrightarrow{P_{op}}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{R_{op}} \\ \overrightarrow{P_{op}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \overrightarrow{R_{op}}(t_0, t) \\ \overrightarrow{P_{op}}(t_0, t) \end{pmatrix}$$

où $\overrightarrow{R}(t, t_0)$ et $\overrightarrow{P}(t, t_0)$ sont les solutions des équations de Hamilton.

On obtient ainsi l'équivalent du théorème *ABCD* dans le cas d'un *Hamiltonien quelconque*.

Bien sûr, la difficulté principale reste l'obtention d'une expression analytique pour les grandeurs $\overrightarrow{R}(t, t_0)$ et $\overrightarrow{P}(t, t_0)$, afin de calculer ensuite les vecteurs propres de $\overrightarrow{R_{op}}$ et $\overrightarrow{P_{op}}$. Il serait donc intéressant d'appliquer cette méthode de résolution dans le cas d'Hamiltoniens plus que quadratiques dont on connaît une solution analytique, pour examiner ainsi :

1. quels sont les vecteurs propres obtenus (autres que des Gaussiennes a priori),
2. quelle est alors l'expression de leurs invariants symplectiques,
3. comment ces paquets d'ondes sont modifiés par l'évolution temporelle,
4. s'ils conservent la même forme générale pendant l'évolution,
5. si le propagateur a la même forme que ces solutions générales,
6. si ce propagateur est également fonction génératrice d'une base de l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes...

Il convient de souligner que cette méthode fournit également une *méthode d'obtention du propagateur* dans le cas d'un Hamiltonien quelconque. En effet, on a montré que le propagateur $K(\overrightarrow{r}, t, \overrightarrow{r}', t_0)$ était égal au vecteur propre de l'opérateur $\overrightarrow{R_{op}}$ pour la valeur propre \overrightarrow{r}' , et ce quelque soit l'Hamiltonien.

On peut d'ailleurs définir également un autre propagateur, à partir de $\overrightarrow{P_{op}}$:

$$\mathcal{K}(\overrightarrow{r}, t, \overrightarrow{p}', t_0) := \langle \overrightarrow{r} | U(t, t_0) | \overrightarrow{p}' \rangle \quad (2.107)$$

qui permet d'exprimer l'évolution - en représentation position - de paquets d'ondes impulsionnels :

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = \int d\overrightarrow{p}' \mathcal{K}(\overrightarrow{r}, t, \overrightarrow{p}', t_0) \cdot \psi(\overrightarrow{p}', t_0)$$

Ce propagateur "mixte" est alors vecteur propre de $\overrightarrow{P_{op}}$ pour la valeur propre \overrightarrow{p}' , et on obtient son expression comme au paragraphe précédent :

$$\mathcal{K}(\overrightarrow{r}, t, \overrightarrow{p}', t_0) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} [\det(A)]^{-1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(\overrightarrow{r}, t, \overrightarrow{p}', t_0) \right] \quad (2.108)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\vec{r}, t, \vec{p}', t_0) &: = \frac{m}{2} \left[(r - \xi) C A^{-1} (r - \xi) + 2 (r - \xi) \widetilde{A^{-1}} \frac{p'}{m} - \frac{p'}{m} A^{-1} B \frac{p'}{m} \right] \\ &+ m \phi(r - \xi) + \frac{m}{2} \int_{t'}^t dt'' (\phi \beta \phi + \xi \gamma \xi + 2g\xi) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Finalement, on peut résumer cette partie par le schéma suivant :

1. Solutions de l'éq. de Schrödinger = Vect. Propres des Op. Int. premières

2. Ensemble d'Op. Int. premières pour H_{ext} quelconque :

$$\sum_{i,j,k,\dots=1,2} W_{ijk\dots} V_i^- \cdot V_j^- \cdot V_k^- \dots \quad \text{avec} \quad \vec{V}^- := \begin{pmatrix} \vec{R}_{op}^- \\ \vec{P}_{op}^- \end{pmatrix}$$

3. Vecteurs Propres de $W_1 \cdot \vec{R}_{op}^- + W_2 \cdot \vec{P}_{op}^-$

↓

H_{ext} quelconque : évolution des paquets d'ondes

↓

H_{ext} au plus quadra : th. ABCD

↓

Cas particuliers : $\begin{cases} W_1 = 1, W_2 = 0 & \implies \text{propag. } K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0) \\ W_1 = 0, W_2 = 1 & \implies \text{propag. } \mathcal{K}(\vec{r}, t, \vec{p}', t_0) \end{cases}$

Chapitre 3

Théorie et modélisation des séparatrices laser

Cet important chapitre est consacré à l'étude et à la modélisation des séparatrices laser, et plus particulièrement des séparatrices à ondes laser progressives.

Le premier objectif est de comprendre le fonctionnement de telles séparatrices en présence de divers champs inertiels et gravitationnels (ceux du chapitre précédent), et, d'une façon générale, d'approfondir la compréhension de l'interaction lumière-matière en présence de tels champs extérieurs. On examinera en particulier la structuration du paquet d'ondes atomique initial en plusieurs paquets d'ondes et on mettra en évidence leurs caractéristiques principales (vitesses de groupe, sélectivité complexe en impulsion).

Le second objectif est lié à la modélisation des interféromètres atomiques, et consiste à fournir une modélisation des séparatrices qui soit consistante avec le niveau de précision (actuel ou envisagé) de ces appareils. On examinera, entre autres, la possibilité de décrire la triple interaction "laser - matière - champs inertiels et gravitationnels" sous forme d'une interaction effective instantanée (théorème *ttt* champ fort généralisé), dont l'utilité apparaîtra plus clairement au chapitre suivant (lors du calcul du déphasage interférométrique).

3.1 Introduction

Le concept de séparatrice atomique est très large, et peut d'ailleurs, comme l'a souligné Bordé dès 1997 [102], être étendu à tout processus de diffusion de particules par un potentiel. On peut ainsi écrire très généralement :

$$A(m_A, E_A, \vec{p}_A) + B(m_B, E_B, \vec{p}_B) \longrightarrow C(m_C, E_C, \vec{p}_C) + D(m_D, E_D, \vec{p}_D)$$

où A est la particule incidente (possédant une masse effective m_A , une énergie E_A , et une impulsion \vec{p}_A liée à E_A par une relation de dispersion), B et C les quasi-particules du champ extérieur cohérent (servant de potentiel diffuseur), et D la particule diffusée. Ce schéma s'applique alors facilement à la diffusion de neutrons par des phonons, et à la diffusion d'atomes par des photons. Dans le cas de la diffusion d'atomes à deux niveaux par des photons, on a ainsi : A = atome dans l'état fondamental, D = atome dans l'état excité et B = photon absorbé (un autre photon C est présent lorsque la transition atomique est à deux photons).

On peut finalement toujours écrire l'action d'une séparatrice atomique sous la forme d'une **matrice S entre quatre champs quantiques**. Dans notre cas, la motivation d'une telle description est double. On veut en effet comprendre comment est diffusé un paquet d'ondes atomique par un champ laser en présence de champs inertiels et gravitationnels, mais on veut également et surtout pouvoir fournir une modélisation pratique et pertinente - sous forme de matrice S - de ces séparatrices atomiques, en vue de la modélisation des interféromètres atomiques.

La plupart des modélisations actuelles ne tiennent en effet pas compte de nombreux effets importants. Ainsi, jusqu'à très récemment (2003), le niveau de précision des appareils (existants ou envisagés) utilisant de telles séparatrices laser n'en nécessitait pas une modélisation très fine, et seuls étaient pris en compte les effets suivants :

- la division du paquet d'ondes incident en deux paquets d'ondes,
- dont l'un est égal au paquet d'ondes incident, à un facteur d'amplitude près,
- et l'autre diffère du paquet d'ondes incident par un changement :
 - d'impulsion centrale,
 - d'amplitude,
 - d'état interne,
 - et de phase.

Cette modélisation simplifiée des séparatrices - qualifiée "d'infiniment fine", car elle revient à littéralement *imprimer instantanément* une phase et une amplitude effectives sur le paquet d'ondes incident - laisse cependant croire qu'elle rend compte de leurs effets principaux, ou qu'elle en est une approximation au premier ordre. Mais il n'en est rien, car d'une part, cette modélisation infiniment fine ne rend pas compte d'effets majeurs comme la sélectivité en vitesse transverse ou la structuration en plusieurs paquets d'ondes de chacun des états de sortie ; d'autre part, car elle n'est pas équivalente à une théorie du premier ordre, comme le montre l'étude en champ faible de la référence [79].

Cette autre modélisation - le théorème *ttt* champ faible [99, 79] - a vu récemment le jour avec pour buts, premièrement de donner une *justification* de la modélisation infiniment fine précédente (et d'en préciser les limites), deuxièmement de fournir une modélisation des séparatrices - en champ faible et en négligeant tout effet dispersif autre que l'étalement naturel - *commune aux deux types* de séparatrices connues : spatiales et temporelles.

Bien que cette seconde modélisation soit plus claire et pratique que la modélisation *infiniment fine* (elle est utilisée dans les références [80] et [81] pour la modélisation des interféromètres atomiques), elle ne rend pas compte, entre autres, des effets :

- du laser en champ fort (traitement non-perturbatif, avec pour conséquences : sélectivité en vitesse transverse, structuration en plusieurs paquets d'ondes, etc),

- de la dépendance temporelle et spatiale de l'amplitude du champ laser réel,
- de la structure du paquet d'ondes atomique incident,
- des champs inertiels et gravitationnels présents lors de l'interaction.

A ce titre, signalons qu'il existe plusieurs études - en champ laser fort - concernant certains de ces effets. Par exemple, les études [53, 54, 101] traitent le cas de séparatrices soumises à un champ gravitationnel constant et uniforme (solution exacte sous forme de fonctions spéciales dans le cas temporel, et approche WKB dans le cas spatial), et les études [30, 52] négligent les effets dispersifs mais prennent en compte la dépendance en la structure temporelle du champ laser (cas spatial et temporel). Dans tous les cas cependant, la structuration particulière du paquet d'ondes incident en plusieurs paquets d'ondes de formes différentes n'est pas traitée (la présence de deux ou quatre vitesses de groupe distinctes est toutefois étudiée dans [102, 103]), et une modélisation de cet effet reste encore à faire même dans le cas le plus simple (sans champs inertiel, ni gravitationnel, et avec une impulsion laser en forme de créneau temporel).

A la lumière de ce qui s'est passé en optique neutronique, où la modélisation de l'action des séparatrices s'est finalement révélée primordiale pour interpréter correctement les déphasages interférométriques (par la prise en compte de l'effet Borrmann par exemple [104, 105, 15]), il est nécessaire d'aller au delà de ces modélisations qui ne fournissent pas une description *complète* de l'action réelle des séparatrices.

En plus du travail de compréhension, de compilation et de mise à jour des différents travaux sur le sujet de l'interaction laser - matière, il apparaît donc nécessaire d'étudier en détail l'action d'une séparatrice atomique en champs (laser, inertiels et gravitationnels) forts - en tenant également compte de la structure du laser et du paquet d'ondes atomique - pour finalement en dégager les caractéristiques principales et en fournir une modélisation pertinente.

Nous verrons d'abord dans ce chapitre comment mettre en équation le problème de la triple interaction "atomes - laser - champs inertiels et gravitationnels" (partie 3.2), puis comment la transformer (par différents changements de représentations) en une équation :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$$

plus simple à résoudre (partie 3.3), avant de résoudre cette équation (numériquement ou par des développements, des approximations ou des solutions exactes) (partie 3.4) et de revenir dans la représentation initiale (*schéma ttt*, partie 3.5). Nous étudierons - et modéliserons - ensuite la solution en champ fort obtenue dans le cas particulier d'une séparatrice à champ constant (impulsion laser créneau de durée τ) sans aucun champ inertiel ou gravitationnel (cas "libre", partie 3.6), et nous verrons finalement comment appliquer cette démarche au cas général décrit plus haut (partie 3.7).

3.2 Cadre de l'étude et approximations considérées

Comme on l'a souligné dans l'introduction, une séparatrice peut être vue comme un mélange à plusieurs ondes, où certaines jouent le rôle d'*ondes incidentes* (associées aux particules incidentes qui doivent être diffusées) et où d'autres jouent le rôle de *potentiel diffuseur* ou *potentiel séparant* (conduisant à une "séparation" plus ou moins efficace des ondes incidentes). D'une façon plus concrète, on a généralement affaire à un *système atomique à plusieurs niveaux soumis à un certain potentiel d'interaction (qui couple les niveaux entre eux), en présence de processus de relaxation et de divers champs extérieurs (inertiels, gravitationnels...), et dont la source d'évolution peut être décrite par un Hamiltonien* (les termes de cette expression sont explicités dans la suite).

Si ce cadre de travail permet effectivement de mettre en équation le problème de la triple interaction "matière - potentiel séparant - champs inertiels et gravitationnels", il est cependant peu utilisé sous cette forme, qui est trop générale. Ainsi, d'un point de vue pratique, de nombreuses restrictions et approximations sont couramment utilisées de façon plus ou moins explicite. Dans ce mémoire par exemple, nous étudierons cette triple interaction fondamentale sous la forme d'une **équation de Schrödinger à deux composantes** :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) + V_{em}(\vec{r}_{op}, t)) |\Psi(t)\rangle \quad (3.1)$$

$$\text{avec :} \quad |\Psi(t)\rangle = a(t) |a\rangle + b(t) |b\rangle$$

traduisant l'action d'**ondes laser progressives (quasi-résonnantes) sur des atomes à deux niveaux effectifs** (a et b).

Le but de cette partie est alors précisément de mettre en exergue les diverses restrictions et approximations les plus courantes conduisant du cadre général décrit plus haut à cette simple équation de Schrödinger. Nous procéderons en deux étapes :

- en précisant premièrement le sens de l'expression :

"système atomique à plusieurs niveaux soumis à un certain potentiel d'interaction (qui couple les niveaux entre eux), en présence de processus de relaxation et de divers champs extérieurs (inertiels, gravitationnels...), et dont la source d'évolution peut être décrite par un Hamiltonien"

- en détaillant l'origine et les conséquences des diverses approximations - et restrictions - considérées dans ce mémoire.

3.2.1 Précisions concernant le cadre général d'étude

Il est important de connaître le sens réel des différents termes de l'expression précédente. En effet, certains sont génériques et font référence à de plus vastes phénomènes physiques que ce qui peut paraître à première vue. On peut alors se poser les questions suivantes : quelles sont les ondes de matière concernées par ce type de séparatrice ? A quoi correspondent réellement les niveaux entre lesquels s'effectuent les transitions ? Quels sont les différents types de potentiel d'interaction et de séparatrices atomiques ? Enfin, qu'entend-on vraiment par "*processus de relaxation*" ?

Ce paragraphe, sans prétendre à l'exhaustivité, vise à répondre à ces questions.

“Système atomique”

Le mot “atomique” est ici générique, et lorsque l’on parle de “système atomique”, on fait en fait référence à des particules matérielles, seules ou en groupes. Ces particules de matière peuvent alors être des atomes (neutres ou non), des molécules, ou toute autre **quantité de matière qu’on peut manipuler de façon cohérente**¹. De plus, les ondes de matière considérées peuvent être issues de sources cohérentes (bosonique ou fermionique), partiellement cohérentes ou incohérentes (de telles sources atomiques sont modélisées au paragraphe 4.1.1).

D’une façon générale, le choix de la matière que l’on cherche à “séparer” **dépend du type de séparatrice considéré**. Ainsi, d’un point de vue mécanique (séparation par diffraction grâce à des microstructures), sont utilisées toutes sortes d’atomes (Na, He métastable, K...), des molécules (I₂, Na₂, H₂, Li₂, C₆₀, C₇₀...), et même récemment des biomolécules (Porphyrin...). Pour les techniques utilisant des champs magnétiques et électriques statiques (voir ci-après), il suffit généralement que les atomes et molécules aient un spin non nul (gaz rares, alcalins, chrome...) ou qu’ils soient ionisés. Enfin, pour la technique de séparation qui nous intéresse plus particulièrement, à savoir celle qui est basée sur l’interaction laser - matière, on compte aujourd’hui plusieurs dizaines de transitions atomiques effectivement utilisées. Les atomes peuvent être des alcalins (Li, Na, K, Rb, Cs) ou non (Ca, Mg, Sr...), et le choix de l’un de ces atomes est directement lié à la qualité des transitions entre niveaux hyperfins (spécialement pour les horloges atomiques), et à la possibilité de contrôler facilement les paramètres externes (vitesse centrale et dispersion en vitesse par exemple) du nuage atomique initial.

“Niveaux atomiques”

Les niveaux atomiques dont on parle ici correspondent aux **états propres de l’Hamiltonien atomique**, ie de l’Hamiltonien décrivant le système atomique seul (sans potentiel diffuseur, ni potentiel extérieur). Les énergies associées à ces états peuvent être discrètes et/ou continues, et peuvent être dégénérées ou présenter une structure hyperfine (cette structure hyperfine est très intéressante, car elle permet d’obtenir des niveaux stables, ie de grande durée de vie).

Selon le type de séparatrice considéré, seul un petit nombre de niveaux peut être concerné par l’interaction. Souvent on peut même se restreindre à deux niveaux. C’est le cas par exemple des transitions à un photon entre un état fondamental et un état excité (induites par une onde laser quasi-résonnante avec la fréquence de transition atomique), ou encore des transitions Raman à trois niveaux, dont un peut être éliminé adiabatiquement (les deux niveaux sont alors des niveaux effectifs).

En fait, les niveaux atomiques ne correspondent pas forcément à des états propres d’énergie interne. Ils peuvent faire référence également aux états propres d’un autre opérateur, comme celui d’impulsion. Il est alors préférable de parler d’**états d’énergie-impulsion** (E, \vec{p}) plutôt que de niveaux atomiques, et il est judicieux de représenter les transitions possibles entre ces états à l’aide de diagrammes d’énergie-impulsion [106, 102, 35].

Sur ces diagrammes sont représentées les courbes donnant l’énergie en fonction d’une composante de l’impulsion. L’énergie des atomes est ainsi une fonction hyperbolique de l’impulsion :

$$\vec{p} \longrightarrow \sqrt{E^2 + \vec{p}^2 c^2}$$

(expression relativiste), tandis que l’énergie des quasi-particules (photons par exemple) dépend linéairement de l’impulsion :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \longrightarrow \hbar k.c = \hbar \omega$$

¹ En maîtrisant les variations de phase de l’onde de De Broglie associée lors de l’interaction avec le potentiel diffuseur.

(droite de pente $\pm c$).

Il est alors possible de représenter les énergies associées à plusieurs niveaux atomiques internes sur le même diagramme (voir la figure 3.1) :

$$\begin{aligned} \text{niveau } a & : \quad \vec{p} \longrightarrow \sqrt{E_a^2 + \vec{p}^2 c^2} \\ \text{niveau } b & : \quad \vec{p} \longrightarrow \sqrt{E_b^2 + \vec{p}^2 c^2} \end{aligned}$$

(lorsque l'on néglige l'énergie cinétique des atomes (approximation de Raman-Nath par exemple), ces courbes sont des droites horizontales d'ordonnées E_a et E_b ; et lorsque l'on néglige les effets relativistes, ces courbes sont des paraboles, voir le paragraphe 2.1²).

En superposant les différentes courbes précédentes, on peut ainsi visualiser les transitions possibles entre les divers états d'énergie-impulsion (voir les exemples donnés ci-après).

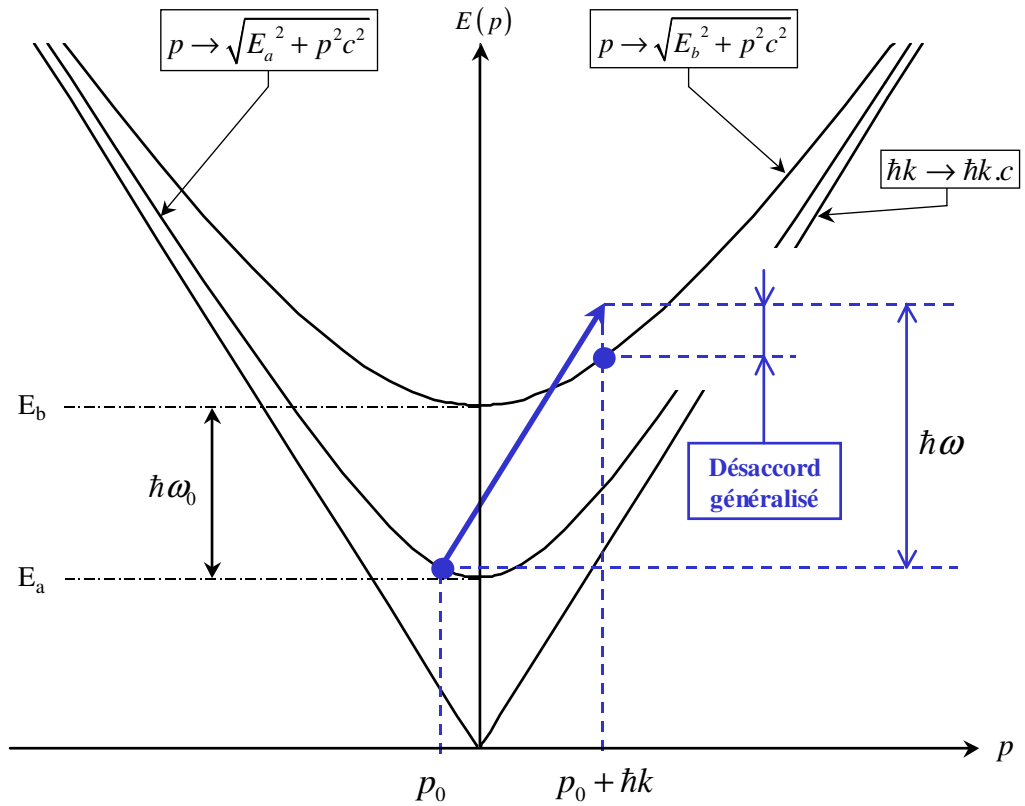


FIG. 3.1: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à deux niveaux soumis à une onde laser quasi-résonnante progressive.

Les transitions peuvent ainsi s'effectuer entre des états :

- différant uniquement par leur énergie interne (par exemple, pour une transition laser à deux photons sans effet de recul, ie lorsque les photons sont issus de deux ondes laser contre-propageantes, voir figure 3.2),

² Afin de respecter les écarts énergétiques entre ces niveaux atomiques (pour $\vec{p} = \vec{0}$), tout en respectant le comportement commun de l'énergie pour les grandes valeurs de l'impulsion (pour p tendant vers l'infini, les courbes paraboliques doivent être tangentes aux droites de pente $\vec{p} \longrightarrow \pm c \cdot \vec{p}$), une masse au repos effective est alors associée à chaque niveau atomique interne :

$$E_a = m_a c^2 \quad \text{et} \quad E_b = m_b c^2$$

(voir le paragraphe 2.1 pour une définition plus pertinente des masses au repos).

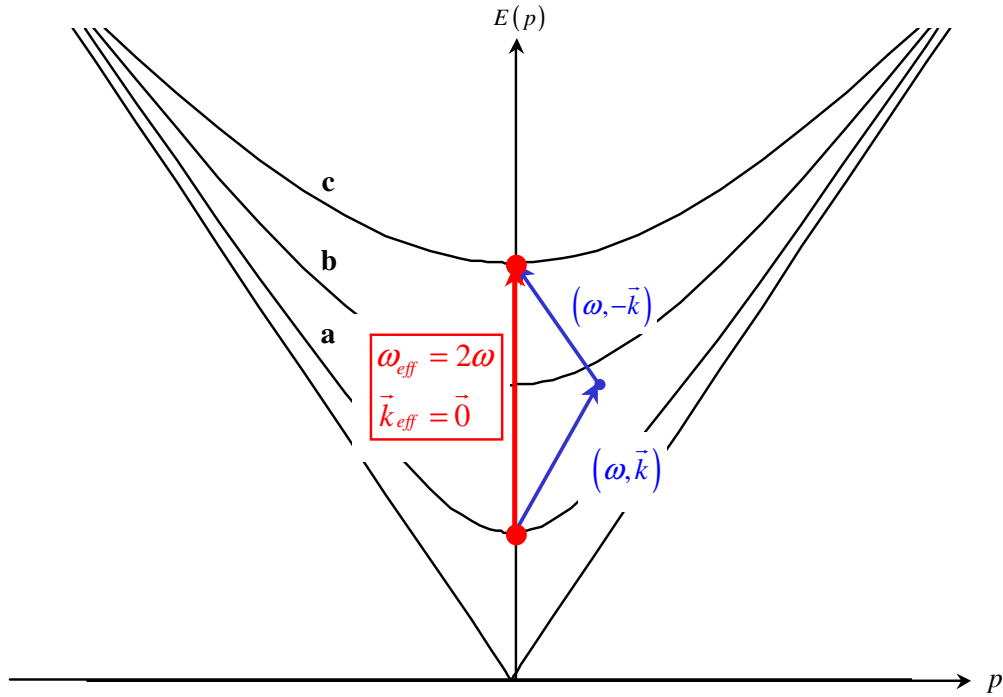


FIG. 3.2: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à trois niveaux soumis à deux ondes laser (progressives) contra-propageantes : transition à deux photons sans effet Doppler. L'onde laser progressive équivalente est également représentée.

- différant uniquement par leur état d'impulsion (par exemple, lorsque des atomes sont diffractés par une microstructure mécanique ou lumineuse : régimes de Kapitza-Dirac ou de Bragg, voir figures 3.3, 3.4 et 3.5),
- différant à la fois par leur état d'énergie interne et par leur état d'impulsion [102] (par exemple, pour des transitions Raman à deux photons du type de celle représentée sur la figure 3.6).

Les états précédents peuvent être considérés comme des états intriqués, au sens d'une intrication “interne-externe” des degrés de liberté du système atomique (degrés de liberté internes - degrés de liberté externes). De la même façon, il faut également tenir compte du couplage entre les états atomiques et le potentiel diffuseur, les états caractéristiques entre lesquels s'effectuent les transitions étant en fait des **états intriqués** “atomes-potentiel” (état propre atomique - état propre du potentiel diffuseur). L'exemple le plus courant est l'intrication des états atomiques avec les états de Fock du champ électromagnétique quantifié, lorsque celui-ci est utilisé comme séparatrice.

“potentiel diffuseur” : les diverses techniques de séparation atomique

Le rôle du potentiel diffuseur est d'induire des transitions entre les états caractéristiques décrits ci-dessus (niveaux atomiques internes, états d'énergie-impulsion, états intriqués...), pour “séparer” une onde matérielle incidente en une superposition d'ondes matérielles distinctes. Il existe alors de nombreuses techniques de séparation atomique (et moléculaire), qui correspondent chacune à un type de potentiel diffuseur.

Ces diverses techniques sont en fait liées aux développements de l'**optique atomique** - par analogie avec les optiques photoniques, électroniques et neutroniques - ie du domaine de la physique qui traite de la réalisation d'éléments optiques, tels que les lentilles et les séparatrices (miroirs et lames semi-réfléchissantes), dans le but notamment de réaliser des interféromètres atomiques (senseurs inertiels

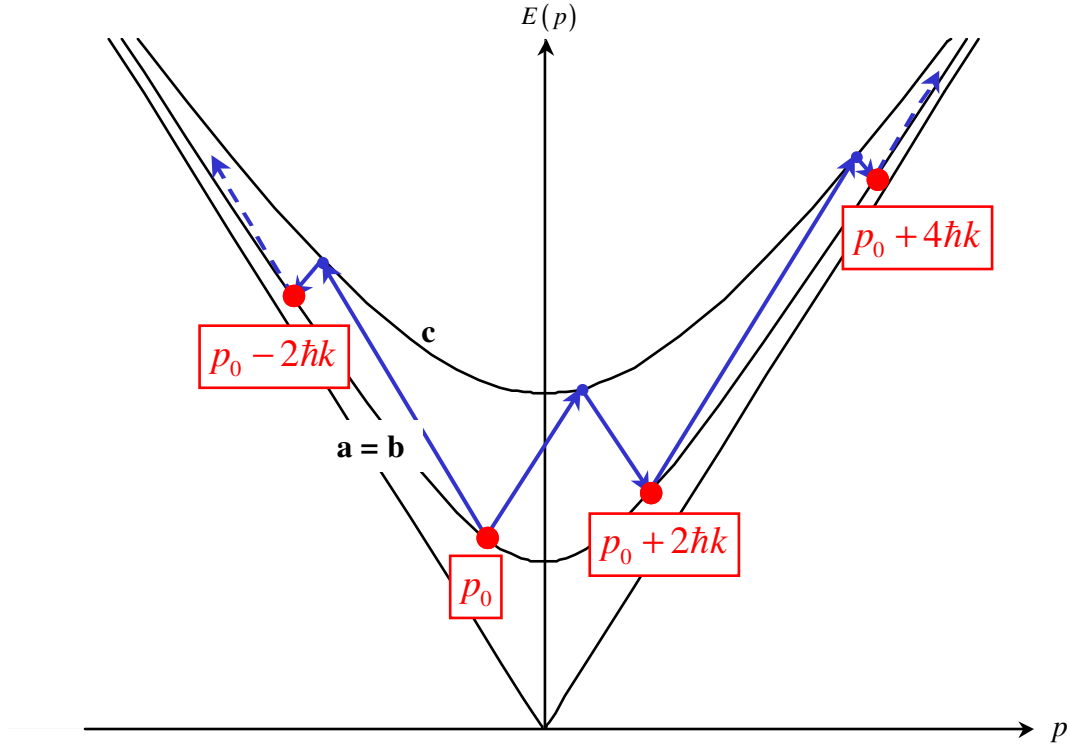


FIG. 3.3: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à deux niveaux soumis à une onde laser stationnaire : régime de Kapitza-Dirac.

et horloges atomiques), et plus généralement de toute une nouvelle gamme d'éléments dissipatifs (ralentissement, piégeage, refroidissement) n'ayant pas forcément d'analogues dans les autres types d'optiques.

Comme ces éléments d'optique atomique, les séparatrices s'appuient sur essentiellement deux propriétés des atomes (ou des molécules) :

- leur aspect ondulatoire (grâce à la relation de de Broglie),
- leur interaction avec des champs extérieurs, électromagnétiques (statiques ou non) ou matériels.

Les trois principaux types de séparatrices connues à ce jour sont alors :

1. celles utilisant l'**interaction atomes - matière** : diffraction par des microstructures périodiques [107, 108, 109, 110, 111]
2. celles basées sur l'interaction entre des atomes possédant un moment magnétique ou dipolaire électrique, et des **champs électriques ou magnétiques statiques** [112, 113, 114, 115] : effet Stern et Gerlach transverse ou longitudinal, miroirs magnétiques, miroirs pour molécules polaires...
3. celles basées sur l'**interaction résonnante ou quasi-résonnante entre atomes et champs laser** : effet Stern et Gerlach optique, miroirs à ondes évanescentes, diffraction par ondes stationnaires ou progressives (en fonctionnement spatial et/ou temporel)...

Comme nous le verrons par la suite, c'est sur ce troisième type d'interaction que nous axerons notre étude, et plus généralement sur les séparatrices pour lesquelles l'approximation à deux ondes est valide.

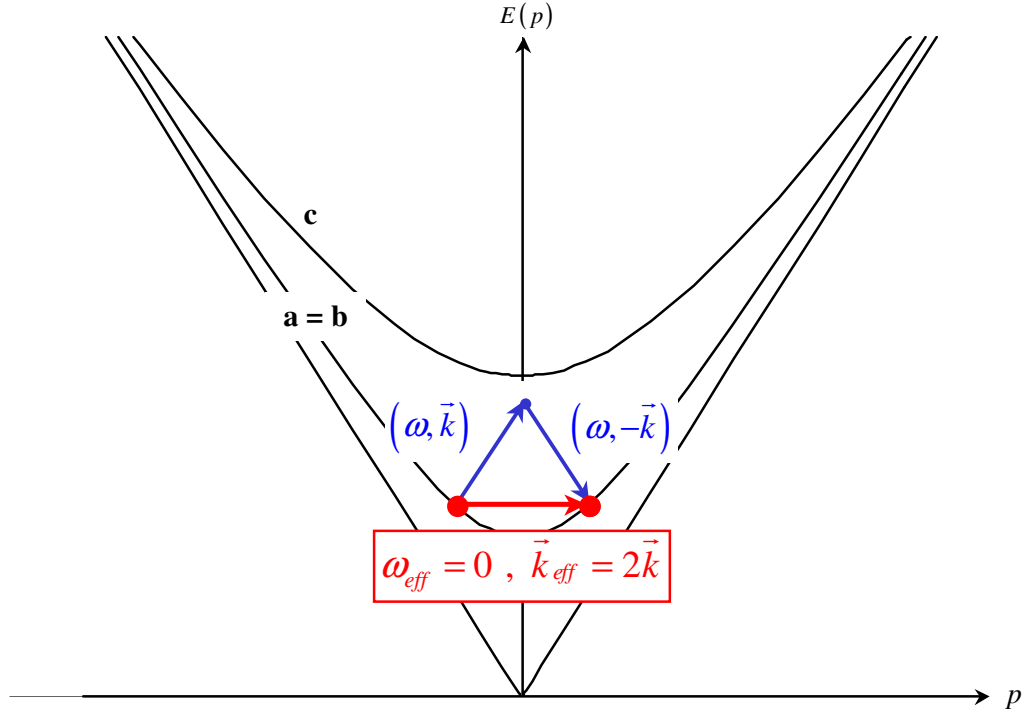


FIG. 3.4: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à deux niveaux soumis à une onde laser stationnaire : diffraction de Bragg du premier ordre. L'onde laser progressive équivalente est également représentée.

“Processus de relaxation”

Ces processus résultent de couplages particuliers (entre atomes, entre les atomes et l'environnement extérieur...) qui entraînent une perte de cohérence (due à une modification aléatoire de la phase atomique) et/ou une perte de signal (perte de contraste interférométrique par exemple, due à l'absorption des atomes avant la fin de l'interféromètre).

Cette dégradation du “signal” a ainsi plusieurs origines :

- la **désexcitation spontanée** des niveaux atomiques excités
- les **collisions** entre atomes
- l'**interaction des atomes avec le réseau cristallin**, quand il y en a un
- l'**absorption** des atomes par les microstructures matérielles
- ...

Lorsque l'on ne peut pas négliger ces processus de relaxation, il est nécessaire d'utiliser une description de l'évolution atomique en termes d'**opérateur densité** (le formalisme des fonctions d'ondes ne permet pas en effet de rendre compte correctement de ces phénomènes) et l'équation d'évolution correspondante peut être non-linéaire.

3.2.2 Approximations et restrictions considérées

Le cadre très général décrit au paragraphe précédent est peu utilisé tel quel, car il est peu commode (multiples niveaux atomiques, potentiel diffuseur sans forme explicite, possible non-linéarité de l'équation d'évolution atomique...). En fait, il est souvent possible de simplifier ce cadre d'étude en

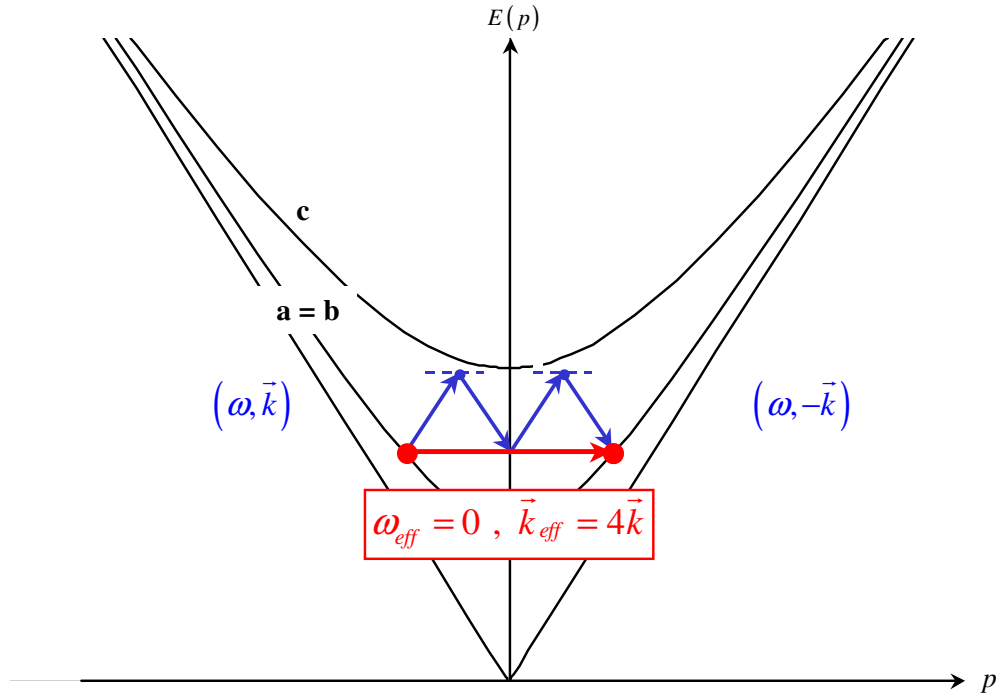


FIG. 3.5: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à deux niveaux soumis à une onde laser stationnaire : diffraction de Bragg du second ordre. L'onde laser progressive équivalente est également représentée.

se restreignant à un certain type de séparatrice. Moyennant certaines approximations justifiées, il est alors possible d'obtenir une équation d'évolution simple entre deux états atomiques effectifs.

L'objectif de ce paragraphe est de préciser le type de séparatrice que l'on compte modéliser par la suite, ainsi que les approximations qui permettent de passer du cadre très général décrit ci-dessus à l'équation de Schrödinger 3.1.

Approximation à deux niveaux, approximation à deux ondes

On va supposer par la suite que le potentiel diffuseur couple principalement deux niveaux atomiques (interaction quasi-résonnante avec ces niveaux, dont la durée de vie est supposée très longue), et plus généralement **deux états d'énergie-impulsion différents** (approximation à deux ondes). Le couplage peut être direct ou non, et ces deux niveaux (ou états) peuvent être en fait des **niveaux effectifs**.

Ce modèle rend compte de nombreux cas expérimentaux. Par exemple :

- pour deux états (E, \vec{p}) couplés directement (voir figure 3.1),
- pour deux états (E, \vec{p}) couplés indirectement (transitions Raman avec changement d'énergie interne, voir figure 3.6),
- ou pour deux états d'impulsion (\vec{p}) couplés indirectement (transitions Raman sans changement d'énergie interne, voir figures 3.4 et 3.5).

Cette approximation à deux ondes permet ainsi de rendre compte de l'action de séparatrices spatiales (microstructures périodiques matérielles ou ondes électromagnétiques stationnaires) lorsqu'elles fonctionnent en **régime de Bragg** (dans ce cas en effet, la conservation de l'énergie interdit la présence de plus de deux ordres de diffraction différents, et l'approximation à deux ondes est valide).

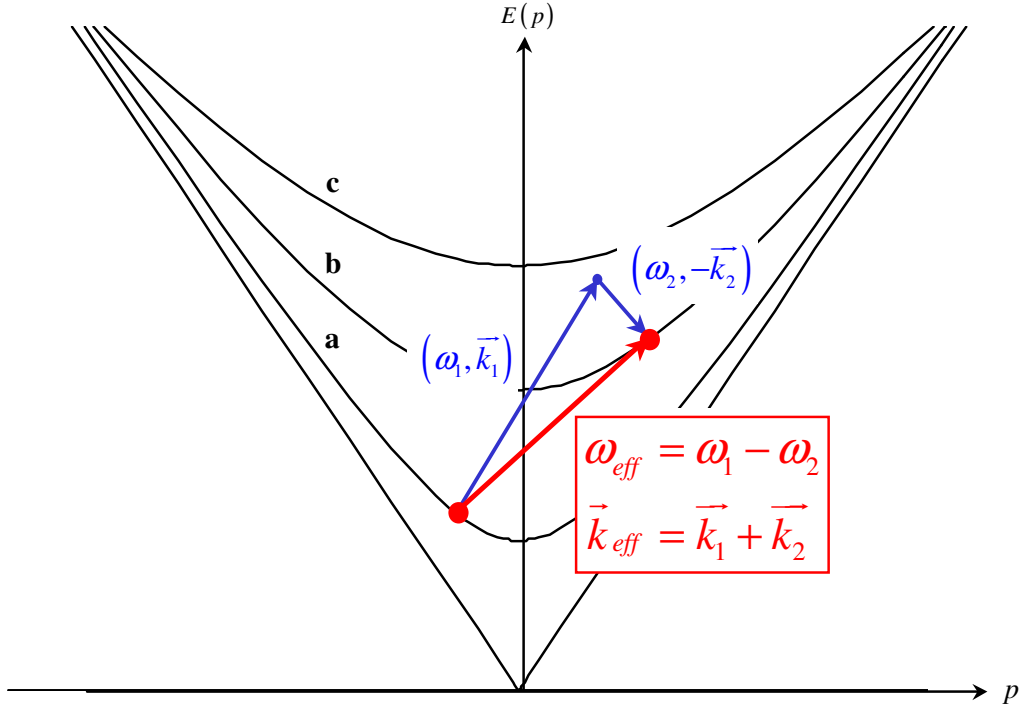


FIG. 3.6: Diagramme d'énergie-impulsion d'un atome à trois niveaux soumis à deux ondes laser contra-propageantes : transition Raman à deux photons. L'onde laser progressive équivalente (ou effective) est également représentée.

Type de séparatrice envisagé et onde laser progressive équivalente

Dans ce mémoire, nous étudierons essentiellement l'**interaction entre des atomes à deux niveaux effectifs et des ondes laser progressives effectives**.

Mais ce cas en englobe beaucoup d'autres. En effet, comme l'a souligné Bordé en 1997 [102], l'évolution d'un atome à plusieurs niveaux effectuant une transition multiphotonique (grâce à plusieurs ondes lasers progressives *ou* stationnaires), pour laquelle les niveaux atomiques intermédiaires peuvent être éliminés adiabatiquement, est équivalente à celle d'un atome à deux niveaux effectifs soumis à une onde laser progressive effective (transition à un seul photon effectif).

Par exemple, dans le cas d'une transition Raman entre deux états (E, \vec{p}) (voir figure 3.6), on peut en effet montrer que [45, 46], lorsque l'état intermédiaire est fortement hors-résonance, cette interaction à deux photons (entre trois vrais niveaux) est équivalente à une transition à un photon "effectif" entre les deux états (E, \vec{p}) . Le **photon effectif** n'est bien sûr pas réel (il ne respecte pas la relation $k = \omega/c$), mais la transition a toutes les caractéristiques d'une transition due à une onde progressive effective.

Quant aux séparatrices atomiques à ondes laser stationnaires, on a vu qu'en régime de Bragg, on obtenait un schéma identique à celui des transitions Raman, mais pour des états (E, \vec{p}) de même énergie interne (*transition Raman dégénérée*, voir figures 3.4 et 3.5). Le photon effectif de l'onde laser progressive effective est alors un photon très particulier : il a une fréquence nulle.

Finalement, pour de telles séparatrices, le **caractère spatial ou temporel des ondes laser réelles apparaît seulement dans l'amplitude** de l'onde laser progressive effective. Cette amplitude sera ainsi, selon le cas, modulée spatialement (sous forme d'un créneau spatial par exemple) et/ou temporellement (sous forme d'une impulsion de type créneau, Gaussienne, Blackman...).

Bien que l'équation d'évolution qui leur est associée soit la même, ces deux cas ne sont cependant pas équivalents. En effet, dans le cas libre par exemple (ie sans autre champ extérieur que celui

du laser), la relation de conservation d'énergie-impulsion des atomes (avant et après l'absorption du photon (ω, \vec{k}) faisant passer l'atome de l'état (E_a, \vec{p}) à l'état $(E_b, \vec{p} + \hbar \vec{k})$) s'écrit simplement (voir figure 3.1) :

$$E_b + \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k})^2}{2m} = E_a + \hbar\omega + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

ou :

$$\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m = 0$$

avec $\hbar\omega_0 := E_b - E_a$. Cette relation donne en fait une **condition** sur \vec{p} , ω et \vec{k} pour que l'atome absorbe bien le photon effectif.

Lorsque ω et \vec{k} sont parfaitement définis (onde laser monochromatique et plane), une seule impulsion atomique est donc autorisée :

$$\begin{array}{ccc} \omega = \omega_L & & \text{un unique } \vec{p} \text{ tel que :} \\ \vec{k} = \vec{k}_L & \implies & \omega_L - \omega_0 - \vec{k}_L \cdot \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}_L}{2} \right) / m = 0 \end{array}$$

Par contre, lorsque l'amplitude de l'onde laser effective est modulée spatialement, la fréquence "absorbée" ω est toujours définie de façon précise ($\omega = \omega_L$), mais ce n'est plus le cas du vecteur d'onde \vec{k} , dont l'imprécision $\Delta \vec{k}$ est reliée à la largeur de la transformée de Fourier de l'amplitude, et la condition précédente est ainsi partiellement relaxée (plus le waist w est petit, plus l'imprécision $\Delta \vec{k}$ est grande) :

$$\begin{array}{ccc} \omega = \omega_L & & \vec{p} \text{ vérifie la condition} \\ k \in [k_L - \pi/w, k_L + \pi/w] & \implies & (\text{partiellement relaxée sur } k) : \\ & & \omega_L - \omega_0 - \vec{k} \cdot \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m = 0 \end{array}$$

De la même façon, lorsque l'amplitude laser est modulée temporellement (de largeur caractéristique τ), le vecteur d'onde "absorbé" \vec{k} est parfaitement défini ($\vec{k} = \vec{k}_L$), mais c'est la fréquence ω qui n'est plus définie de façon précise, et la condition précédente est également relaxée :

$$\begin{array}{ccc} \omega \in [\omega_L - \pi/\tau, \omega_L + \pi/\tau] & & \vec{p} \text{ vérifie la condition} \\ \vec{k} = \vec{k}_L & \implies & (\text{partiellement relaxée sur } \omega) : \\ & & \omega - \omega_0 - \vec{k}_L \cdot \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}_L}{2} \right) / m = 0 \end{array}$$

Dans les deux cas, c'est pour toute une gamme d'impulsions atomiques que la transition est autorisée (on peut dire que les atomes "choisissent" le photon adéquat pour effectuer la transition). Cependant, dans le cas temporel, seule l'impulsion des photons absorbés est connue a priori (la même pour tous les atomes, égale à $\hbar \vec{k}_L$, à cause de la conservation de l'impulsion), et non leur énergie ; alors que dans le cas spatial, c'est l'énergie communiquée aux atomes qui est connue a priori ($\hbar\omega_L$, à cause de la conservation d'énergie), mais pas l'impulsion des photons responsables.

Cette différence est très importante lorsque l'on recherche les vitesses de groupe des paquets d'ondes impulsionnels créés par les séparatrices. Le cas spatial est alors beaucoup plus complexe à modéliser que le cas temporel [30, 103, 101] (l'équation sur l'énergie est en effet du second ordre, alors que l'équation sur l'impulsion est du quatrième ordre), et c'est pourquoi nous ne modéliserons, dans cette étude, que le **cas temporel** (voir les **modélisations ttt champs forts** de la partie 4.1.2).

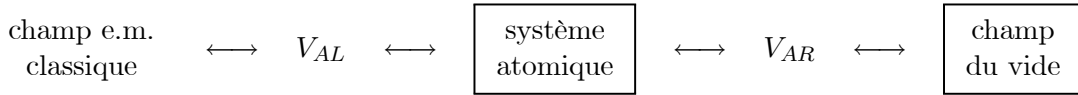
Dans le cadre de la modélisation des interféromètres atomiques, on pourra néanmoins considérer des **séparatrices spatiales**, et on verra en particulier au paragraphe 4.1.2 comment la **modélisation ttt champ faible** rend compte d'une grande partie de leurs effets principaux.

Modélisation de l'onde laser

Le faisceau laser utilisé comme séparatrice sera décrit par la suite comme un **état cohérent du champ électromagnétique quantifié**. En effet, un tel état est non seulement celui qui décrit le mieux un champ laser réel, mais il permet également de décrire d'autres sources, comme les sources classiques (sources micro-ondes par exemple).

On peut alors montrer que l'action de ce champ cohérent quantique sur un atome est équivalente à l'action du champ classique correspondant, auquel s'ajoute le champ quantique du vide [116]. L'interaction entre le champ classique et l'onde atomique est alors à l'origine des processus d'absorption et d'émission induites, et celle entre le champ du vide et l'onde atomique rend compte du phénomène d'émission spontanée (relaxation).

Il est finalement possible d'exprimer l'interaction entre un champ laser et le système atomique à deux niveaux sous la forme d'une **double interaction entre trois systèmes** :



(avec les notations de la référence [116] : V_{AL} et V_{AR} sont les couplages du système atomique au champ électromagnétique classique et au champ du vide).

Il est également possible de considérer une description du champ laser par des **états de Fock** (ie ayant un nombre de photons bien déterminé). Le formalisme et les calculs développés dans les parties qui suivent s'appliquent en effet à deux niveaux effectifs sans qu'il soit précisé si ces niveaux sont des niveaux *habillés* (par les photons, selon la terminologie utilisée par Cohen-Tannoudji dans [116]) ou non.

Les deux niveaux peuvent ainsi correspondre à des états intriqués du type :

$$|\text{état atomique}\rangle \otimes |\text{état à } n \text{ photons d'un mode laser}\rangle := |E, \vec{p}, n\rangle$$

(\otimes désigne le produit tensoriel d'états). Pour un mode laser quasi-résonnant (avec la fréquence de transition des deux niveaux atomiques), on peut alors se limiter à une seule **multiplicité de deux niveaux habillés** :

$$\left\{ |a, \vec{p}, n+1\rangle, |b, \vec{p} + \hbar \vec{k}, n\rangle \right\}$$

où l'absorption d'un photon \vec{k} fait passer le système atomique de l'état $|a, \vec{p}, n+1\rangle$ à l'état $|b, \vec{p} + \hbar \vec{k}, n\rangle$.

Néanmoins cette troisième "étiquette", qui est associée aux deux ondes atomiques principales évoluant dans un interféromètre atomique, est un handicap sérieux pour obtenir des interférences en

sortie. En effet, dans ce cas les deux kets décrivant les ondes atomiques en sortie sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul (il n'y a donc pas d'interférence).

Par contre, on retrouve les interférences en prenant des combinaisons linéaires d'états de Fock pour décrire les champs laser. Il en est ainsi dès que la dispersion sur le nombre de photons est non nulle (dans le cas d'un état cohérent, cette dispersion est due aux fluctuations du champ du vide).

On considérera donc par la suite uniquement des états cohérents pour décrire les faisceaux laser, même si les calculs qui suivent s'appliquent également à une multiplicité de deux niveaux habillés (couplés par une fréquence de Rabi propre à la multiplicité).

Modélisation du couplage atomes - champ laser

Lorsque la longueur d'onde typique du rayonnement électromagnétique est très supérieure aux dimensions caractéristiques de l'atome (ceci est vrai pour les rayonnements micro-ondes ou optiques), il est possible de simplifier l'Hamiltonien d'interaction (entre une onde de matière et un champ classique), en ne gardant que le premier terme de son développement multipolaire, ie le terme dipolaire. Selon cette approximation, dite **approximation dipolaire ou approximation des grandes longueurs d'ondes**, l'Hamiltonien d'interaction peut s'écrire, après un changement de jauge adéquat, sous la forme :

$$V_{em}(\vec{r}_{op}, t) = -\vec{\mu}_{op} \cdot \vec{E}(\vec{r}_{op}, t)$$

où $\vec{\mu}_{op}$ est l'opérateur dipolaire électrique, et $\vec{E}(\vec{r}, t)$ le champ électrique classique.

Cette approximation dipolaire n'est en fait justifiée que si l'on néglige - en plus des termes quadrupolaires, etc - les termes de couplage "spin-champ magnétique", ie si l'on néglige les effets liés au **spin** des électrons de l'atome. Par la suite, nous négligerons ces effets et considérerons seulement l'**Hamiltonien dipolaire électrique**.

Processus de relaxation négligés

Parmi les diverses approximations que nous sommes amenés à faire, celle-ci est fondamentale car elle va nous permettre d'employer un formalisme de fonctions d'ondes, plus simple à manipuler que celui basé sur l'opérateur densité. Dans ce mémoire, nous négligerons en effet tous les processus de relaxation vus auparavant.

Cette approximation est justifiée par le fait qu'il n'y a **pas d'absorption** d'atomes par l'onde laser, et qu'il est possible d'**ignorer les collisions** entre atomes du fait que le milieu atomique est supposé très dilué. D'autre part, le processus d'émission spontanée peut être négligé lorsque la **durée de vie des niveaux atomiques effectifs** est beaucoup plus **longue** que la durée d'interaction laser. En fait, il faut comparer l'inverse des largeurs radiatives (associées à ces deux niveaux effectifs) au temps de vol total dans l'interféromètre atomique (ie entre la coupure du potentiel piégeant de la source atomique et la fin du processus de détection, voir paragraphe 4.1.4). On supposera cette condition satisfaite pour les interféromètres atomiques décrits dans ce mémoire, ce qui nous permettra, entre autres, comme on l'a déjà souligné, de décrire l'évolution du système atomique considéré par une équation de Schrödinger.

Bilan

Partant d'une définition *théorique* d'une séparatrice atomique, on a montré comment passer de ce cadre général à une **équation de Schrödinger portant sur deux niveaux atomiques seulement**, le couplage entre le champ de matière et le champ laser s'écrivant sous la forme d'un **Hamiltonien dipolaire électrique** V_{em} :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) + V_{em}(\vec{r}_{op}, t)) |\Psi(t)\rangle$$

avec H_0 l'**Hamiltonien interne**, H_{ext} l'**Hamiltonien externe**, et où le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ donné plus haut représente une **onde laser progressive** (équivalente).

En fait, nous avons implicitement supposé que les champs extérieurs (inertiels et gravitationnels) décrits par H_{ext} ne modifiaient ni les niveaux internes de l'atome, ni le champ laser. Cette approximation est néanmoins justifiée par le fait que les champs extérieurs considérés sont très faibles.

Dans la partie suivante, nous présenterons la dernière approximation importante de notre étude : l'approximation des ondes tournantes ou approximation séculaire. Elle permettra - après passage dans le référentiel tournant - de simplifier encore plus l'équation d'évolution du système atomique (l'équation obtenue sera alors l'équation principale sur laquelle portera notre étude).

3.3 Différentes formes de l'équation à résoudre

Nous avons vu, dans la partie précédente, que le problème de l'interaction entre des atomes et des champs électromagnétiques, inertiels et gravitationnels (ceux que l'on considère dans notre étude), pouvait se ramener à la résolution de l'équation de Schrödinger suivante :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) + V_{em}(\vec{r}_{op}, t)) |\Psi(t)\rangle} \quad (3.2)$$

où H_0 est l'Hamiltonien interne ($E_b > E_a$) :

$$H_0 := \begin{pmatrix} E_b & 0 \\ 0 & E_a \end{pmatrix} = \frac{E_a + E_b}{2} 1 + \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_3$$

qui rend compte des **deux niveaux énergétiques effectifs** des atomes, et où l'on a posé :

$$\omega_0 := \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

pour désigner la fréquence de transition atomique ; où H_{ext} est l'Hamiltonien externe que l'on a établi au chapitre 2, et qui modélise les potentiels inertiels et gravitationnels auxquels sont soumis les atomes :

$$H_{ext} := \frac{1}{2m} \vec{p}_{op} \overset{\rightarrow}{\beta}(t) \vec{p}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \overset{\rightarrow}{\gamma}(t) \vec{r}_{op} - \vec{r}_{op} \overset{\rightarrow}{\alpha}(t) \vec{p}_{op} - m \vec{g}(t) \vec{r}_{op} + \vec{f}(t) \vec{p}_{op}$$

(où on a posé $m = m^*$, voir partie 2.1) et où V_{em} est l'Hamiltonien d'interaction électromagnétique, à l'approximation dipolaire électrique, qui rend compte de l'effet du champ laser quasi-résonant sur les atomes.

La résolution directe de (3.2) n'est pas aisée pour essentiellement deux raisons. Premièrement, parceque l'Hamiltonien $H_{ext} + V_{em}$ fait intervenir des **opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} qui ne commutent pas entre eux**, et qu'il n'est donc pas possible de se placer dans une représentation particulière (représentation position ou impulsion par exemple) sans transformer l'équation (3.2) en une équation aux dérivées partielles peu maniable (avec des dérivations par rapport à \vec{r} ou \vec{p} par exemple). Deuxièmement, parce que l'on veut pouvoir étudier l'effet de potentiels **dépendant du temps** (pour V_{em} comme pour H_{ext}), et qu'il n'est donc pas possible, a priori, de transformer l'équation (3.2) en une équation indépendante du temps, plus facile à résoudre (par exemple par un développement sur les états propres dont l'évolution est simple).

Dans cette partie, nous allons voir en détail comment simplifier cette équation à l'aide de transformations unitaires (passage en représentation d'interaction) et d'approximations réalistes (approximation des ondes tournantes et passage dans le référentiel tournant). Parmi les équations obtenues, une sera plus particulièrement étudiée :

$$\boxed{\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix} |\varphi(t)\rangle}$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta_{op} &= \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op}(t, t_1) \\ F_{op} &= F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \end{aligned}$$

On examinera donc d'abord la **structure** de cette équation, ainsi que la **dépendance spatio-temporelle** de Δ_{op} et F_{op} pour des champs extérieurs usuels. Ensuite, on détaillera deux autres formulations importantes : celle basée sur l'équation du deuxième ordre que vérifie chaque composante de $\varphi(t)$, et celle utilisant le passage de la base usuelle (diabatique) à la base des états propres (états adiabatiques). Nous dirons enfin quelques mots sur les autres formulations usuelles : équations de Bloch optique et interprétation en termes de spin fictif, représentation de Wigner...

3.3.1 Transformations unitaires et représentation d'interaction

Commençons donc par simplifier l'équation (3.2) en passant en *représentation d'interaction* par rapport à l'Hamiltonien $H_0 + H_{ext}$:

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle := U_1(t, t_1) |\varphi_1(t)\rangle}$$

à l'aide de la transformation unitaire :

$$U_1(t, t_1) := \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t (H_0 + H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t')) dt' \right) \right) \quad (3.3)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 \cdot (t-t_1)} U_{E1}(t, t_1) \quad (3.4)$$

avec l'opérateur d'évolution :

$$U_{E1}(t, t_1) := \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt' \right) \right)$$

où \mathcal{T} est l'opérateur de Dyson (voir partie 3.4.3), et t_1 est un temps arbitraire (avec comme seule condition : $t_1 \neq t$).

L'équation (3.2) devient alors :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_1(t)\rangle &= U_1(t, t_1)^{-1} V_{em}(\vec{r}_{op}, t) U_1(t, t_1) |\varphi_1(t)\rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 \cdot (t-t_1)} V_{em}(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 \cdot (t-t_1)} |\varphi_1(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

où l'on a introduit l'opérateur $\vec{R}_{op}(t, t_1)$ déjà défini au paragraphe 2.4.2 :

$$\boxed{\vec{R}_{op}(t, t_1) := U_{E1}(t, t_1)^{-1} \vec{r}_{op} U_{E1}(t, t_1) = A(t, t_1) \vec{r}_{op} + B(t, t_1) \vec{p}_{op}/m + \vec{\xi}(t, t_1)} \quad (3.6)$$

A l'approximation dipolaire (ou approximation des grandes longueurs d'ondes), l'Hamiltonien V_{em} décrivant l'interaction matière-rayonnement est l'Hamiltonien dipolaire électrique (on néglige par la suite les effets liés au couplage spin-champ magnétique).

Pour deux vrais niveaux atomiques, cet Hamiltonien est alors purement anti-diagonal ; mais pour deux niveaux effectifs (issus par exemple d'un système à trois vrais niveaux, comme pour les transitions Raman à deux photons), il peut contenir des termes diagonaux (lentement variables dans le temps et l'espace) : V_{aa} et V_{bb} . En première approximation, on peut alors les prendre constants et les éliminer par une transformation unitaire. Dans la suite, on ne considèrera pas ces termes diagonaux, et l'Hamiltonien d'interaction électromagnétique s'écrira simplement :

$$V_{em}(\vec{r}_{op}, t) := V(\vec{r}_{op}, t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (3.5) devient finalement :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_1(t)\rangle = V(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega_0(t-t_1)} \\ e^{-i\omega_0(t-t_1)} & 0 \end{pmatrix} |\varphi_1(t)\rangle} \quad (3.7)$$

On peut alors exprimer $V(\vec{r}, t)$ en représentation de Fourier :

$$V(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tilde{V}(\vec{k}, \omega)$$

ou faire apparaître directement la structure des impulsions laser que l'on considèrera par la suite (ondes progressives avec enveloppe spatio-temporelle) :

$$V(\vec{r}, t) := -2\hbar\Omega_0 F(\vec{r}, t) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \quad (3.8)$$

où on a introduit la fréquence de Rabi Ω_0 de la transition atomique.

Afin d'être cohérent avec les approximations précédentes (approximation dipolaire et atomes à deux niveaux), il faut que l'enveloppe $F(\vec{r}, t)$ varie lentement avec \vec{r} et t ; ie que la longueur caractéristique de variation de F soit très supérieure à λ , la longueur d'onde de la source laser :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial r_i} \ll k_i$$

et que le temps caractéristique de variation de F soit très supérieur à la période de la source :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \ll \omega \quad (3.9a)$$

Il est alors facile de voir que dans notre cadre de travail (transitions Raman π et $\pi/2$) ces conditions sont largement satisfaites.

Avec cette expression de $V(\vec{r}, t)$, l'équation (3.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |\varphi_1(t)\rangle \\ &= i\Omega_0 F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t, t_1) + \phi) + i\omega_0(t - t_1)} \\ e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t, t_1) + \phi) - i\omega_0(t - t_1)} & +e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t, t_1) + \phi) + i\omega_0(t - t_1)} \\ +e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t, t_1) + \phi) - i\omega_0(t - t_1)} & 0 \end{pmatrix} |\varphi_1(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

– Approximation des ondes tournantes

Même dans le cas le plus simple (cas libre, fonction F constante et uniforme), on ne connaît pas de solution exacte à l'équation (3.10). Ceci vient essentiellement du fait qu'il y a deux fréquences naturelles différentes intervenant dans le membre de droite : $\omega - \omega_0 \approx 0$ et $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ (on suppose que l'onde laser est proche de la pulsation de résonance ω_0). On peut néanmoins, dans certains cas négliger les termes non-résonants (ceux qui ont la fréquence $\omega + \omega_0$) et ne conserver que les termes résonants : c'est l'*approximation des ondes tournantes* (Rotating Wave Approximation ou RWA) ou *approximation séculaire*.

En effet, on peut montrer que l'effet des termes non-résonants (action rapide à la fréquence $\sim 2\omega_0$) se moyenne pendant le temps naturel d'évolution ($\sim \Omega_0^{-1}$) de $\varphi_1(t)$. Ainsi, lorsque l'on a les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |\omega - \omega_0| &\ll \omega_0 \\ \Omega_0 &\ll \omega_0 \end{aligned}$$

les corrections à apporter à l'approximation des ondes tournantes sont de l'ordre de $\sqrt{\Omega_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} / \omega_0 \ll 1$ [117, 118, 119, 116, 120, 121, 122].

Ces termes non-résonants conduisent à l'effet Bloch-Siegert [118, 119, 117], qui se manifeste par une oscillation supplémentaire de la courbe de variation de population (par rapport à la courbe de Rabi habituelle). L'origine de cette modulation est la possible transition atomique à l'aide de deux photons (virtuels) qui intervient pour une fréquence hors-résonance $\approx 2\omega_0$. Dans le cas de transitions micro-ondes, et avec une fréquence de Rabi forte (faible ω_0 et fort Ω_0), on peut arriver à des oscillations de Bloch-Siegert dont l'amplitude vaut plus de 1% de celle des oscillations de Rabi (voir [123, 124]).

Dans le cas considéré des transitions Raman stimulées (voir [46, 47, 102, 125]), nous n'avons pas affaire à un *vrai* système à deux niveaux, mais à un système à *deux niveaux effectifs*, couplés par une transition non-résonnante à deux photons optiques (de fréquence $\widetilde{\omega}_0 \sim 10^{15}$ Hz). Ainsi, bien que la fréquence de transition effective ω_0 soit micro-onde, les fréquences $\widetilde{\omega}_0$ intervenant dans le calcul des oscillations de Bloch-Siegert sont optiques, et l'effet Bloch-Siegert est faible [126]. Par exemple, pour des désaccords et fréquences de Rabi usuels ($|\omega - \omega_0| \sim \Omega_0 \lesssim 10^6 s^{-1}$), on obtient :

$$\sqrt{\Omega_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} / \widetilde{\omega}_0 \lesssim 10^{-9}$$

Dans le cas général (avec gravitation, inertie et structure non-triviale de F), on doit comparer les fréquences caractéristiques des termes

$$\Omega_0 F\left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_1), t\right) e^{\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{R}_{op}(t, t_1) + \phi - \omega_0(t - t_1))}$$

à $\widetilde{\omega}_0$; ie comparer essentiellement $\vec{k} \cdot \vec{v}_0 + \hbar k^2 / 2m$ et $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t}$ à $\widetilde{\omega}_0$ (voir paragraphes suivants). La deuxième condition (voir 3.9a) est déjà satisfaite. Et en ce qui concerne les termes Doppler $\vec{k} \cdot \vec{v}_0$ et de recul $\hbar k^2 / 2m$, ils sont très inférieurs à $\widetilde{\omega}_0$ pour les vitesses atomiques \vec{v}_0 et les vecteurs d'onde \vec{k} considérés.

L'approximation des ondes tournantes est donc légitime dans notre étude, et, sauf mention explicite du contraire, on négligera par la suite les termes non-résonants en $\omega + \omega_0$ dans l'équation (3.10).

L'équation (3.10) s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_1(t)\rangle = i\Omega_0 F\left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_1), t\right) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Phi_{op}(t, t_1)} \\ e^{+i\Phi_{op}(t, t_1)} & 0 \end{pmatrix} |\varphi_1(t)\rangle \quad (3.11)$$

avec :

$$\Phi_{op}(t, t_1) := \omega t - \omega_0(t - t_1) - \vec{k} \cdot \overrightarrow{R}_{op}(t, t_1) + \phi$$

– Référentiels tournants et désaccord généralisé

Afin d'éliminer la dépendance temporelle principale du membre de droite de l'équation (3.11), on réalise alors une transformation unitaire sur $|\varphi_1(t)\rangle$ que l'on peut interpréter comme le changement de référentiel qui **généralise** l'habituel "passage dans le référentiel tournant".

Remarquons qu'il existe une infinité de transformations unitaires possibles conduisant au référentiel tournant. Par exemple, la **famille de transformations** suivantes :

$$U_2(x, t, t_1) := \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_{op}(t, t_1) \cdot x} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi_{op}(t, t_1) \cdot (x-1)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

conduit bien, comme nous allons le voir, au référentiel tournant.

La seule condition pour ces transformations unitaires est en effet que la différence des arguments complexes de $U_2(x, t, t_1)$ soit égale à $\Phi_{op}(t, t_1)$ (la "rotation" du référentiel "tournant" est en fait une "rotation relative" entre les deux composantes de $|\varphi_1(t)\rangle$).

On obtient ainsi :

$$|\varphi_1(t)\rangle := U_2(x, t, t_1) |\varphi_2(x, t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt} |\varphi_2(x, t)\rangle = \begin{pmatrix} -e^{i\Phi_{op}.x} \frac{d}{dt} (e^{-i\Phi_{op}.x}) & i\Omega_0 e^{i\Phi_{op}.x} F_{op}.e^{-i\Phi_{op}.x} \\ i\Omega_0 e^{i\Phi_{op}.(x-1)} F_{op}.e^{-i\Phi_{op}.(x-1)} & -e^{i\Phi_{op}.(x-1)} \frac{d}{dt} (e^{-i\Phi_{op}.(x-1)}) \end{pmatrix} |\varphi_2(x, t)\rangle \quad (3.13)$$

avec des notations abrégées évidentes pour F_{op} et Φ_{op} .

Il est à remarquer que la transformation unitaire $U_2(x, t, t_1)$ n'est **pas** un opérateur d'évolution. On n'a donc **pas** les propriétés usuelles :

$$U^{-1}(t, t_1) = U(t_1, t) \quad \text{et} \quad U(t, t) = U(t_1, t_1) = 1$$

En fait, dans le cas de $U_2(x, t, t_1)$, on a les relations :

$$U_2^{-1}(x, t, t_1) = \begin{pmatrix} e^{+i\Phi_{op}(t, t_1).x} & 0 \\ 0 & e^{+i\Phi_{op}(t, t_1).(x-1)} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_{op}(t_1, t).x} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi_{op}(t_1, t).(x-1)} \end{pmatrix}$$

et :

$$U_2(x, t, t) = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_{op}(t, t).x} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi_{op}(t, t).(x-1)} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\Phi_{op}(t, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi \neq 0$$

L'équation (3.13) se simplifie beaucoup du fait que F ne dépend que de \vec{r} , ie que F_{op} ne dépend que de \vec{R}_{op} et donc commute avec Φ_{op} . La formule A.2 de l'appendice A nous conduit donc à :

$$e^{i\Phi_{op}.x} F_{op} e^{-i\Phi_{op}.x} = F_{op}$$

D'autre part, comme Φ_{op} ne dépend que linéairement des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} , la dérivation de l'exponentielle $e^{-i\Phi_{op}.x}$, à l'aide de la formule A.9 de l'appendice A, est immédiate (le point désigne la dérivation temporelle) :

$$\begin{aligned} e^{i\Phi_{op}.x} \frac{d}{dt} (e^{-i\Phi_{op}.x}) &= -ix \dot{\Phi}_{op} - \frac{1}{2} x^2 \left[\dot{\Phi}_{op}, \Phi_{op} \right] \\ &= -ix \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op} \right) - \frac{1}{2} x^2 \left[\vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op}, \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \right] \\ &= -ix \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{A}} \vec{r}_{op} - \vec{k} \cdot \dot{\vec{B}} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \dot{\vec{\xi}} \right) + ix^2 \frac{\hbar \vec{k} \cdot \left(\dot{\vec{B}} \tilde{\vec{A}} - \dot{\vec{A}} \tilde{\vec{B}} \right) \vec{k}}{2m} \end{aligned}$$

où le signe " \sim " désigne la transposition, et où on a utilisé l'expression (3.6) de \vec{R}_{op} .

Introduisons alors le terme de "recul généralisé" $\delta(t, t_1)$:

$$\delta(t, t_1) := \hbar \vec{k} \left(\dot{\vec{B}} \tilde{A} - \dot{\vec{A}} \tilde{B} \right) \vec{k} / 2m$$

dont l'expression peut s'écrire plus simplement en utilisant les propriétés des matrices $ABCD$ (appendice B). En effet, comme :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \alpha \vec{A} + \beta \vec{C} \\ \dot{\vec{B}} &= \alpha \vec{B} + \beta \vec{D} \end{aligned}$$

on peut réécrire $\dot{\vec{B}} \tilde{A} - \dot{\vec{A}} \tilde{B}$ sous la forme :

$$\dot{\vec{B}} \tilde{A} - \dot{\vec{A}} \tilde{B} = \alpha (\vec{B} \tilde{A} - \vec{A} \tilde{B}) + \beta (\vec{D} \tilde{A} - \vec{C} \tilde{B})$$

Or, selon les propriétés démontrées dans l'appendice B, la matrice $\tilde{A}\tilde{B}$ est symétrique et la matrice $\vec{D}\tilde{A} - \vec{C}\tilde{B}$ est égale à la matrice unité. On obtient donc :

$$\dot{\vec{B}} \tilde{A} - \dot{\vec{A}} \tilde{B} = \beta$$

ie :

$$\delta(t, t_1) = \hbar \vec{k} \beta \vec{k} / 2m$$

L'équation (3.13) se réécrit alors sous la forme :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_2(x, t)\rangle = i M_{op}(x, t) |\varphi_2(x, t)\rangle \quad (3.14)$$

avec :

$$M_{op}(x, t) := \begin{pmatrix} x \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op} - x\delta \right) & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & (x-1) \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op} - (x-1)\delta \right) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

où F_{op} , $\dot{\vec{R}}_{op}$ et δ dépendent a priori du temps t .

A chaque valeur particulière de x correspond une matrice $M_{op}(x, t)$ (et une équation sur $|\varphi_2\rangle$) particulière.

Par exemple, pour $x=0$, on obtient :

$$M_{op}(0, t) := \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & - \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{\vec{R}}_{op} + \delta \right) \end{pmatrix}$$

et pour $\boxed{x = 1}$, on a :

$$M_{op}(1, t) := \begin{pmatrix} \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} - \delta & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui revient, en terme de référentiel tournant, à ne faire "tourner" qu'une des deux composantes de $|\varphi_1(t)\rangle$.

Remarquons que le choix $x = 1$ est le plus naturel d'un point de vue physique. En effet, on peut voir sur l'équation (3.11) que c'est précisément $e^{-i\Phi_{op}(t, t_1)}$ qui agit sur la composante inférieure de $|\varphi_1(t)\rangle$ pour donner la variation de la composante supérieure de $|\varphi_1(t)\rangle$. Inversement, c'est $e^{+i\Phi_{op}(t, t_1)}$ qui agit sur la composante supérieure de $|\varphi_1(t)\rangle$ pour donner la variation de sa composante inférieure. En clair, cela revient à dire que le référentiel *naturel* d'évolution de la composante inférieure de $|\varphi_1(t)\rangle$ est le référentiel immobile, et que celui de sa composante supérieure est le référentiel qui "tourne" grâce à l'action de l'opérateur $e^{-i\Phi_{op}(t, t_1)}$.

On peut alors introduire le "**désaccord généralisé**" $\Delta_{op1}(t, t_1)$:

$$\boxed{\Delta_{op1}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} - \delta} \quad (3.16)$$

qui permet d'écrire $M_{op}(1, t)$ comme :

$$M_{op}(1, t) := \begin{pmatrix} \Delta_{op1}(t, t_1) & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & 0 \end{pmatrix}$$

Ce désaccord généralisé $\Delta_{op1}(t, t_1)$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_{op1}(t, t_1) &= \omega - \left(\omega_0 + \vec{k} \cdot \alpha \vec{R}_{op} + \frac{\vec{k} \cdot \beta \vec{P}_{op}}{m} + \vec{k} \cdot \vec{f} + \frac{\hbar \vec{k} \cdot \beta \vec{k}}{2m} \right) \\ &= \omega - \left(\omega_0 + \vec{k} \cdot \left[\frac{\beta}{m} \left(\vec{P}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) + \alpha \vec{R}_{op} + \vec{f} \right] \right) \end{aligned}$$

en utilisant les relations de définition de \vec{R}_{op} , \vec{P}_{op} et δ (cf partie 2.4.2).

Cette expression s'interprète facilement en considérant la **conservation de l'énergie-impulsion** pour un atome non-excité absorbant un photon (ω, \vec{k}) à l'instant t (l'atome est donc en $\vec{R}(t, t_0)$ avec l'impulsion $\vec{P}(t, t_0)$ au moment de l'absorption) :

$$E(\vec{R}(t, t_0), \vec{P}(t, t_0), t) + E_b + \hbar\omega = E(\vec{R}(t, t_0), \vec{P}(t, t_0) + \hbar\vec{k}, t) + E_a$$

avec :

$$E(\vec{R}, \vec{P}, t) := \frac{1}{2m} \vec{P} \cdot \vec{P} - \frac{m}{2} \vec{R} \cdot \ddot{\vec{R}} - \vec{R} \cdot \ddot{\vec{P}} - m \vec{g} \cdot \vec{R} + \vec{f} \cdot \vec{P}$$

et qui donne comme condition :

$$\omega - \left(\omega_0 + \vec{k} \cdot \left[\frac{\beta(t)}{m} \left(\vec{P}(t, t_0) + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) + \alpha(t) \vec{R}(t, t_0) + \vec{f}(t) \right] \right) = 0$$

que l'on peut naturellement appeler : "*condition de Bragg généralisée*" ou "*condition de résonance généralisée*", puisqu'elle indique comment doivent être les caractéristiques externes (position et impulsion) d'un atome pour que son interaction avec le potentiel laser soit résonnante.

Un autre choix de x très important est le choix $x = \frac{1}{2}$ qui conduit à une expression de M_{op} plus "symétrique" (nous reviendrons sur ce point dans la suite) :

$$M_{op}\left(\frac{1}{2}, t\right) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \right) - \frac{\delta}{4} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2} \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \right) - \frac{\delta}{4} \end{pmatrix}$$

et qui met en évidence un terme $-\delta/4$ proportionnel à la matrice unité que l'on peut éliminer facilement grâce à la transformation unitaire suivante :

$$|\varphi_2\left(\frac{1}{2}, t\right)\rangle := U_3(t, t_1, t_3) |\varphi_3(t)\rangle$$

avec :

$$U_3(t, t_1, t_3) := \exp\left(-i \int_{t_3}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt'\right) \quad (3.17)$$

dont l'expression est particulièrement simple lorsque $\beta = 1$ (cas usuel) :

$$\beta = 1 \longrightarrow U_3(t, t_1, t_3) = \exp\left[-i \frac{\hbar k^2}{8m} (t - t_3)\right]$$

On obtient finalement l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_3(t)\rangle = i M_{op}(t) |\varphi_3(t)\rangle \quad (3.18)$$

avec :

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2} \Delta_{op} \end{pmatrix}$$

et :

$$\Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \quad (3.19)$$

Il faut faire attention de ne pas confondre les matrices $M_{op}(x, t)$ avec la matrice $M_{op}(t)$ définie ci-dessus, ainsi que l'opérateur $\Delta_{op}(1, t, t_1)$ avec $\Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1)$, qui peut être, comme nous le verrons, également interprété comme un "désaccord généralisé".

– Remarque au sujet du temps t_1

Le temps t_1 étant arbitraire (avec comme seule condition $t_1 \neq t$), les calculs menés à partir des équations (3.7), (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) ou (3.18) et leurs solutions doivent être indépendants de ce temps t_1 . Cette indépendance, aisément démontrable avant toute approximation, peut être mise en défaut après les diverses approximations que l'on sera amené à faire. Il faudra alors s'assurer, après chaque approximation, que les résultats (ou les équations) sont bien indépendants du temps arbitraire t_1 .

On peut ainsi adopter plusieurs attitudes face à ce problème :

1. éliminer le temps t_1 dès le début des calculs, avant toute approximation
2. vérifier après chaque approximation que les équations obtenues sont indépendantes de t_1
3. faire l'hypothèse (ou l'approximation) qu'a priori les résultats ne doivent pas dépendre de t_1 (même après plusieurs approximations), et lui attribuer une valeur arbitraire finale (par exemple, l'instant central d'une impulsion) en vue de simplifier les résultats.

Afin de démontrer explicitement l'indépendance des équations précédentes vis à vis du temps t_1 , considérons l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H(t) + V(t)) |\Psi(t)\rangle$$

où $H(t)$ et $V(t)$ sont deux Hamiltoniens quelconques dépendant du temps.

En représentation d'interaction par rapport à H , ie :

$$|\Psi(t)\rangle := U(t, t_1) |\varphi(t)\rangle \quad \text{avec :} \quad U(t, t_1) := \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t H(t') dt' \right) \right)$$

cette équation de Schrödinger devient :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = \tilde{V}(t, t_1) |\varphi(t)\rangle \quad \text{avec :} \quad \tilde{V}(t, t_1) := U^{-1}(t, t_1) V(t) U(t, t_1)$$

Elle s'intègre alors en :

$$|\varphi(t)\rangle = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t_1) dt' \right) \right) |\varphi(t_0)\rangle$$

ou, dans la représentation initiale :

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = U(t, t_1) \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t_1) dt' \right) \right) U(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle} \quad (3.20)$$

où $U^{-1}(t_0, t_1)$ a été remplacé par $U(t_1, t_0)$ (U est un opérateur d'évolution).

On peut alors faire disparaître le temps t_1 grâce à la propriété importante suivante :

$$U(t_0, t_1) \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', \boxed{t_1}) dt' \right) \right) U(t_1, t_0) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', \boxed{t_0}) dt' \right) \right)$$

et en utilisant la loi de composition des opérateurs d'évolution :

$$U(t, t_1) = U(t, t_0) U(t_0, t_1)$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t_0) dt' \right) \right) |\Psi(t_0)\rangle} \quad (3.21)$$

qui peut se retrouver simplement en choisissant $t_1 = t_0$ dans l'expression précédente (3.20) de $|\Psi(t)\rangle$; ou alors :

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t) dt' \right) \right) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle} \quad (3.22)$$

qui ne peut **pas** être obtenue en posant $t_1 = t$ dans l'expression (3.20) de $|\Psi(t)\rangle$ car $t_1 \neq t$ par définition de t_1 .

On peut démontrer ainsi explicitement l'indépendance des équations (3.7), (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) ou (3.18). Il est à remarquer que l'approximation des ondes tournantes revient simplement à considérer un potentiel laser différent du potentiel laser initial, l'indépendance vis à vis de t_1 des équations obtenues se démontrant alors de la même façon que précédemment.

En dehors de l'avantage d'avoir fait disparaître le temps t_1 , ces formulations (3.21) et (3.22) ont une interprétation simple. Par exemple, dans l'expression (3.22) :

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t) dt' \right) \right) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

l'évolution de $\Psi(t)$ se sépare en deux sources distinctes d'évolution (de t_0 à t) :

- une selon $H(t)$: $U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle := |\Psi_0(t)\rangle$
- et une selon $\tilde{V}(t)$: $\mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t) dt' \right) \right) |\Psi_0(t)\rangle = |\Psi(t)\rangle$

où $\mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{V}(t', t) dt' \right) \right)$ peut être vu comme une matrice S d'interaction.

Dans la suite, nous serons amenés à faire des approximations pouvant briser l'indépendance des équations vis-à-vis de t_1 , nous aurons donc la possibilité soit d'utiliser des expressions indépendantes de t_1 , telles que (3.21) ou (3.22), soit d'utiliser (3.20), et de garder ainsi une liberté sur le choix de t_1 permettant de simplifier certains calculs (assimilation du temps t_1 à un temps physique, par exemple à l'instant central d'une impulsion laser).

3.3.2 Etude préliminaire de l'équation $\frac{d}{dt} |\varphi_3(t)\rangle = iM_{op}(t) \cdot |\varphi_3(t)\rangle$

Dans cette partie, on étudie plus spécifiquement les ordres de grandeur des termes intervenant dans l'équation (3.18) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_3(t)\rangle = iM_{op}(t) \cdot |\varphi_3(t)\rangle \quad (3.23)$$

avec :

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

et :

$$\Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \quad (3.24)$$

Structure de $M_{op}(t)$

Contrairement aux choix $x \neq \frac{1}{2}$, le choix $x = \frac{1}{2}$ conduit à une matrice d'interaction $M_{op}(t)$ "symétrique", ie faisant intervenir la matrice de Pauli σ_3 mais pas la matrice unité. Ceci permet d'éliminer tout facteur de phase global enregistré par $\varphi_3(t)$ après intégration de (3.23).

En effet, on peut montrer aisément (par un développement itératif par exemple) que la solution de (3.18) est du type :

$$\begin{pmatrix} a_{op} + ib_{op} & c_{op} + id_{op} \\ -c_{op} + id_{op} & a_{op} - ib_{op} \end{pmatrix} |\varphi_3(t_0)\rangle$$

qui conduit par exemple aux termes usuels du cas libre (pour une amplitude F uniforme et constante) :

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda t) + i\frac{\Delta(p)}{2\lambda} \sin(\lambda t) & i\frac{\Omega_0}{\lambda} \sin(\lambda t) \\ i\frac{\Omega_0}{\lambda} \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) - i\frac{\Delta(p)}{2\lambda} \sin(\lambda t) \end{pmatrix} \langle p | \varphi_3(t_0) \rangle$$

avec : $\lambda := \sqrt{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Delta(p)}{2}\right)^2}$.

Dans le cas $x \neq \frac{1}{2}$ au contraire, un terme de phase global (ie commun aux deux composantes de $\varphi_3(t)$) :

$$e^{i[\Delta(p)(x-1/2) - \delta(x^2 - x + 1/2)](t-t_0)}$$

apparaît en facteur de l'expression précédente.

D'autre part, cette "symétrie" de $M_{op}(t)$ dans l'équation (3.18) permet de faire jouer des **rôles symétriques** à Δ_{op} et $\Omega_0 F_{op}$. En effet, effectuons la transformation suivante :

$$|\varphi_3(t)\rangle := U_4 |\varphi_4(t)\rangle$$

avec U_4 unitaire :

$$U_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_4(t)\rangle = i \begin{pmatrix} \Omega_0 F_{op} & \frac{1}{2} \Delta_{op} \\ \frac{1}{2} \Delta_{op} & -\Omega_0 F_{op} \end{pmatrix} |\varphi_4(t)\rangle \quad (3.25)$$

où les rôles de Δ_{op} et $\Omega_0 F_{op}$ sont échangés. Cette remarque simple peut se révéler très utile dans l'étude des cas exactement résolubles de l'équation (3.18) lorsque Δ_{op} et $\Omega_0 F_{op}$ dépendent de façon non triviale du temps (voir partie 3.6).

Développement du désaccord généralisé

Il est intéressant maintenant de quantifier les différents termes qui apparaissent dans l'expression (3.24) de $\Delta_{op}(t, t_1)$, afin de distinguer les termes qui seront pertinents lors de l'intégration de (3.23).

Comme on a pu le voir précédemment, le temps d'évolution caractéristique de $\varphi_3(t)$, dans le cas libre et avec une impulsion uniforme et constante, est égal à $\tau = 1/\sqrt{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Delta(p)}{2}\right)^2} \sim [10^{-3}s - 10^{-6}s]$. Ce temps caractéristique d'évolution interne est à comparer aux temps typiques d'évolution externe (évolution des matrices $ABCD$ par exemple) dus, par exemple, à une rotation ($1/\Omega_{terre} \sim 10^4 s \gg \tau$) ou à un gradient de gravité ($\sqrt{\gamma_{terre}}^{-1} \sim 10^3 s \gg \tau$). Par conséquent, dans l'expression (3.24) du désaccord $\Delta_{op}(t, t_1)$, on peut développer les matrices \dot{A} et \dot{B} , ainsi que le vecteur $\vec{\xi}$ en puissances de $\alpha\tau$ et $\gamma\tau^2$ (on ne tient pas compte, ici, de l'effet de \vec{f} , ni de l'effet de β , dont l'écart à la matrice unité est extrêmement faible, voir partie 2.2).

Dans le cas simplifié où α , γ et \vec{g} ne dépendent pas du temps et pour des temps $t \leq \tau$ on obtient (voir appendice C) :

$$\begin{aligned}\dot{A}(t, t_1) &= \alpha + (\alpha^2 + \gamma)(t - t_1) + (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) \frac{(t - t_1)^2}{2} + \dots \\ \dot{B}(t, t_1) &= 1 + 2\alpha(t - t_1) + (3\alpha^2 + \gamma) \frac{(t - t_1)^2}{2} + \dots \\ \dot{\vec{\xi}}(t, t_1) &= \vec{g}(t - t_1) + \alpha \vec{g}(t - t_1)^2 + \dots\end{aligned}$$

(on rappelle que α est défini tel que $\alpha \cdot \vec{u} = -\vec{\Omega} \times \vec{u}$, pour tout vecteur \vec{u}).

D'où :

$$\begin{aligned}\Delta_{op}(t, t_1) &= \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \vec{g}(t - t_1) - \vec{k} \alpha \vec{r}_{op} - 2 \vec{k} \alpha \frac{\vec{p}_{op}}{m}(t - t_1) \\ &\quad - \vec{k} (\alpha^2 + \gamma) \vec{r}_{op}(t - t_1) - \vec{k} \alpha \vec{g}(t - t_1)^2 - \dots\end{aligned}\quad (3.26)$$

L'ordre de grandeur de chacun de ces termes dépend fortement de l'orientation du vecteur \vec{k} . Dans un gyromètre par exemple, on cherche à maximiser l'effet de α et à minimiser l'effet de \vec{g} et γ (ce qui revient souvent à prendre $\vec{k} \perp \vec{g}$), alors que c'est l'inverse pour un gradiogravimètre ($\vec{k} \parallel \vec{g}$).

En outre, afin de quantifier l'ordre de grandeur des termes faisant intervenir \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} , il est nécessaire de connaître l'effet de tels opérateurs sur un paquet d'ondes atomique typique ayant les mêmes caractéristiques (position et impulsion centrales, largeurs en position et impulsion...) que ceux qui prennent forme à l'intérieur d'une telle séparatrice laser.

À l'instar de ce que l'on peut déduire de l'étude du cas libre (ie sans champ inertiel, ni gravitationnel, voir partie 3.6), considérons par exemple un paquet d'ondes $|\psi\rangle$ (on aura donc $|\Psi\rangle \sim |\psi\rangle$, où $|\Psi\rangle$ est la solution supposée connue de l'équation (3.2)), d'impulsion centrale \vec{p}_c , de position centrale \vec{r}_c :

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &\sim \vec{r}_0 + \frac{1}{m} \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) (t - t_1) \\ \vec{p}_c &\sim \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2}\end{aligned}$$

et de largeurs en position σ_r (supposée isotrope) et en impulsion σ_p (selon la direction de \vec{k}). Bien qu'il soit inexact de traiter la source atomique de notre étude en termes de fonction d'onde (voir partie 4.1.1), on peut néanmoins estimer grossièrement l'effet des distributions initiales sur les séparatrices en assimilant les largeurs σ_r et $\frac{\sigma_p}{m}$ aux largeurs des distributions initiales (position et vitesse). Ces largeurs dépendent de la qualité du piège dont les atomes sont issus, du temps qu'ils ont mis pour atteindre la séparatrice après avoir quitté le piège, et bien sûr des divers potentiels (inertiels, gravitationnels et électro-magnétiques) qu'ils ont traversés.

Dans les expériences usuelles d'interférométrie atomique, σ_r n'excède pas le mm et est supérieure au μm (taille du piège initial) :

$$10^{-6}m \prec \sigma_r \prec 10^{-3}m$$

De même, après refroidissement et sélection atomique, la largeur en vitesse n'excède pas $10^{-1}m.s^{-1}$ et peut atteindre parfois $10^{-3}m.s^{-1}$ après une première interaction laser (sélectivité en vitesse des processus Raman pour les paramètres de notre étude, voir partie 3.6) :

$$10^{-3}m.s^{-1} \prec \frac{\sigma_p}{m} \prec 10^{-1}m.s^{-1}$$

Enfin, du fait des transformations unitaires $U_1(t, t_1)$, $U_2(\frac{1}{2}, t, t_1)$ et $U_3(t, t_1, t_3)$ définie en (3.3), (3.12) et (3.17), $\Delta_{op}(t, t_1)$ n'agit pas sur les composantes de ψ mais sur celles du paquet d'ondes transformé

par U_1 , U_2 et U_3 : ψ_3 (qui est, rappelons le, une approximation de $\varphi_3(t)$). Ce paquet d'ondes a alors pour caractéristiques :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{c3} &\sim \vec{r}_0 \\ \vec{p}_{c3} &\sim \vec{p}_0 + \hbar \vec{k} / 2 \\ \sigma_{r3} &\sim \sigma_r(t_0) \\ \sigma_{p3} &\sim m\sigma_v(t_0)\end{aligned}$$

avec $p_{0\parallel}$ (ie la partie colinéaire à \vec{k}) de l'ordre de $10^{-1}m.s^{-1}$ ou en-dessous (dans le cas des gyromètres atomiques on a souvent $\vec{p}_0 \perp \vec{k}$ et $p_{0\parallel} \sim 0$).

Il est facile de voir en effet que, dans le cas libre (ie sans champ inertiel, ni gravitationnel), la transformation $U_2^{-1}(\frac{1}{2}, t, t_1)$ a pour effet principal de translater l'impulsion de $-\hbar \vec{k} / 2$ ou $+\hbar \vec{k} / 2$ des composantes, respectivement, supérieures et inférieures de $\varphi_1(t)$:

$$\left| \varphi_2\left(\frac{1}{2}, t\right) \right\rangle = U_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, t, t_1\right) |\varphi_1(t)\rangle$$

$$U_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, t, t_1\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\omega t - \omega_0(t-t_1) - \vec{k} \cdot (\vec{r}_{op} + \vec{p}_{op} \cdot (t-t_1)/m) + \phi)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\omega t - \omega_0(t-t_1) - \vec{k} \cdot (\vec{r}_{op} + \vec{p}_{op} \cdot (t-t_1)/m) + \phi)} \end{pmatrix}$$

Or les composantes de $\varphi_1(t)$ ont pour impulsion centrale dans le cas libre : \vec{p}_0 pour la composante inférieure (état fondamental) et $\vec{p}_0 + \hbar \vec{k}$ pour la composante supérieure (état excité). Par conséquent, en utilisant la propriété A.10 de l'appendice A au sujet de l'effet de $e^{\pm \frac{i}{2} \vec{k} \cdot \vec{r}_{op}}$ sur $|\varphi_1(t)\rangle$, on obtient que les deux composantes de $|\varphi_3(t)\rangle$ ont dans le cas libre la même impulsion centrale $\vec{p}_0 + \hbar \vec{k} / 2$.

D'autre part, en ce qui concerne l'effet de $e^{\pm \frac{i}{2} \vec{k} \cdot \vec{p}_{op} \cdot (t-t_1)/m}$ sur $|\varphi_1(t)\rangle$, on peut, en première approximation, le négliger, et ainsi la position centrale des deux composantes de $|\varphi_3(t)\rangle$ est égale à \vec{r}_0 .

Finalement, l'effet sur $\psi_3 \sim \varphi_3(t)$ des divers termes de $\Delta_{op}(t, t_1)$ peut s'évaluer comme :

$$\begin{aligned}\frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_{op}}{m} &\sim \Rightarrow k \frac{p_{0\parallel}}{m} + \frac{\hbar k^2}{2m} \quad " + " \quad k\sigma_v(t_0) \\ \vec{k} \cdot \alpha \vec{r}_{op} &\sim \Rightarrow k \|\alpha\| \sigma_r(t_0) \\ \vec{k} \cdot \alpha \frac{\vec{p}_{op}}{m} (t-t_1) &\sim \Rightarrow k \|\alpha\| \frac{p_{0\parallel}}{m} (t-t_1) \quad " + " \quad k \|\alpha\| \sigma_v(t_0) (t-t_1) \\ \vec{k} \cdot (\alpha^2 + \gamma) \vec{r}_{op} (t-t_1) &\sim \Rightarrow k \|\alpha^2 + \gamma\| \sigma_r(t_0) (t-t_1) \\ &\text{etc...}\end{aligned}$$

Ces termes sont à comparer à la fréquence naturelle d'évolution de $\varphi_3(t)$: $\sqrt{\Omega_0^2 + (\omega - \omega_0)^2}$ qui est de l'ordre de l'inverse du temps total d'interaction laser τ (pour des lames π et $\pi/2$).

Prenons donc un cas réaliste et usuel où $|\omega - \omega_0| \leq \Omega_0$ avec Ω_0 compris entre 10^4 s^{-1} et 10^6 s^{-1} , et où $k \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ (transitions optiques). Les termes de $\Delta_{op}(t, t_1)$ s'évaluent alors comme :

$$\begin{aligned}
k \frac{p_{0\parallel}}{m} &\lesssim 10^6 \text{ s}^{-1} \\
\frac{\hbar k^2}{2m} &\sim 10^5 \text{ s}^{-1} \\
10^4 \text{ s}^{-1} &\lesssim k \sigma_v(t_0) \lesssim 10^6 \text{ s}^{-1} \\
10^2 \text{ s}^{-1} &\lesssim \left| \vec{k} \vec{g} \right| \tau \lesssim 10^4 \text{ s}^{-1} \\
10^{-3} \text{ s}^{-1} &\lesssim k \|\alpha\| \sigma_r(t_0) \lesssim 1 \text{ s}^{-1} \\
k \|\alpha\| \frac{p_{0\parallel}}{m} \tau &\lesssim 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\
k \|\alpha\| \sigma_v(t_0) &\lesssim 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\
k \|\alpha^2 + \gamma\| \sigma_r(t_0) &\lesssim 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\
\left| \vec{k} \alpha \vec{g} \right| \tau^2 &\lesssim 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

où on a utilisé les paramètres terrestres $\|\alpha\| \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\|\gamma\| \sim 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ et $|g| \sim 10 \text{ m.s}^{-2}$; et où la masse atomique est celle du Césium.

On peut calculer l'effet sur $\psi_3 \sim \varphi_3(t)$ des autres termes du développement de $\Delta_{op}(t, t_1)$: ils sont négligeables par rapport aux plus petits de ceux calculés ci-dessus. Cela vient bien sûr du fait que les paramètres " $\|\alpha\| \tau$ " et " $\|\gamma\| \tau^2$ " sont extrêmement petits :

$$\begin{aligned}
10^{-10} &\lesssim \|\alpha\| \tau \lesssim 10^{-8} \\
10^{-18} &\lesssim \|\gamma\| \tau^2 \lesssim 10^{-14}
\end{aligned}$$

pour les grandeurs terrestres et pour les temps d'interaction τ des séparatrices usuelles.

On constate donc que les termes de $\Delta_{op}(t, t_1)$ faisant intervenir $\|\alpha\| \tau$ et $\|\gamma\| \tau^2$ ont un effet totalement négligeable sur $\psi_3 \sim \varphi_3(t)$ par rapport aux autres termes de $\Delta_{op}(t, t_1)$. Pour que leur effet ne soit plus négligeable, il faudrait des temps d'interaction τ beaucoup plus longs et des vitesses de rotation (ou des gradients) beaucoup plus importantes. Par exemple, avec $\|\alpha\| \sim 1 \text{ s}^{-1}$ (rotation de ~ 0.2 tours par seconde) et avec $\tau \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ on aurait : $k \|\alpha\| \frac{p_{0\parallel}}{m} \tau \sim 10^3 \text{ s}^{-1} \sim \Omega_0$ et alors les termes précédents ne seraient pas tous négligeables par rapport à Ω_0 .

Finalement, pour les rotations α et les gradients γ que l'on considère dans notre étude, seuls les quatre premiers termes de l'expression (3.26) de $\Delta_{op}(t, t_1)$ ont un effet non-négligeable sur $|\varphi_3(t)\rangle$. On peut donc raisonnablement restreindre le développement de $\Delta_{op}(t, t_1)$ à ces termes :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \approx \overline{\Delta_{op}}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \vec{g} (t - t_1) \quad (3.27)$$

Cette analyse a **plusieurs conséquences importantes** :

Premièrement, on ne peut pas négliger l'effet du terme $\vec{k} \vec{g} (t - t_1)$ (effet de la gravité ou d'une accélération) lorsque \vec{k} et \vec{g} ne sont pas orthogonaux, surtout lorsque les temps d'interaction laser sont longs. Dans ce cas, $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$ dépend du temps linéairement.

Deuxièmement, le terme $k \sigma_v(t_0)$ (résultant de l'action de l'opérateur \vec{p}_{op} sur $\varphi_3(t)$) ne peut être ignoré, même lorsqu'une sélection en vitesse a été faite sur les atomes avant leur entrée dans la séparatrice. On pourrait néanmoins le négliger dans un cas extrême : avec $\Omega_0 \geq 10^6 \text{ s}^{-1}$ (impulsion laser intense) et $\sigma_v(t_0) \leq 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ (très fine sélection en vitesse préalable), l'erreur commise sur l'évolution de $\varphi_3(t)$ étant alors de l'ordre du pourcent. Pour les paramètres de notre étude (voir partie 3.6), on ne peut cependant pas négliger cet effet, et nous devons donc conserver le caractère opératoire

du terme $\vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m}$ dans l'expression de $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$. Cette remarque indique qu'une approximation classique de $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$, où l'on voudrait remplacer \vec{p}_{op} par une impulsion classique, et ainsi ignorer son aspect opératoire, conduirait à négliger des termes du même ordre de grandeur que Ω_0 , et ne serait donc pas valide.

Enfin, on verra au chapitre suivant d'autres façons d'approximer $\Delta_{op}(t, t_1)$ qui conduiront à un désaccord dépendant à la fois de \vec{p}_{op} et de \vec{r}_{op} . Le désaccord obtenu n'aura donc pas une expression simple dans l'une ou l'autre des représentations canoniques (position ou impulsion), mais on verra comment supprimer cette difficulté.

Dépendances spatiale et temporelle des impulsions laser :

Examinons maintenant l'autre élément de $M_{op}(t)$ qui peut dépendre du temps et des opérateurs canoniques \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} . Il s'agit de l'enveloppe $F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t)$ qui apparaît dans l'expression (3.8), et qui traduit le fait que l'on a affaire à une impulsion laser possédant une structure spatio-temporelle, et non à une onde plane monochromatique.

– Dépendance spatiale :

Les impulsions laser que l'on considère dans cette étude ne sont pas censées, comme leur nom l'indique, perturber les atomes par la dépendance spatiale de leur enveloppe. Ainsi, les longueurs caractéristiques de variation des impulsions considérées (longueur de Rayleigh selon la direction de propagation, et largeur selon la direction transverse) sont supposées être choisies nettement supérieures à la taille du nuage atomique lors de son évolution dans une séparatrice. Néanmoins, lorsque la largeur caractéristique de variation transverse de l'intensité de l'impulsion (généralement Gaussienne) est proche de la taille du nuage atomique, il faut tenir compte de la dépendance en \vec{r} de l'amplitude F , ie de la dépendance en \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} de $F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t)$.

La présence d'une fonction non-triviale de \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} dans l'équation d'évolution temporelle (3.23) n'est évidemment pas souhaitable, l'objectif étant précisément d'éliminer cette présence opératoire grâce à diverses approximations (voir partie suivante) et à un choix particulier de représentation (passage en représentation impulsion par exemple), afin de n'avoir plus qu'à résoudre une équation différentielle ordinaire.

Dans le cas où cette dépendance spatiale de l'amplitude F n'est pas négligeable, on peut néanmoins remarquer que nous décrivons dans notre étude le nuage atomique initial en termes de distributions statistiques sur des paquets d'ondes *peu larges en position* (voir paragraphe 4.1.1). Ainsi, si la largeur caractéristique de variation transverse de l'enveloppe de l'impulsion est comparable à la largeur du nuage, elle est beaucoup plus grande que la largeur de chaque paquet d'ondes de la distribution statistique. De plus, les vitesses centrales de ces paquets d'ondes et les temps d'interaction étant faibles, les paquets d'ondes n'ont pas le temps d'explorer une zone spatiale où l'intensité de l'impulsion varie de façon non-négligeable. Par conséquent, chacun de ces petits paquets d'ondes verra une intensité uniforme, dont la valeur dépendra de la position centrale du paquet d'ondes considéré.

On peut donc en fait approximer l'effet de la dépendance spatiale de l'enveloppe F en remplaçant $\vec{R}_{op}(t, t_1)$ par son action "semi-classique" sur un paquet d'ondes typique évoluant à l'intérieur d'une séparatrice. On a vu au paragraphe précédent, et on verra dans la partie 3.6, qu'un tel paquet d'ondes a pour position et impulsion centrales \vec{r}_{c3} et \vec{p}_{c3} :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{c3} &\sim \vec{r}_0 \\ \vec{p}_{c3} &\sim \vec{p}_0 + \hbar \vec{k} / 2\end{aligned}$$

Une approximation réaliste de cette dépendance spatiale particulière de F sera donc :

$$F\left(\overrightarrow{R_{op}}(t, t_1), t\right) \sim F\left(A(t, t_1) \overrightarrow{r_0} + B(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p_0} + \hbar \overrightarrow{k}/2}{m} + \overrightarrow{\xi}(t, t_1), t\right)$$

Par exemple, dans le cas libre on aura :

$$F\left(\overrightarrow{R_{op}}(t, t_1), t\right) \sim F\left(\overrightarrow{r_0} + \frac{\overrightarrow{p_0} + \hbar \overrightarrow{k}/2}{m} (t - t_1), t\right)$$

On peut même, du fait de la faible variation du mouvement externe pendant le temps d'évolution interne τ , faire une approximation supplémentaire en remplaçant $\overrightarrow{R_{op}}(t, t_1)$ par sa valeur semi-classique prise en un instant particulier, par exemple au temps médian (ou central) de l'impulsion considérée (supposée symétrique) :

$$t_{1/2} := t_0 + \tau/2$$

On obtient alors :

$$F\left(\overrightarrow{R_{op}}(t, t_1), t\right) \approx \overline{F}(t, t_1) := F\left(A(t_{1/2}, t_1) \overrightarrow{r_0} + B(t_{1/2}, t_1) \frac{\overrightarrow{p_0} + \hbar \overrightarrow{k}/2}{m} + \overrightarrow{\xi}(t_{1/2}, t_1), t\right) \quad (3.28)$$

Expression qui se simplifie beaucoup si l'on choisit comme temps arbitraire t_1 précisément l'instant médian $t_{1/2}$:

$$t_1 = t_{1/2} \quad \implies \quad F\left(\overrightarrow{R_{op}}(t, t_1), t\right) \sim F(\overrightarrow{r_0}, t)$$

En dehors de son profil transverse, il existe une autre source de dépendance spatiale d'une impulsion : le "speckle" (ou tavelure), qui peut être beaucoup plus gênant, et qui est essentiellement dû au fait que cette impulsion lumineuse traverse divers systèmes de lentilles et de hublots avant de rencontrer les atomes cibles. Il en résulte la présence de nombreux défauts de front d'onde, dont la taille caractéristique (typiquement $10^{-4}m$ [127, 128]) peut être inférieure à la largeur transverse du nuage atomique (si $\sigma_v(t_0) \geq 10^{-3}m.s^{-1}$ à la sortie de la zone de préparation du nuage atomique, celui-ci aura une taille supérieure à $10^{-4}m$ au bout de $10^{-1}s$, qui est un temps typique d'évolution dans les interféromètres atomiques).

La modélisation du "speckle" est complexe et dépend de chaque système d'optiques utilisé pour acheminer l'impulsion laser aux atomes. Par conséquent, les solutions face à ce problème consistent à :

- diminuer le speckle de l'impulsion laser en modifiant et en ajustant les lentilles et hublots
- étudier préalablement le speckle (pour un système d'optiques fixé) afin de délimiter des zones spatiales (par exemple les centres des hublots) dont la taille est supérieure à la taille du nuage atomique et dont le speckle est localement faible. On utilisera alors ensuite ces zones particulières.
- diminuer les largeurs (dans l'espace des phases) des paquets d'ondes atomiques incidents en améliorant les mécanismes de piégeage et de préparation de la source atomique.

– Dépendance temporelle :

On sait aujourd'hui réaliser divers types d'impulsions avec des structures temporelles bien contrôlées. Le choix de la "forme" temporelle de ces impulsions dépend essentiellement de deux facteurs. D'un point de vue expérimental, on cherche à minimiser l'apparition de lobes secondaires (autour du pic central) dans la réponse en impulsion de la séparatrice (utilisation d'impulsions Blackman et de

fonctions apodisantes). D'un point de vue théorique, on cherche à utiliser des impulsions exactement résolubles, ie telles qu'il existe une solution analytique à l'équation (3.23) (avec une modulation par exemple de forme créneau ou sécante hyperbolique).

L'objectif principal de nombreux travaux consiste donc à chercher et à lister toutes les impulsions exactement résolubles, et à déterminer quelles impulsions présentent le moins de lobes secondaires dans la distribution en impulsion solution. C'est notamment l'objectif des théories dites " $z(t)$ " (voir partie suivante), où l'on transforme le système différentiel du premier ordre (3.23) en une équation différentielle du second ordre, et où l'on effectue un changement de variable sur t ($t \rightarrow z(t)$) afin de ramener l'équation fondamentale à une équation connue (hypergéométrique par exemple).

Soulignons dès à présent qu'il existe une certaine catégorie d'impulsions exactement résolubles qui présentent un bon compromis vis-à-vis de l'apparition de lobes secondaires : les impulsions de type sécante hyperbolique, où l'amplitude de l'impulsion laser s'exprime sous la forme d'une fonction sécante hyperbolique ($sech(t) := 1/\cosh(t)$). Largement utilisée dans l'étude des solitons [129, 130, 131], cette fonction $sech$ possède par ailleurs des propriétés très intéressantes, que nous ne détaillerons pas d'avantage dans ce mémoire.

Bilan : quel type d'équation a-t-on à résoudre ?

Partant de l'équation (3.23), nous avons vu précédemment que les dépendances spatiales et temporelles de Δ_{op} et F_{op} pouvaient ne pas être toutes prises en compte.

Pour les champs inertiels et gravitationnels usuels, il est en effet légitime de ne conserver, dans le développement (3.26) de $\Delta_{op}(t, t_1)$, que les termes suivants :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \approx \overline{\Delta_{op}}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \vec{g}(t - t_1) \quad (3.29)$$

D'autre part, on peut négliger la dépendance spatiale de l'amplitude F dans la plupart des cas, en dehors du phénomène de "speckle". En outre, il a été souligné l'importance de cartographier ce speckle, afin d'en délimiter les zones à faible importance, pour utiliser préférentiellement ces dernières.

On obtient finalement :

$$F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \approx \overline{F}(t_1, t) := F\left(A(t_{1/2}, t_1) \vec{r}_0 + B(t_{1/2}, t_1) \frac{\vec{p}_0 + \hbar \vec{k}/2}{m} + \vec{\xi}(t_{1/2}, t_1), t\right) \quad (3.30)$$

où $\overline{F}(t, t_1)$ décrit la forme temporelle (créneau, sech, Blackman...) de l'impulsion laser qui agit sur les atomes.

Cette expression se simplifie même d'avantage si l'on choisit pour t_1 l'instant central de l'impulsion laser $t_{1/2}$:

$$t_1 = t_{1/2} \quad \implies \quad F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \sim F(\vec{r}_0, t)$$

En conclusion, l'équation d'évolution principale qu'il faut savoir résoudre a minima pour notre étude est la suivante :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i \widetilde{M}_{op}(t) |\varphi(t)\rangle \quad (3.31)$$

avec :

$$\widetilde{M}_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \overline{\Delta_{op}}(t, t_1) & \Omega_0 \overline{F}(t_1, t) \\ \Omega_0 \overline{F}(t_1, t) & -\frac{1}{2} \overline{\Delta_{op}}(t, t_1) \end{pmatrix}$$

même si dans la suite on pourra revenir à l'équation non-approximée (3.23), et considérer $\Delta_{op}(t, t_1)$ et $F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t)$, au lieu de $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$ et $\overline{F}(t_1, t)$.

3.3.3 Autres équations équivalentes

Le problème de l'interaction entre un champ laser quasi-résonant et un système atomique à deux niveaux effectifs peut être mis en équation de plusieurs façons. Chaque équation - ou système d'équations - obtenue présente alors des avantages qui lui sont propres, pour des raisons tant calculatoires (facilité de résolution ou d'implémentation numérique), que physiques (modélisation d'effets supplémentaires, interprétations complémentaires). On peut ainsi passer d'un système de deux équations différentielles couplées (équations (3.23) ou (3.31) par exemple), à trois équations différentielles couplées (équations de Bloch optique), à une seule équation du deuxième ordre (théorie $z(t)$) ou à une équation aux dérivées partielles (fonction de Wigner).

Ce sont ces diverses équations que nous allons maintenant rapidement présenter. Deux formulations seront néanmoins plus particulièrement détaillées car elles seront plus pertinentes pour la suite de notre étude : celle utilisant deux équations différentielles du premier ordre couplées, et celle basée sur une seule équation différentielle du deuxième ordre.

1. Les systèmes de deux équations différentielles du premier ordre.

Dans la partie 3.2 on a vu comment, partant d'une équation très générale où les champs atomiques et électromagnétiques étaient tous deux quantifiés, on pouvait se restreindre à deux niveaux atomiques (ie à une seule multiplicité de niveaux adiabatiques lorsque l'approximation des ondes tournantes est justifiée) et à un champ laser classique (équivalence avec un champ laser cohérent). Cela nous a amené à considérer un système de deux équations différentielles couplées dépendant des opérateurs canoniques \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} (équation 3.23) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |b_3(t)\rangle \\ |a_3(t)\rangle \end{pmatrix} = \boxed{\frac{d}{dt} |\varphi_3(t)\rangle = i M_{op}(t) |\varphi_3(t)\rangle} \quad (3.32)$$

avec :

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta_{op} &= \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op} \\ F_{op} &= F_{op}(t, t_1) := F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \end{aligned}$$

agissant sur les composantes supérieure $|b_3(t)\rangle$ et inférieure $|a_3(t)\rangle$ de $|\varphi_3(t)\rangle$.

Ces deux composantes sont en fait les projections du vecteur d'état $|\varphi_3(t)\rangle$ sur les états propres de $M_{op}(t)$ lorsqu'il n'y a pas d'interaction laser ($\Omega_0 = 0$), ie sur les états non-perturbés par l'impulsion laser qu'on appelle encore *états adiabatiques*. La base adiabatique est donc $\mathcal{D} = \{D_a, D_b\}$ avec :

$$\begin{aligned} D_b &: = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D_a &: = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a également vu une autre base d'états lorsque l'on a fait la transformation

$$|\varphi_3(t)\rangle := U_4 |\varphi_4(t)\rangle$$

avec U_4 unitaire :

$$U_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une inversion des rôles de Δ_{op} et $\Omega_0 F_{op}$:

$$\frac{d}{dt} |\varphi_4(t)\rangle = i \begin{pmatrix} \Omega_0 F_{op} & \frac{1}{2} \Delta_{op} \\ \frac{1}{2} \Delta_{op} & -\Omega_0 F_{op} \end{pmatrix} |\varphi_4(t)\rangle \quad (3.33)$$

Dans ce cas, la nouvelle base d'états s'exprime en fonction des vecteurs de la base diabatique comme :

$$\frac{D_a \pm D_b}{\sqrt{2}}$$

– Bases d'états adiabatiques

On peut évidemment construire une infinité de bases d'états, dépendant ou non du temps et ayant une interprétation plus ou moins physique. Parmi celles-ci, et comme nous l'avons déjà vu dans la partie précédente, une est particulièrement intéressante : c'est la base des états propres de $M_{op}(t)$ (pour Ω_0 quelconque), appelée aussi **base adiabatique** [132] (ou **base des états habillés** lorsque l'on considère les états de Fock du champ laser [133, 116]).

Elle ne s'obtient pas aisément lorsque $M_{op}(t)$ dépend des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} d'une façon non-triviale, et qu'il n'existe pas de représentation dans laquelle l'équation (3.32) reste un système d'équations différentielles (et non un système d'équations aux dérivées partielles). Cependant, lorsqu'après diverses approximations - ou dans certains cas particuliers - $M_{op}(t)$ ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (qui peut être combinaison par exemple des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op}), on peut écrire (3.32) dans la représentation $|s\rangle$ associée à cet opérateur :

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_3(s;t) \\ \dot{a}_3(s;t) \end{pmatrix} := \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle s | b_3(t) \rangle \\ \langle s | a_3(t) \rangle \end{pmatrix} = iM(s;t) \begin{pmatrix} b_3(s;t) \\ a_3(s;t) \end{pmatrix}$$

avec :

$$M(s;t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta(s;t,t_1) & \Omega_0 F(s;t,t_1) \\ \Omega_0 F(s;t,t_1) & -\frac{1}{2} \Delta(s;t,t_1) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres (ie les *énergies adiabatiques*) de $M(s;t)$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \boxed{\varepsilon(s;t) := \sqrt{\Omega_0^2 F^2(s;t,t_1) + \frac{1}{4} \Delta^2(s;t,t_1)}} \\ \varepsilon_a &= -\varepsilon(s;t) \end{aligned}$$

et la base $\mathcal{E} =: \{E_a, E_b\}$ de vecteurs propres (ie les *états adiabatiques*) de $M(s;t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} E_b &= E_b(s;t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ E_a &= E_a(s;t) := \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\theta \in [0; \pi/2[$ défini par :

$$\tan(2\theta(s;t)) := \frac{2\Omega_0 F(s;t,t_1)}{\Delta(s;t,t_1)}$$

Dans cette base \mathcal{E} , le système d'équations (3.32) devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_{adiab}(s;t) \\ a_{adiab}(s;t) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{d}{dt} \varphi_{adiab}(s;t) = iM_{adiab}(s;t) \varphi_{adiab}(s;t)} \quad (3.34)$$

avec :

$$|\varphi_3(t)\rangle := U_{adiab} |\varphi_{adiab}(t)\rangle$$

où U_{adiab} est la *matrice de passage* de la base diabatique \mathcal{D} à celle adiabatique \mathcal{E} :

$$U_{adiab} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et avec :

$$M_{adiab}(s;t) := \begin{pmatrix} \varepsilon(s;t) & i\dot{\theta}(s;t) \\ -i\dot{\theta}(s;t) & -\varepsilon(s;t) \end{pmatrix}$$

où $\dot{\theta}$ peut s'écrire en fonction de F et Δ :

$$\dot{\theta}(s;t) = \frac{\Omega_0}{4} (\dot{F}\Delta - F\dot{\Delta}) / \varepsilon^2$$

Dans le cas le plus simple (Δ et F indépendants du temps), on a $\dot{\theta} = 0$ et on retrouve bien que les états adiabatiques ont une énergie $\mp \hbar\varepsilon$ constante (séparation des niveaux d'une valeur $2\hbar\varepsilon$).

Dans le cas général, on obtient finalement l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_{adiab}(s;t) \\ a_{adiab}(s;t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \varepsilon(s;t) & i\dot{\theta}(s;t) \\ -i\dot{\theta}(s;t) & -\varepsilon(s;t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{adiab}(s;t) \\ a_{adiab}(s;t) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

dont l'interprétation est simple : les états adiabatiques sont non-seulement séparés d'une fréquence $2\varepsilon(s;t)$ qui dépend de la variable s (en représentation $|s\rangle$) et du temps, mais ils sont également couplés par l'intermédiaire du paramètre $\dot{\theta}(s;t)$.

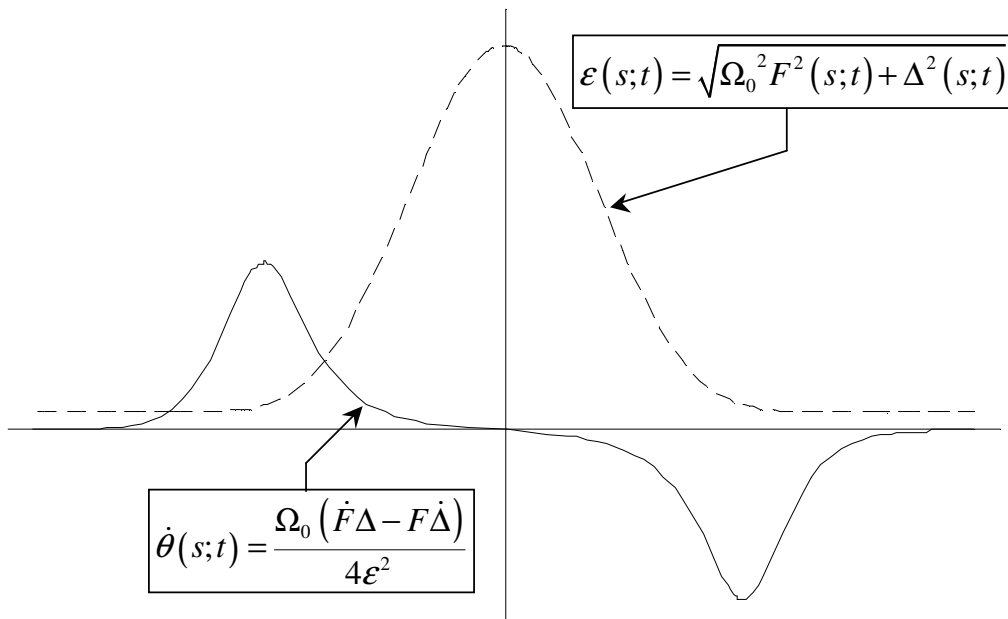


FIG. 3.7: Impulsion laser typique : courbes représentant la distance - en fréquence - entre les deux états adiabatiques (trait pointillé) et leur couplage dans la base adiabatique (trait plein).

Pour une impulsion typique (voir la figure 3.7), la séparation $2\varepsilon(s; t)$ est constante avant l'impulsion, puis augmente jusqu'à atteindre un maximum, diminue ensuite, pour être à nouveau constante. De son côté, le couplage $\dot{\theta}(s; t)$ (ie essentiellement la dérivée temporelle de l'enveloppe de l'impulsion) commence par être nul, augmente, atteint un maximum, puis décroît, devient nul, puis négatif et atteint un minimum, avant de croître à nouveau vers zéro.

Cette équation (3.35) peut également être écrite sous forme *anti-diagonale* en effectuant la transformation unitaire suivante :

$$\varphi_{adiab}(s; t) := U_{adiab2} \cdot \varphi_{adiab2}(s; t)$$

avec :

$$U_{adiab2}(s; t) := \begin{pmatrix} \exp \left[i \int_{t_{adiab2}}^t \varepsilon(s; t') dt' \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[-i \int_{t_{adiab2}}^t \varepsilon(s; t') dt' \right] \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\dot{\varphi}_{adiab2}(s; t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} \exp \left[-2i \int_{t_{adiab2}}^t \varepsilon(s; t') dt' \right] \\ \dot{\theta} \exp \left[2i \int_{t_{adiab2}}^t \varepsilon(s; t') dt' \right] & 0 \end{pmatrix} \varphi_{adiab2}(s; t) \quad (3.36)$$

où l'écart au cas idéal (ie lorsque le désaccord et l'enveloppe de l'impulsion sont indépendants du temps) apparaît plus clairement encore.

2. Les équations différentielles du deuxième ordre.

Partant des divers systèmes d'équations établis précédemment, on peut obtenir une équation différentielle du deuxième ordre sur une seule des deux composantes (de $|\varphi_3(t)\rangle$ par exemple). A chaque système correspond alors une certaine équation différentielle du deuxième ordre, et nous allons voir qu'elles ne sont pas toutes aussi simples à obtenir et qu'elles n'ont pas les mêmes avantages.

Par exemple, si l'on dérive une seconde fois le système (3.23) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_3\rangle = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2} \Delta_{op} \end{pmatrix} |\varphi_3\rangle \quad (3.37)$$

en posant :

$$|\varphi_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} |b_3(t)\rangle \\ |a_3(t)\rangle \end{pmatrix}$$

on obtient pour la composante supérieure de $|\varphi_3\rangle$ (avec des notations évidentes) l'équation suivante :

$$\ddot{b}_3 = \frac{i}{2} \Delta_{op} \dot{b}_3 + \left(\frac{i}{2} \dot{\Delta}_{op} - (\Omega_0 F_{op})^2 \right) b_3 + \Omega_0 \left(i \dot{F}_{op} + \frac{1}{2} F_{op} \Delta_{op} \right) a_3 \quad (3.38)$$

où a_3 est lié à b_3 par :

$$i \Omega_0 F_{op} a_3 = \dot{b}_3 - \frac{i}{2} \Delta_{op} b_3$$

Il n'est donc pas aisé d'éliminer a_3 de l'équation (3.38) car pour cela il faudrait définir l'inverse de l'opérateur $F_{op} := F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t)$.

On peut cependant, comme on l'a vu en détail au paragraphe (3.3.2), raisonnablement négliger la dépendance spatiale de l'enveloppe F et considérer l'approximation (3.28) :

$$F\left(\overrightarrow{R}_{op}(t, t_1), t\right) \approx \overline{F}(t, t_1)$$

Dans ce cas, et si d'autre part on suppose que \overline{F} ne s'annule jamais totalement, l'équation (3.38) devient :

$$\boxed{b_3 + \left((\Omega_0 \overline{F})^2 + \frac{1}{4} \Delta_{op}^2\right) b_3 + \frac{i}{2} \left(\frac{\dot{\overline{F}}}{\overline{F}} \Delta_{op} - \dot{\Delta}_{op}\right) b_3 - \frac{\dot{\overline{F}}}{\overline{F}} b_3 = 0}$$

Cette équation est intéressante car elle met bien en évidence la déviation par rapport à un cas "idéal" où il n'y aurait ni champ inertiel ni champ gravitationnel (cas libre) et où l'enveloppe F de l'impulsion lumineuse serait uniforme et constante (créneau temporel). Néanmoins elle comporte beaucoup de termes dont certains peuvent s'éliminer grâce à une transformation unitaire bien choisie.

Considérons par exemple une transformation équivalente à l'inverse de celle qui a conduit à l'équation (3.18) :

$$b_3 := \mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) \alpha \quad (3.39)$$

alors :

$$\ddot{\alpha} + (\Omega_0 \overline{F})^2 \alpha - \frac{\dot{\overline{F}}}{\overline{F}} \dot{\alpha} + i \left(\mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) \right)^{-1} \Delta_{op} \mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) \alpha = 0$$

qui se simplifie en utilisant la relation A.5 de l'appendice A :

$$\left(\mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) \right)^{-1} \Delta_{op} \mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) = \Delta_{op} + \delta - \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \dot{B}(t, t_4) \vec{k}$$

Le dernier terme de cette expression vient du fait que, pour passer de b_3 à α , nous avons utilisé une transformation unitaire égale à l'intégrale de $\frac{i}{2} \Delta_{op}$ (avec l'opérateur de Dyson \mathcal{T}) et non à une *primitive*, ce qui a pour effet de faire intervenir un nouveau temps arbitraire t_4 .

On peut voir aussi l'effet d'une telle transformation en comparant α et b_1 (b_1 étant la composante supérieure du vecteur d'état $|\varphi_1(t)\rangle$ intervenant dans l'équation (3.11)).

En effet, si on utilise le résultat A.1 de l'appendice A, on montre que :

$$\mathcal{T} \left(e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \right) = \exp \left[\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt' - \frac{1}{2} \int_{t_4}^t \int_{t_4}^{t'} \left[\frac{i}{2} \Delta_{op}(t'', t_1), \frac{i}{2} \Delta_{op}(t', t_1) \right] \right]$$

D'autre part, on peut simplifier $\int_{t_4}^t \int_{t_4}^{t'} [\Delta_{op}(t'', t_1), \Delta_{op}(t', t_1)]$ grâce aux propriétés suivantes des matrices $ABCD$ (voir appendice B) :

$$\dot{B} \tilde{A} - \tilde{A} \dot{B} = \beta$$

$$\begin{aligned} B(t_4, t_1) \tilde{A}(t, t_1) - A(t_4, t_1) \tilde{B}(t, t_1) &= B(t_4, t_1) D(t_1, t) + A(t_4, t_1) B(t_1, t) \\ &= B(t_4, t) \end{aligned}$$

et on obtient finalement :

$$-\frac{1}{2} \int_{t_4}^t \int_{t_4}^{t'} \left[\frac{i}{2} \Delta_{op}(t'', t_1), \frac{i}{2} \Delta_{op}(t', t_1) \right] = \frac{i \hbar \vec{k}}{8m} \left(\int_{t_4}^t \beta(t') dt' + B(t_4, t) \right) \vec{k}$$

On peut alors comparer α à b_1 car on sait que b_3 est obtenu à partir de b_1 grâce aux transformations unitaires $U_2(1/2, t, t_1)$ et $U_3(t, t_1, t_3)$ définies respectivement en (3.12) et (3.17) :

$$b_3 = \exp \left[\frac{i}{4} \int_{t_3}^t \delta(t', t_1) dt' \right] \exp \left[\frac{i}{2} \Phi_{op}(t, t_1) \right] b_1$$

et que α est défini en (3.39) à partir de b_3 :

$$\begin{aligned} b_3 &= e^{\frac{i}{4} \int_{t_4}^t \delta(t', t_1) dt'} e^{\frac{i\hbar \vec{k}}{8m} \cdot B(t_4, t) \cdot \vec{k}} e^{\frac{i}{2} \int_{t_4}^t \Delta_{op}(t', t_1) dt'} \alpha \\ &= \exp \left[\frac{i}{4} \int_{t_4}^t \delta(t', t_1) dt' \right] \exp \left[\frac{i}{2} \Phi_{op}(t, t_1) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \Phi_{op}(t_4, t_1) \right] \alpha \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule A.6 de l'appendice A et la propriété suivante de l'appendice B :

$$B(t_4, t) = -\tilde{B}(t, t_4)$$

Finalement on arrive à :

$$\alpha = \exp \left[\frac{i}{4} \int_{t_3}^{t_4} \delta(t', t_1) dt' \right] \exp \left[\frac{i}{2} \Phi_{op}(t_4, t_1) \right] b_1$$

qui donne pour le choix le plus simplificateur $t_4 = t_3 = t_1$:

$$\boxed{\alpha = \exp \left[\frac{i}{2} \left(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi \right) \right] b_1}$$

où l'on voit que α est résolument différent de b_1 , CQFD.

Au lieu de dériver le terme $\Phi_{op}(t, t_1)$ (et obtenir l'équation (3.18)) pour ensuite l'intégrer (à travers la transformation unitaire (3.39)) et faire intervenir des termes supplémentaires dépendant d'un nouveau temps arbitraire t_4 , il est par conséquent plus judicieux de partir de l'équation (3.11) pour obtenir une équation différentielle du deuxième ordre sur une des deux composantes du vecteur d'état.

Ainsi, en dérivant (3.11) on obtient pour la composante supérieure b_1 :

$$\boxed{\ddot{b}_1 + \left(i(\Delta_{op} + \delta) - \frac{\dot{\vec{F}}}{\vec{F}} \right) \dot{b}_1 + \Omega_0^2 \frac{\vec{F}^2}{\vec{F}} b_1 = 0} \quad (3.40)$$

où l'on note la présence de l'expression $\Delta_{op} + \delta$ qui diffère de l'expression du désaccord généralisé $\Delta_{op1}(t, t_1) := \Delta_{op} - \delta$ introduit en (3.16).

Cette équation peut être d'avantage simplifiée lorsque Δ_{op} ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (ie simplement l'opérateur \vec{p}_{op} si l'on néglige l'effet des rotations et des gradients de gravité) ou lorsque l'on approxime $\Delta_{op}(t, t_1)$ par $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$ (voir paragraphe 3.3.2). On se place alors dans la représentation adaptée $|s\rangle$ (représentation impulsion le plus souvent) et l'équation opératorielle (3.40) devient une équation différentielle ordinaire :

$$\ddot{b}_1 + \left(i(\Delta + \delta) - \frac{\dot{\vec{F}}}{\vec{F}} \right) \dot{b}_1 + \Omega_0^2 \frac{\vec{F}^2}{\vec{F}} b_1 = 0 \quad (3.41)$$

où Δ représente l'opérateur Δ_{op} (ou l'opérateur $\overline{\Delta_{op}}$ lorsque c'est possible) en représentation $|s\rangle$.

Remarquons que (3.41) peut être vue soit comme le résultat de l'interaction non-parfaitement résonnante entre une impulsion laser (avec une enveloppe \vec{F}) et un atome à deux niveaux, soit comme le résultat de l'interaction résonnante entre une impulsion modulé en fréquence ("chirped pulses") et un atome à deux niveaux.

Remarque :

On peut également écrire une équation différentielle du deuxième ordre à partir des équations sur les états adiabatiques (3.35) et (3.36).

On obtient alors pour la première :

$$\ddot{b}_{\text{adiab}} - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \dot{b}_{\text{adiab}} + \left(i \left(\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \varepsilon - \dot{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 + \dot{\theta}^2 \right) b_{\text{adiab}} = 0 \quad (3.42)$$

et pour la seconde :

$$\ddot{b}_{\text{adiab}2} + \left(2i\varepsilon - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \right) \dot{b}_{\text{adiab}2} + \dot{\theta}^2 b_{\text{adiab}2} = 0 \quad (3.43)$$

3. Les équations de Bloch optiques

Les équations de Bloch optiques (EBO) sont équivalentes au système d'équations (3.18) et sont constituées de trois équations différentielles du premier ordre. Elles s'obtiennent en considérant l'évolution de l'opérateur densité (de ses éléments de matrice plus exactement) qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \Gamma(\rho) \quad (3.44)$$

où :

$$H := H_0 + H_{\text{ext}}(\vec{r}_{\text{op}}, \vec{p}_{\text{op}}, t) + V_{\text{em}}(\vec{r}_{\text{op}}, t)$$

et où le dernier terme de (3.44) traduit le couplage des atomes au champ électromagnétique du vide (traité comme un réservoir [116]), ie l'amortissement dû à la désexcitation spontanée des niveaux atomiques. C'est d'ailleurs une propriété importante de l'équation (3.44) que de pouvoir rendre compte de certains processus de relaxation (voir partie 3.2).

Dans le cas des transitions Raman que l'on considère (deux niveaux métastables couplés de façon non-résonnante à un troisième niveau que l'on peut éliminer adiabatiquement) on peut négliger ces termes de désexcitation spontanée et obtenir ainsi :

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]$$

En représentation d'interaction par rapport à $H_0 + H_{\text{ext}}$ et après avoir effectué l'approximation des ondes tournantes et les transformations $U_2(1/2, t, t_1)$ et $U_3(t, t_1, t_3)$, ie avec l'Hamiltonien effectif (voir équation (3.18)) :

$$H_{\text{eff}} := -\hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{\text{op}}(t) & \Omega_0 F_{\text{op}}(t) \\ \Omega_0 F_{\text{op}}(t) & -\frac{1}{2}\Delta_{\text{op}}(t) \end{pmatrix}$$

on obtient l'équation de Liouville-Von-Neuman (en posant $\rho_{\text{eff}} := \sigma$) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{bb} & \dot{\sigma}_{ba} \\ \dot{\sigma}_{ab} & \dot{\sigma}_{aa} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\Delta_{\text{op}}, \sigma_{bb}] & \frac{1}{2} (\Delta_{\text{op}} \sigma_{ba} + \sigma_{ba} \Delta_{\text{op}}) \\ +\Omega_0 (F_{\text{op}} \sigma_{ab} - \sigma_{ba} F_{\text{op}}) & -\Omega_0 (F_{\text{op}} \sigma_{bb} - \sigma_{aa} F_{\text{op}}) \\ -\frac{1}{2} (\Delta_{\text{op}} \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \Delta_{\text{op}}) & -\frac{1}{2} [\Delta_{\text{op}}, \sigma_{aa}] \\ +\Omega_0 (F_{\text{op}} \sigma_{bb} - \sigma_{aa} F_{\text{op}}) & +\Omega_0 (F_{\text{op}} \sigma_{ba} - \sigma_{ab} F_{\text{op}}) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

où on a exprimé σ avec ses éléments de matrice σ_{uv} .

Dans le cas où F est rendue indépendante des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} (voir le paragraphe précédent), l'équation (3.45) devient égale à :

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{bb} & \dot{\sigma}_{ba} \\ \dot{\sigma}_{ab} & \dot{\sigma}_{aa} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\Delta_{op}, \sigma_{bb}] & \frac{1}{2} (\Delta_{op} \sigma_{ba} + \sigma_{ba} \Delta_{op}) \\ +\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{ab} - \sigma_{ba}) & -\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) \\ -\frac{1}{2} (\Delta_{op} \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \Delta_{op}) & -\frac{1}{2} [\Delta_{op}, \sigma_{aa}] \\ +\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) & +\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{ba} - \sigma_{ab}) \end{pmatrix}$$

dont l'expression se simplifie encore si Δ_{op} ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (par exemple \vec{p}_{op} dans le cas libre, ou lorsque l'on approxime Δ_{op} par $\bar{\Delta}_{op}$ défini dans l'équation (3.31)).

On obtient ainsi dans la représentation $|s\rangle$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{bb}(s) & \dot{\sigma}_{ba}(s) \\ \dot{\sigma}_{ab}(s) & \dot{\sigma}_{aa}(s) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \Omega_0 \bar{F} (\sigma_{ab}(s) - \sigma_{ba}(s)) & \bar{\Delta}(s) \cdot \sigma_{ba}(s) \\ -\bar{\Delta}(s) \cdot \sigma_{ab}(s) & -\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{bb}(s) - \sigma_{aa}(s)) \\ +\Omega_0 \bar{F} (\sigma_{bb}(s) - \sigma_{aa}(s)) & \Omega_0 \bar{F} (\sigma_{ba}(s) - \sigma_{ab}(s)) \end{pmatrix}$$

Il est alors souvent très pratique d'introduire de nouvelles variables :

$$\begin{aligned} u &: = \frac{1}{2} (\sigma_{ba} + \sigma_{ab}) \\ v &: = \frac{1}{2i} (\sigma_{ba} - \sigma_{ab}) \\ w &: = \frac{1}{2} (\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) \end{aligned}$$

dont les équations d'évolution sont :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\bar{\Delta} v \\ \dot{v} &= \bar{\Delta} u + 2\Omega_0 \bar{F} w \\ \dot{w} &= -2\Omega_0 \bar{F} v \end{aligned}$$

et dont l'interprétation en terme de spin fictif fournit une représentation géométrique très pratique (voir [117] et [134] par exemple).

L'évolution du *vecteur de Bloch* (ou *spin fictif*)

$$\vec{V}_{Bloch} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

est ainsi donnée par (*équations de Bloch optiques*) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\Delta}(t) & 0 \\ \bar{\Delta}(t) & 0 & 2\Omega_0 \bar{F}(t) \\ 0 & -2\Omega_0 \bar{F}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}$$

ou encore :

$$\dot{\vec{V}}_{Bloch} = \vec{B}_{fictif} \wedge \vec{V}_{Bloch}$$

avec :

$$\vec{B}_{fictif}(t) := \begin{pmatrix} -2\Omega_0 \bar{F}(t) \\ 0 \\ \bar{\Delta}(t) \end{pmatrix}$$

Nous ne développerons pas d'avantage cette formulation qui n'est pas la plus adaptée à la résolution de notre problème (voir partie suivante). Néanmoins, et comme on l'a déjà souligné, il est nécessaire de l'utiliser si l'on veut tenir compte de certains processus de relaxation (désexcitation spontanée par exemple).

4. La représentation de Wigner.

Dans les équations étudiées précédemment, nous avons affaire à un problème de représentation. En effet, l'étude de l'interaction laser-atomes conduit à des équations où interviennent les deux opérateurs canoniques \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} , qui ne commutent pas. Ces équations opératorielles, dans les cas très généraux que l'on considère ici, ne peuvent que très rarement être résolues sans auparavant choisir une représentation particulière (position ou impulsion par exemple). Malheureusement, le choix d'une de ces deux représentations transforme les équations différentielles temporelles en équations aux dérivées partielles (par exemple, l'opérateur \vec{p}_{op} devient en représentation position : $-i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{r}}$) dont la résolution est plus complexe.

Pour remédier à ce problème, on peut alors chercher d'autres types de représentations (une représentation intermédiaire, combinaison des deux opérateurs canoniques par exemple), ou trouver une méthode pour éliminer l'un ou l'autre des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} (voir partie 3.4.3), ou encore essayer de s'affranchir de tout choix d'une des deux représentations canoniques.

La dernière proposition a été largement étudiée depuis plusieurs années dans le cadre des "quasi-probabilités" (représentations de Wigner et Shirley) et des diverses "fonctions de l'espace des phases" (fonction Q de Husimi et Kano et distribution P de Glauber et Sudarshan) (pour une revue, voir [135, 136]). L'étude de ces représentations dépasse le sujet de ce mémoire, d'autant plus que nous considérons un champ laser dans un état quasi-classique (cohérent) et que nous négligeons les effets dus à la quantification du champ électromagnétique (ces représentations sont en effet très utiles pour rendre compte de certains effets d'électrodynamique quantique en cavité, voir [136, 137]).

Signalons tout de même que la fonction de Wigner est utilisée avec succès dans l'étude du mouvement des atomes dans une onde laser [138, 139], mais essentiellement pour le régime de Stern-Gerlach (paquets d'ondes atomiques bien localisés, de taille très inférieure à la longueur d'onde laser, et dont la position moyenne varie très peu pendant la durée de l'interaction laser), qui n'est pas le régime dans lequel notre étude se place (on veut pouvoir rendre compte des effets dispersifs du type de l'effet Borrmann, voir parties 3.6 et 3.7).

En outre, lorsque l'on tient compte des champs inertiels et gravitationnels du chapitre 2, l'équation d'évolution de la fonction de Wigner se complique sensiblement, et il est nécessaire d'effectuer plusieurs approximations importantes pour la résoudre. Nous ne détaillerons donc pas d'avantage ces formulations en termes de quasi-probabilités.

Examinons maintenant comment résoudre les équations obtenues dans cette partie.

3.4 Méthodes de résolution

Cette partie a pour objectif d'établir un bilan détaillé des différentes méthodes de résolution de l'équation :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$$

Il est en effet important d'effectuer une mise à jour des approches théoriques les plus appropriées à la résolution de cette équation fondamentale.

Nous commencerons donc par rappeler quels sont les obstacles à la résolution de cette équation (problème de double non-commutation), puis nous verrons comment diverses méthodes de résolution analytique ont permis, ces dernières années, d'augmenter considérablement le nombre de cas particuliers exactement résolubles (théorie $z(t)$). Nous détaillerons ensuite quelques méthodes de résolution basées sur des développements linéaires ou non-linéaires (développements de Dyson, de Magnus, des états adiabatiques successifs...), dont on précisera le domaine de convergence. Enfin, nous verrons plusieurs méthodes d'approximation de l'équation et/ou de ses solutions, dont une sera plus particulièrement détaillée : l'élimination opératorielle.

3.4.1 Position du problème et présentation des méthodes

Nous avons vu dans la partie précédente que le problème de la triple interaction entre une impulsion laser (quasi-monochromatique avec enveloppe spatio-temporelle), un atome à deux niveaux effectifs et divers champs inertiels et gravitationnels (pouvant être décrits dans la cadre d'un Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion), pouvait se mettre en équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle} \quad (3.46)$$

avec :

$$|\varphi(t)\rangle = \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix}$$

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{A}(t, t_1) \vec{r}_{op} - \vec{k} \cdot \dot{B}(t, t_1) \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \dot{\xi}(t, t_1)$$

et une enveloppe d'impulsion laser que l'on peut approximer par (voir paragraphe (3.5.2)) :

$$F_{op} = F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \approx \bar{F}(t, t_1)$$

On a vu également qu'il existe plusieurs équations équivalentes à (3.46).

On peut ainsi passer du système différentiel *opérateur* du premier ordre (3.46) à un système différentiel *scalaire* du premier ordre, dans le cas où $M_{op}(t)$ ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (après approximation ou non). On obtient alors dans la représentation $|s\rangle$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varphi(s; t) = iM(s; t) \varphi(s; t)} \quad (3.47)$$

où l'expression de la matrice $M(s; t)$ est différente selon que l'on se place dans la base d'états *diabatiques* (base naturelle ou canonique associée à $|\varphi_3(t)\rangle$) ou non (base d'états adiabatiques par exemple).

On peut également se restreindre à l'évolution temporelle d'une seule composante de $|\varphi(t)\rangle$, et ainsi obtenir une équation différentielle opératorielle du *deuxième ordre* :

$$\ddot{b}_1 + \left(i(\Delta_{op} + \delta) - \frac{\dot{\overline{F}}}{\overline{F}} \right) \dot{b}_1 + \Omega_0^2 \overline{F}^2 b_1 = 0 \quad (3.48)$$

dont l'expression en représentation $|s\rangle$ (quand $M_{op}(t)$ ne dépend finalement que d'un seul opérateur s_{op}) conduit à une équation différentielle ordinaire du type :

$$\boxed{\ddot{b} + \left(i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right) \dot{b} + \eta^2 b = 0} \quad (3.49)$$

avec :

$$\lambda = \lambda(s; t) := \Delta(s; t) + \delta(t) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(t) := \Omega_0 \overline{F}(t)$$

dans le cas diabatique, et :

$$\lambda = \lambda(s; t) := 2\varepsilon(s; t) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(s; t) := \dot{\theta}(s; t)$$

dans le cas adiabatique (cf paragraphe 3.3.3).

Une autre approche consiste à étudier, au contraire, *plus de deux* composantes en considérant l'évolution des éléments de matrice densité (les trois équations différentielles du premier ordre couplées de Bloch optiques). L'avantage d'une telle méthode réside dans la représentation graphique de l'évolution du vecteur de Bloch (interprétation en termes de spin fictif), qui illustre l'évolution des populations et des cohérences associées à la matrice densité des atomes.

D'autres approches sont également envisageables (représentation de Wigner, analogie avec l'équation de Dirac...), mais elles ne sont pas les plus adaptées à notre étude.

Selon le cas envisagé (forme des champs extérieurs) et le résultat que l'on veut obtenir, on emploiera l'une ou l'autre de ces équations, ou encore une combinaison de plusieurs de ces équations.

Il convient de remarquer dès maintenant que **l'étude et la modélisation** des séparatrices atomiques sont deux choses très différentes, pour lesquelles nous n'avons pas besoin des mêmes informations.

En effet, dans le cas de **l'étude** de l'interaction atomes-laser, on cherche à obtenir toutes les informations possibles, ce qui suppose d'intégrer le système d'équations différentielles précédent, afin d'exprimer ensuite $|\varphi(t)\rangle$ en fonction de $|\varphi(t_0)\rangle$. L'attention est ainsi dirigée vers ce qui se passe **à l'intérieur** de la séparatrice.

En revanche, dans le cadre de la **modélisation** des interféromètres atomiques, on cherche simplement à décrire les paquets d'ondes atomiques qui **sortent** des séparatrices. Dans ce cas, on n'a besoin que de certaines informations : par exemple, le nombre de paquets d'ondes et leur état interne, leurs impulsion et position centrales, leurs largeurs en position et en impulsion... l'étape finale étant de relier ces paquets d'ondes sortant aux paquets d'ondes entrant, sous forme, par exemple, d'une matrice S de transfert. On peut montrer alors qu'on n'a pas toujours besoin d'intégrer l'une des équations rappelées ci-dessus (voir paragraphe 3.4.3).

Dans cette partie, nous adoptons le premier point de vue, et nous nous concentrons sur la résolution des équations (3.46), (3.47), (3.48) et (3.49).

Problème de la double non-commutation

Remarquons tout de suite que résoudre l'équation (3.46) dans le cas le plus général n'est pas une chose aisée. En effet, ce n'est alors pas un système différentiel ordinaire car $M_{op}(t)$ dépend à la fois du temps t et des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} , qui ne commutent pas entre eux.

On sait par exemple que la solution de l'équation :

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = iM(t)\varphi(t) \quad (3.50)$$

où $M(t)$ est une matrice qui dépend du temps d'une façon non-triviale (ie que l'on ne peut pas factoriser $M(t)$ tel que : $M(t) = M * fonction(t)$), n'est pas égale à :

$$\exp\left[i\int_{t_0}^t M(t') dt'\right] \cdot \varphi(t_0) \quad (3.51)$$

En fait, on peut montrer (développement de Magnus, voir paragraphe 3.4.3) qu'elle peut s'écrire par exemple sous la forme :

$$\varphi(t) = \exp\left[i\int_{t_0}^t M(t') dt' + iN(t)\right] \cdot \varphi(t_0)$$

où $N(t)$ est une matrice difficile à obtenir (avec des problèmes de convergence du développement dont N est la somme) et qui s'exprime en fonction de l'intégrale de **commutateurs** du type :

$$[M(t'), M(t'')]$$

avec $t' \neq t''$. Par conséquent, si $M(t)$ ne commute pas avec elle même à des instants différents, la solution de (3.50) n'est pas égale à (3.51).

De la même façon, si l'on cherche à exprimer la solution de l'équation :

$$\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = i\left(\vec{a}(t)\vec{r}_{op} + \vec{b}(t)\vec{p}_{op} + c(t)\right)|\varphi(t)\rangle$$

sous forme d'une exponentielle d'opérateur agissant sur $|\varphi(t_0)\rangle$, on obtient une expression qui dépend de l'intégrale de commutateurs du type :

$$[\vec{a}(t')\vec{r}_{op}, \vec{b}(t'')\vec{p}_{op}]$$

Dans le cas général de l'équation (3.46), on obtient finalement que sa solution (sous forme d'une exponentielle d'opérateur agissant sur $|\varphi(t_0)\rangle$, ie **sous forme explicitement unitaire**) dépend de l'intégrale de **commutateurs** du type :

$$[M_{op}(t'), M_{op}(t'')]$$

avec $t' \neq t''$.

Il y a alors **deux raisons de non-commutation** : le fait que $M_{op}(t)$ soit une matrice dépendant du temps, et le fait que $M_{op}(t)$ dépende de deux opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} ne commutant pas entre eux. C'est cette *double non-commutation* qui nous empêche d'appliquer les méthodes d'intégration habituelles, et d'obtenir dans le cas le plus général (champs extérieurs arbitraires) une solution exacte à l'équation (3.46).

La méthode générale de résolution de ce problème de la triple interaction "laser - atomes - gravito-inertie" et des diverses équations le modélisant est alors simple :

- **si** le cas étudié fait partie des **cas exactement résolubles connus**, il suffit d'utiliser la solution exacte qui lui correspond. Il est alors important de répertorier le maximum de cas exactement résolubles (objectif de la théorie $z(t)$).
- **s'il** n'en fait pas partie, on ne peut obtenir qu'une **solution approchée** (analytiquement et/ou numériquement).

Or avoir une solution approchée signifie que l'on dispose :

- i. d'une **méthode d'approximation de l'équation** permettant d'obtenir une équation résoluble exactement (par exemple, développement et approximation du désaccord, approximation de l'enveloppe de l'impulsion laser...)
- ii. d'une méthode de résolution directe donnant le résultat sous forme d'un **développement** (somme de termes, produit, récurrence, développement en arbre, etc) que l'on tronque, approxime et/ou implémente numériquement.
- iii. d'une **méthode intermédiaire** utilisant les deux approches précédentes : approximation à la fois de l'équation *et* du développement qui est solution de l'équation approchée.

Nous allons donc commencer par lister les couples $(\Delta(t), \bar{F}(t))$ connus qui conduisent à une solution exacte du problème (et décrire leur méthode d'obtention) ; puis nous verrons des solutions sous forme de développements (Magnus, états adiabatiques successifs ou autres) dont on soulignera les domaines de convergence ; enfin, nous verrons comment, dans le cas général, approximer les équations initiales pour retomber sur des cas soit exactement résolubles, soit bien adaptés aux développements vus avant.

3.4.2 Recherche de solutions exactes : la théorie $z(t)$

Bien que des solutions exactes aient été répertoriées pour de nombreux couples $(\Delta_{op}(t), \bar{F}(t))$, on ne connaît pas à ce jour de solution générale aux équations différentielles opératorielles (3.46) et (3.48), et il faut souvent recourir à une intégration numérique.

Néanmoins, lorsque $M_{op}(t)$ ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (après diverses approximations ou non), ces équations opératorielles deviennent, en représentation $|s\rangle$, des équations différentielles ordinaires (équations (3.47) et (3.49)). Ces équations concernant l'évolution temporelle d'un système à deux niveaux interviennent dans de nombreux domaines de la physique (résonance magnétique, physique des collisions, spectroscopie laser, optique quantique...), et ont à ce titre été largement étudiées, essentiellement sous la forme de l'équation différentielle du deuxième ordre (3.49) :

$$\ddot{b} + \left(i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right) \dot{b} + \eta^2 b = 0 \quad (3.52)$$

Les premiers couples $(\lambda(t), \eta(t))$ non-triviaux conduisant à des solutions exactes et physiques ont été étudiés par Rosen et Zener dans les années 30 [140], dans le cadre de la résonance magnétique. S'en suivit une recherche méthodique de ces couples à solution exacte : modèles de Demkov et Kunike [141] et travaux de McCall et Hahn [142], et Allen et Eberly [117] dans les années 60 et 70 ; classes de Bambini et Berman [143] et modèle $\alpha\beta\gamma$ de Hioe et Carroll [144] dans les années 80 ; travaux de Suominen, Garraway et Vitanov [145, 132, 146] dans les années 90 ; approche géométrique de Carmel-Mann [147] et invariants de Ishkhanyan plus récemment [148, 149].

La plupart des solutions exactes connues ont été trouvées par l'intermédiaire de la "théorie $z(t)$ " initiée par Rosen et Zener, améliorée par Demkov et Kunike, puis par Hioe et Carroll, et généralisée

par Ishkhanyan. Elle repose sur la transformation de l'équation (3.49) par un changement de variable sur la variable temporelle

$$t \mapsto z(t)$$

où $t \mapsto z(t)$ est une fonction C^∞ strictement monotone.

Un tel changement de variable conduit à l'équation :

$$b'' + f_b(z) b' + g_b(z) b = 0 \quad (3.53)$$

avec :

$$f_b(z) := \frac{1}{\dot{z}} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} + \left[i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right] \right)$$

$$g_b(z) := \left(\frac{\eta}{\dot{z}} \right)^2$$

où on a gardé la même lettre b pour désigner la nouvelle fonction de z et où le prime désigne la dérivation par rapport à la variable z .

L'idée principale de la théorie $z(t)$ est de comparer cette équation avec une équation connue (par exemple une équation vérifiée par des fonctions spéciales) pour répertorier le maximum de couples $(\lambda(t), \eta(t))$ tels que la solution de (3.53) soit analytique.

Si l'on compare par exemple l'équation (3.53) à l'équation hypergéométrique :

$$b'' + \frac{d - (a + c + 1)z}{z(1 - z)} b' - \frac{ac}{z(1 - z)} b = 0 \quad (3.54)$$

on obtient deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{d - (a + c + 1)z}{z(1 - z)} &= \frac{1}{\dot{z}} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} + \left[i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right] \right) \\ -\frac{ac}{z(1 - z)} &= \left(\frac{\eta}{\dot{z}} \right)^2 \end{aligned}$$

liant $\lambda(t)$, $\eta(t)$ et $z(t)$. On a donc une liberté sur le choix d'une de ces trois fonctions, on parlera alors de "classe de solutions" associée à un choix particulier de deux de ces fonctions. Par exemple, lorsque λ (ie $\Delta(s; t) + \delta(t)$ dans le cas adiabatique usuel) est choisi constant (cas libre par exemple), on obtient une certaine classe d'enveloppes acceptables qui constitue la classe de solutions dite de Bambini-Berman [143], et qui généralise l'impulsion sécante hyperbolique (à enveloppe symétrique) de Rosen-Zener [140].

Parmi les multiples traitements mathématiques des deux équations précédentes, la démarche suivie par Hioe et Carroll [144] est très pratique. Elle consiste à introduire une fonction $f(g(t))$ telle que :

$$z := \frac{1}{2} (1 + f(g(t)))$$

et à déterminer la relation entre f et g pour que la solution de (3.54) soit exacte. Ils obtiennent alors des couples solution qui dépendent de quatre paramètres α , β , γ et δ , et de la fonction $g(t)$.

Parmi ces solutions (listées et commentées dans l'article [144] de Hioe et Carroll), l'ensemble des solutions pour $\delta = 0$ est particulièrement intéressant :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha}{4\pi} \dot{g}(t) \operatorname{sech} \left(\frac{1}{2} g(t) \right) \\ \lambda &= \frac{1}{2\pi} \dot{g}(t) \left[\beta + 2\gamma + \beta \tanh \left(\frac{1}{2} g(t) \right) \right] \end{aligned}$$

parcequ'il redonne pour $g(t) = 2t/\tau$ le premier modèle de Demkov-Kunike :

$$\begin{aligned}\eta_{DK1} &= \frac{\alpha}{2\pi\tau} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ \lambda_{DK1} &= \frac{1}{\pi\tau} \left[\beta + 2\gamma + \beta \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]\end{aligned}$$

pour une impulsion laser symétrique (fonction sécante hyperbolique) avec modulation de fréquence en $\tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$; et pour $\beta = 0$ le modèle original de Rosen-Zener :

$$\begin{aligned}\eta_{RZ} &= \frac{\alpha}{2\pi\tau} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ \lambda_{RZ} &= \frac{2\gamma}{\pi\tau}\end{aligned}$$

pour une impulsion laser symétrique (fonction *sech*) avec un désaccord constant.

Une autre approche, plus récente et due à Ishkhanyan [149], est plus puissante pour fournir des classes de solutions. Elle généralise l'approche précédente en effectuant non seulement un changement de variable ($t \mapsto z(t)$ où $z(t)$ est à valeur complexe) dans l'équation (3.52), mais aussi un changement de fonction :

$$\boxed{b \rightarrow u(z) = \varphi(z) * b} \quad (3.55)$$

L'équation obtenue :

$$\ddot{b} + \left(2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) \dot{b} + \left(\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \left(f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + g_b \dot{z}^2 \right) b = 0 \quad (3.56)$$

peut s'identifier alors à l'équation initiale (3.52) pour donner le système d'équations :

$$\begin{aligned}i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} &= 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \\ \eta^2 &= \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \left(f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + g_b \dot{z}^2\end{aligned}$$

La première de ces équations permet de déterminer φ :

$$\varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int^t \left(i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} - f_b \dot{z} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) (t') dt' \right)$$

et la seconde conduit à :

$$\eta^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right) - \frac{1}{4} \left(i\lambda - \frac{\dot{\eta}}{\eta} \right)^2 = g_b \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) - \frac{1}{4} \left(f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 \quad (3.57)$$

où on reconnaît au membre de gauche l'**invariant de l'équation** (3.52) et au membre de droite celui de l'équation (3.56) quand $\varphi = 1$:

$$\ddot{b} + \left(f_b \dot{z} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right) \dot{b} + g_b \dot{z}^2 b = 0 \quad (3.58)$$

Cette égalité est une illustration du théorème des invariants :

"les solutions des équations (3.52) et (3.58) sont reliées par (3.55) si et seulement si les équations ont le même invariant".

Cela signifie que, pour f_b et g_b donnés (ie pour une certaine forme d'équation imposée, par exemple, hypergéométrique), les couples $(\lambda(t), \eta(t))$ solutions de (3.57) sont les couples pour lesquels l'équation initiale (3.52) peut être transformée en l'équation (3.53), ie les couples conduisant à une solution exacte de (3.52).

On peut alors montrer [149] que si $\eta^*(z)$ et $\lambda^*(z)$ sont des solutions particulières de (3.57) pour $z = t$, ie de l'équation :

$$\eta^{*2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(i\lambda^* - \frac{\eta^{*'}}{\eta^*} \right) - \frac{1}{4} \left(i\lambda^* - \frac{\eta^{*'}}{\eta^*} \right)^2 = g_b - \frac{1}{2} (f_b)' - \frac{1}{4} (f_b)^2 \quad (3.59)$$

alors les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \eta(t) &: = \eta^*(z) \dot{z} \\ \lambda(t) &: = \lambda^*(z) \dot{z} \end{aligned}$$

sont solutions de (3.57) pour toute fonction $z(t)$

Par conséquent, chaque couple $(\eta^*(z), \lambda^*(z))$ solution de (3.57) génère un ensemble de couples $(\eta(t), \lambda(t))$ solution de (3.49), ie fournit un ensemble de cas exactement résolubles du problème initial.

On peut alors choisir une équation particulière, ie un couple $(f_b(z), g_b(z))$ particulier, dont on connaît les solutions et à laquelle nous pouvons comparer notre équation initiale.

Par exemple, le cas de l'équation hypergéométrique :

$$b'' + \frac{d - (a + c + 1)z}{z(1 - z)} b' - \frac{ac}{z(1 - z)} b = 0$$

revient à choisir :

$$\begin{aligned} f_b(z) &= \frac{d - (a + c + 1)z}{z(1 - z)} \\ g_b(z) &= -\frac{ac}{z(1 - z)} \end{aligned}$$

On peut montrer que l'invariant de cette équation hypergéométrique s'exprime sous la forme :

$$\frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha}{1 - z} + \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{(1 - z)^2}$$

et qu'il est donc sensé de rechercher des couples $(\eta^*(z), \lambda^*(z))$ solutions de (3.57) ayant la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{*'}}{\eta^*} &= \frac{\eta_1}{z} + \frac{\eta_2}{1 - z} \\ \lambda^* &= \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{1 - z} \end{aligned}$$

avec $\eta_1, \eta_2, \lambda_1$ et λ_2 des constantes.

On trouve finalement, pour ce choix de $(f_b(z), g_b(z))$ et pour cette forme de solutions, quatre solutions indépendantes pour $(\eta^*(z), \lambda^*(z))$:

$$\begin{aligned} \frac{\eta^*}{\eta_0^*} &= \frac{1}{z(1 - z)}; \frac{1}{\sqrt{z}(1 - z)}; \frac{1}{(1 - z)}; \frac{1}{\sqrt{z(1 - z)}} \\ \lambda^* &= \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{1 - z} \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la propriété des invariants énoncée plus haut.

Par exemple, dans le quatrième cas $\eta^* = \eta_0^*/\sqrt{z(1-z)}$, on obtient comme ensemble de solutions :

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{\eta_0^* \dot{z}}{\sqrt{z(1-z)}} \\ \lambda(t) &= \left(\frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{1-z} \right) \dot{z}\end{aligned}$$

qui redonne, lorsque l'on se limite à des transformations $t \mapsto z(t)$ à valeur réelle, la classe de solutions de Hioe et Carroll [144], et pour $z(t) = (1 + \tanh(t/\tau))/2$ le premier modèle de Demkov et Kunike [141, 145]. Ce cas redonne également la classe de solutions de Bambini-Berman [143] quand $\lambda(t) = \lambda$ est constant, et donc en particulier le modèle de Rosen-Zener [140] (impulsion en *sech*).

D'une façon générale, l'approche de Ishkhanyan englobe les résultats antérieurs et les généralise (fonction $z(t)$ complexe et transformation φ). On peut ainsi trouver de nombreuses autres solutions (en choisissant d'autres transformations $z(t)$ et d'autres fonctions f_b et g_b) dont l'interprétation physique reste à faire (forme réelle des impulsions laser et dépendance temporelle *physique* du désaccord Δ).

Par exemple, suivant la même démarche, on peut transformer l'équation initiale (3.52) en l'équation dite *cylindrique parabolique* lorsque (modèle de Landau-Zener [150, 151]) :

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \eta_0 \\ \lambda(t) &= \lambda_0 + \lambda * t\end{aligned}$$

(créneau temporel avec désaccord linéaire en temps) dont l'intérêt est très important lorsque l'on tient compte de la gravité pendant l'interaction laser (voir par exemple [53, 54]), et dont la solution s'exprime avec des fonctions cylindriques paraboliques (ou fonctions de Weber).

L'étude précédente de l'équation différentielle du deuxième ordre (3.41) montre l'utilité de cette dernière pour déterminer des solutions exactes au problème de l'interaction d'atomes à deux niveaux avec des champs extérieurs variés (inertie, gravitation, impulsion laser avec enveloppe modulée dans le temps). Nous ne développerons pas d'avantage cette recherche de nouvelles solutions exactes, car nous utiliserons essentiellement par la suite trois des solutions les plus simples vues précédemment :

- i. l'impulsion créneau avec un désaccord constant (*modèle de Rabi* [152])
- ii. l'impulsion créneau avec un désaccord linéaire en temps (*modèle cylindrique parabolique*)
- iii. l'impulsion sécante hyperbolique (*sech*) avec un désaccord constant (*modèle de Rosen-Zener*)

dont les solutions exactes sont données par exemple dans [152], [53] et [52] respectivement.

Evidemment, les impulsions réellement utilisées en interférométrie atomique n'ont pas toutes une enveloppe en *sech* (et encore moins en créneau, pour les raisons détaillées au paragraphe (3.5.1)) : beaucoup ont une forme proche de fonctions Gaussiennes ou de diverses fonctions apodisantes (pour limiter au maximum l'apparition de lobes secondaires, voir la modélisation des parties 3.6 et 3.7). Cependant, la fonction *sech* présente de nombreux avantages. Tout d'abord, elle a une forme très proche d'une Gaussienne ou d'une Lorentzienne, et peut donc être utilisée comme fonction *approchant* une enveloppe Gaussienne ou Lorentzienne. Ensuite, elle présente un bon compromis vis-à-vis de l'apparition de lobes secondaires dans l'espace des impulsions. Enfin, c'est une fonction simple ($sech := 1/\cosh$) qui a été largement étudiée et qui est facile à manipuler.

Remarquons qu'il pourrait être judicieux d'envisager des impulsions ayant une forme non-conventionnelle (asymétriques, modulés en fréquence, définis à partir de fonctions spéciales...) et remplissant un peu moins les conditions de séparatrice requises par les expériences, mais pour lesquelles nous connaissons une solution exacte, ce qui permettrait notamment d'augmenter la précision théorique des calculs

concernant l'évolution d'atomes à l'intérieur de séparatrices ou des calculs de déphasages interférométriques (après résolution numérique). La diminution du contraste des franges due à la perte en efficacité des séparatrices (à cause d'une inversion non-totale dans les lames π par exemple) serait alors compensée par une plus grande précision dans l'expression du déphasage.

Précisons également que, dans les cas où la structure des interactions (types d'impulsions laser, géométrie de l'interaction avec les lasers et avec les autres champs extérieurs) est fixe, on peut recourir à diverses approximations (voir paragraphes suivants) et/ou utiliser des moyens numériques pour résoudre l'équation (3.41).

Soulignons enfin l'existence d'autres méthodes *analytiques* de résolution de ces équations différentielles. Citons, entre autres, la méthode de Floquet, qui s'applique lorsque les coefficients des équations sont périodiques (avec la même période), et ses généralisations que sont la théorie de Floquet multi-périodique et la théorie (t, t') .

Ces méthodes, qui reposent sur le théorème de Floquet (utilisation de l'opérateur translation temporelle pour passer des solutions de Floquet aux solutions initiales [153]), permettent de transformer une équation de Schrödinger avec un Hamiltonien dépendant du temps en une équation équivalente avec un *Hamiltonien indépendant du temps* (dit *Hamiltonien de Floquet* ou *opérateur quasi-énergie*), et ainsi d'appliquer les règles de calcul usuelles pour de tels Hamiltoniens (développement sur une base d'états propres, évolution temporelle de chaque état propre à l'aide de la valeur propre correspondante, re-sommation finale sur les états évolués). L'inconvénient d'une telle simplification est la transformation d'un paramètre (une phase laser par exemple) en une variable dynamique supplémentaire et la nécessité de calculer les états propres de ce nouvel Hamiltonien (pour une revue voir [154]).

La théorie de Floquet fut initialement utilisée par Autler et Townes en 1955 [155], par Shirley en 1965 [156] et par Sambe en 1973 [157], dans le but de traiter, d'une façon générale, l'effet d'un champ sinusoïdal sur un système à deux niveaux, afin d'aller au delà de l'approximation des ondes tournantes. Son application à l'étude de l'effet Bloch-Siegert et aux transitions multiphotoniques est en effet particulièrement bien adaptée [156, 158, 122, 159], que ce soit en optique atomique ou en résonance magnétique nucléaire. On peut également montrer que la matrice (infinie) représentant l'Hamiltonien de Floquet est intimement liée à celle de l'Hamiltonien adiabatique. Aussi, de nombreux travaux cherchent aujourd'hui à éclaircir et à utiliser les relations entre les états adiabatiques (états habillés d'une cavité par exemple) et les états de Floquet [160, 154, 122].

Néanmoins, le calcul des états propres de l'Hamiltonien de Floquet est, dans le cas général, très compliqué [161, 162], et les solutions s'obtiennent le plus souvent à l'aide de développements perturbatifs. De plus, bien que plusieurs généralisations aient été réalisées : théorie de Floquet multi-périodique [163, 164], théorie (t, t') [165, 166, 167, 168]... , et que leur implémentation numérique soit très efficace, ces méthodes ne s'appliquent pas facilement aux Hamiltoniens dont la dépendance temporelle n'est pas simple (comme dans notre cas, voir paragraphes suivants). Par conséquent, nous ne développerons pas d'avantage la recherche de solutions analytiques par ces *méthodes de type Floquet*. Soulignons tout de même que dans certains cas simples (après approximations par exemple), la méthode de Floquet peut s'appliquer efficacement, et qu'il serait intéressant, dans les cas plus complexes, de développer une méthode intermédiaire du genre *multi- (t, t')* , à l'instar des résultats obtenus dans le cadre des deux généralisations précédentes.

3.4.3 Approche directe : solution sous forme de développements

Comme on l'a déjà précisé, il n'existe pas à ce jour de solution exacte à l'équation générale (3.46) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$$

même si on connaît de plus en plus de solutions particulières ayant une forme *compacte* (créneau temporel avec désaccord linéaire en temps, impulsions en *sech* avec désaccord constant... voir le paragraphe précédent), le mot "*compact*" étant ici employé pour désigner une solution dont l'expression est une somme (ou un produit) *finie* de termes.

Il existe en effet de nombreuses méthodes de résolution de (3.46) conduisant à un développement, *infini ou non*, de la solution (sous forme d'une somme, d'un produit ou autre). Nous allons maintenant en voir quelques unes.

1. Développement linéaire de Dyson

Considérons donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X \quad \text{avec} \quad X(t_0) = X_0 = 1 \quad (3.60)$$

où $A(t)$ est une famille finie d'opérateurs d'un espace de Banach (muni d'une norme $\|\dots\|$). Cette définition englobe naturellement les cas qui nous intéressent dans cette étude, à savoir : $A(t) = iM_{op}(t)$.

Parmi les différentes méthodes de résolution de cette équation, la plus simple est le développement *itératif* obtenu à partir de l'équation intégrale :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A(t') X(t') dt'$$

qui donne un développement sous forme d'une somme infinie : le *développement de Dyson* :

$$X(t) = \left(1 + \int_{t_0}^t A(t') dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} A(t') A(t'') dt' dt'' + \dots \right) X_0$$

qui n'est pas compact (au sens défini plus haut) mais que l'on peut écrire sous une forme à l'apparence compacte au moyen de l'opérateur dit *de Dyson* ou d'*ordonancement dans le temps* \mathcal{T} (time ordering operator) :

$$\boxed{X(t) = \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) X_0}$$

qui généralise l'opérateur exponentiel et qui redonne le résultat habituel dans le cas où $[X(t'), X(t'')] = 0$ pour $t' \neq t''$.

Le développement linéaire de Dyson est très pratique lorsque $A(t)$ peut être traité en *perturbation* ($\|A(t)\|$ petit, ou t proche de t_0) , car dans ce cas il fournit les *différents ordres* du traitement perturbatif.

Par exemple, le développement au premier ordre est :

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(1 + \int_{t_0}^t A(t') dt' \right) X_0 \\ &= \exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) X_0 \end{aligned}$$

ce qui revient à négliger les commutateurs évoqués au paragraphe (3.6.1).

Cela nous permet d'ailleurs d'écrire l'opérateur de Dyson d'une autre manière :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) &= \prod_{dt_j \rightarrow 0} \exp(A(t_j) dt_j) \\ &= \prod_{dt_j \rightarrow 0} (1 + A(t_j) dt_j) \end{aligned} \quad (3.61)$$

beaucoup plus efficace lors des calculs numériques.

2. Méthodes non-linéaires d'intégration et développement de Magnus

En dehors de cette méthode *linéaire* de résolution, il peut être intéressant de travailler avec des méthodes *non-linéaires*, ie de transformer l'équation linéaire (3.60) en une équation non-linéaire.

Il peut paraître étrange d'utiliser de telles méthodes qui compliquent le problème initial (apparition de problèmes de convergence), mais elles ont l'avantage de préserver, lors de l'approximation des développements obtenus, certaines caractéristiques géométriques importantes de la solution (l'unitarité par exemple). En effet, à quelques exceptions près, les développements dont on parle sont *infinis*, et il faut à un moment donné les *tronquer* pour obtenir des solutions approchées utilisables (analytiquement et/ou numériquement). Il est alors important que ces *développements tronqués* aient les mêmes propriétés que la solution non-tronquée. En particulier, la propriété d'*unitarité* est cruciale, et c'est pourquoi beaucoup de ces développements utilisent la fonction exponentielle.

Parmi les méthodes non-linéaires qui ont été largement étudiées, citons :

- i. la méthode de **Magnus** [169] :

$$X(t) = e^{\Omega(t)} X_0$$

- ii. la méthode originelle de **Fer** [170] :

$$X(t) = e^{F_1(t)} e^{F_2(t)} \dots X_0$$

- iii. les méthodes **symétriques de Fer** [170, 171] :

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{S_1(t)} e^{S_2(t)} \dots e^{S_2(t)} e^{S_1(t)} X_0 \\ &= \dots e^{T_2(t)} e^{T_1(t)} e^{T_2(t)} \dots X_0 \end{aligned}$$

- iv. la méthode de **Cayley** [172, 171] :

$$X(t) = \left(1 - \frac{1}{2}C(t)\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}C(t)\right) X_0$$

De toutes celles-ci, c'est la **méthode de Magnus** qui a connu le plus grand succès, et ce dans tous les domaines de la physique (pour une revue succincte, voir [173, 174]).

Son principe est simple : écrire $X(t)$ sous la forme d'une exponentielle :

$$\boxed{X(t) = e^{\Omega(t)} X_0}$$

et résoudre l'équation (non-linéaire) sur $\Omega(t)$.

Ainsi, selon la propriété A.8 de l'appendice A sur la dérivation de l'exponentielle d'une matrice (ou d'une famille finie d'opérateurs), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left(\dot{\Omega} + \frac{1}{2!} [\Omega, \dot{\Omega}] + \frac{1}{3!} [\Omega, [\Omega, \dot{\Omega}]] + \dots \right) X \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} ad_{\Omega}^j(\dot{\Omega}) X \\ &= \varphi(ad_{\Omega}(\dot{\Omega})) X \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &: = (e^z - 1)/z \\ ad_{\Omega}(Y) &: = [\Omega, Y] \quad \forall Y \end{aligned}$$

En outres, pour $\|\Omega(t)\| < \pi$, φ est inversible et :

$$(\varphi(ad_\Omega))^{-1}(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} ad_\Omega^j(Y) \quad \forall Y$$

avec β_j le $j^{\text{ème}}$ nombre de Bernouilli apparaissant dans la formule :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} z^j$$

qui converge pour $|z| < 2\pi$.

On obtient finalement l'équation non-linéaire suivante :

$$\dot{\Omega} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} ad_\Omega^j(A) \quad \text{et} \quad \Omega(t_0) = 0$$

(avec $ad_\Omega^0(A) = A$ et $ad_\Omega(A) = [\Omega, A]$), qui est équivalente à (3.60) et dont la solution s'exprime sous la forme d'un développement en série :

$$\boxed{\Omega(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j(t) \quad \text{avec} \quad \Omega_j(t_0) = 0} \quad (3.62)$$

Deux problèmes se posent alors :

- comment obtenir les termes du développement précédent ?
- quel est le domaine de convergence d'un tel développement ?

(a) Comment obtenir les termes du développement de Magnus

Dès le premier papier de Magnus en 1954 [169], la question s'est posée de savoir s'il existait une formule explicite des coefficients du développement de Magnus. Nous allons voir dans quelle mesure on sait répondre aujourd'hui à cette question.

Une première méthode de résolution repose sur un calcul itératif des coefficients en utilisant l'*algèbre des commutateurs* de l'équation précédente

$$\dot{\Omega} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} ad_\Omega^j(A) \quad (3.63)$$

On obtient ainsi des formules *récurrentes* [175] ou des développements en *arbre* [176, 177, 178] qui fournissent facilement les premiers coefficients :

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \int_{t_0}^t A(t') dt' + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t'), A(t'')] dt' dt'' \\ & + \frac{1}{6} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} [[A(t'), A(t'')], A(t''')] dt' dt'' dt''' \\ & + \frac{1}{6} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} [A(t'), [A(t''), A(t''')]] dt' dt'' dt''' + \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

(l'expression des quatrième, cinquième et sixième coefficients est donnée dans les références [175], [179], [180] respectivement). Bien que ces méthodes soient puissantes (surtout d'un point de vue numérique), elles ne fournissent pas de formule explicite permettant de connaître n'importe quel terme du développement de Magnus.

Ce genre de *formule explicite* existe pourtant depuis 1970 et les travaux de Mielnik et Plebanski [181] sur la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (voir appendice A).

Remarquons d'ailleurs que le développement de Magnus peut être vu comme l'analogue *continu* de cette formule de Baker-Campbell-Hausdorff (voir formule (3.61)) :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{[A,B]}{2} + \frac{[A,[A,B]] + [[A,B],B]}{12} + \dots}$$

Mielnik et Plebanski, et plus récemment Suarez et Saenz [174], ont en effet montré qu'il était possible d'obtenir une telle formule explicite en utilisant une autre approche que la résolution de l'équation (3.63), ie en n'utilisant pas explicitement l'algèbre de Lie des commutateurs.

A l'aide de fonctions créneaux $\theta_{i,j}$, ils obtiennent ainsi [174, 173] :

$$\boxed{\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n \frac{\Theta_n!(n-1-\Theta_n)!}{n!} (-1)^{n-1-\Theta_n} A(t_n) \dots A(t_1)} \quad (3.65)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Theta_n &: = \theta_{n,n-1} + \dots + \theta_{2,1} \\ \Theta_1 &: = 0 \\ \theta_{i,j} &: = 1 \text{ si } t_i \geq t_j \quad \text{et} \quad 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

ie en introduisant $n!$ secteurs définis par $t_{i_n} > t_{i_{n-1}} > \dots > t_{i_1}$.

En utilisant les résultats de l'appendice A, on peut évidemment retrouver la structure usuelle en terme de commutateurs (voir aussi [174]).

Une telle approche a non seulement l'avantage de fournir l'expression de chacun des termes du développement de Magnus, mais aussi, comme nous allons maintenant le voir, de permettre une analyse plus fine de la convergence d'un tel développement

b. Quel est le domaine de convergence d'un tel développement ?

Le problème de la convergence des développements non-linéaires vus ci-dessus est crucial, car dans le cas d'un traitement en champ fort des séparatrices laser (ie pour $A(t)$ quelconque, et pour des temps d'interaction et d'intégration longs), on doit absolument savoir si ces développements infinis convergent, et donc s'ils peuvent être utilisés comme solution physique au problème de l'interaction atome-laser (plusieurs études et observations de la divergence de tels développements ont été réalisées, voir par exemple [182, 183, 184, 185, 54]).

D'une façon générale, et comme le précisait déjà Magnus en 1954 [169], de tels développements ont une convergence locale, ie ils convergent pour des temps suffisamment courts et à condition que $\|A(t)\|$ ne soit pas trop grand. Il est alors nécessaire de quantifier au mieux ces domaines de convergence et de donner une approximation de leurs bornes.

La méthode de délimitation du domaine de convergence du développement de Magnus s'est pendant longtemps appuyée sur le développement itératif qu'on obtient à partir de (3.63). Le résultat le plus récent [186, 187] basé sur cette approche montre que le rayon de convergence est *au moins égal* à 1,086869, ie que le développement de Magnus converge pour t et $A(t)$ vérifiant :

$$\int_{t_0}^t \|A(t')\| dt' \leq 1,086869 \quad (3.66)$$

Récemment, une autre méthode s'appuyant sur la formule de Mielnik et Plebanski a fourni une borne de convergence différente.

En effet, selon les travaux de Moan et Oteo [173], on peut, en bornant astucieusement le terme général de l'équation (3.65), obtenir comme condition de convergence :

$$\|A(t)\|^* \cdot t < 2 \quad (3.67)$$

où $\|A(t)\|^* := \max(\|A(s)\|)$ pour $s \in [0, t]$.

Dans le cas où $A(t)$ ne varie pas trop rapidement, on obtient alors :

$$\int_{t_0}^t \|A(t')\| dt' \sim \|A(t)\|^* . t < 2$$

qui montre que le domaine de convergence établi par la méthode non-itérative (à partir de (3.65)) est environ deux fois plus grand que celui établi par la méthode utilisant les commutateurs.

L'établissement de la borne supérieure du domaine de convergence dépend donc fortement de la façon dont on écrit les termes du développement de Magnus (ie ici avec ou sans commutateurs). C'est tout à fait normal car, comme le soulignent Moan et Oteo [173], le fait de borner un commutateur $\|[A, B]\|$ par la valeur $2\|A\|\|B\|$ fait apparaître un facteur géométrique important, qui augmente de façon dramatique avec le nombre de commutateurs présents dans les termes de (3.64).

Ce domaine de convergence peut être encore augmenté lorsque $A(t)$ a une forme particulière.

Par exemple, dans le cas d'un système à deux niveaux soumis à un Hamiltonien dépendant du temps (ie précisément notre cas) :

$$H(t) = \frac{\omega(t)}{2} (\vec{n}(t) \cdot \vec{\sigma})$$

où $\vec{n}(t)$ est un vecteur unitaire dépendant du temps et où $\vec{\sigma}$ est le vecteur représentant les trois matrices de Pauli, Maricq [188], et plus récemment Miao [189], obtiennent comme condition de convergence :

$$\boxed{\int_{t_0}^t |\omega(t')| dt' < 2\pi}$$

où $\pm\omega(t)/2$ sont les deux valeurs propres de l'Hamiltonien $H(t)$.

Dans le cas pratique que nous considérons dans ce mémoire (système à deux niveaux effectifs modélisant une transition Raman à deux photons optiques), nous cherchons à réaliser des séparatrices atomiques, et plus particulièrement des "lames" (ou "impulsions") π ou $\pi/2$, pour lesquelles on a, dans le cas libre :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t |\omega(t')| dt' &= \frac{\pi}{2} & \text{: lame } \pi \\ \int_{t_0}^t |\omega(t')| dt' &= \frac{\pi}{4} & \text{: lame } \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

En présence de champs inertiels et gravitationnels, et du fait que l'enveloppe de l'impulsion laser dépend du temps, ces relations doivent être modifiées. Cependant, du fait de la faible influence des champs extérieurs (voir partie 3.5), on aura vraisemblablement des relations du même ordre de grandeur :

$$\int_{t_0}^t |\omega(t')| dt' \sim \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4}$$

Dans tous les cas, pour les champs extérieurs et les impulsions que l'on considère, on aura toujours :

$$\int_{t_0}^t |\omega_1(t') - \omega_2(t')| dt' < 2\pi$$

où $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ sont les deux valeurs propres du Hamiltonien (voir paragraphe suivant), et la convergence du développement de Magnus sera assurée.

On observe d'ailleurs que, du fait que $1,086869 < \frac{\pi}{2} < 2$, la condition (3.66) n'est pas vérifiée alors que la condition (3.67) est vérifiée lorsque l'enveloppe temporelle de l'impulsion ne varie pas

trop rapidement. On voit donc, sur cet exemple, que l'utilisation de l'équation (3.63) pour délimiter le domaine de convergence du développement de Magnus ne nous permettrait pas de conclure pour une impulsion π , alors que l'approche de Moan et Oteo [173], qui est basée sur la formule de Mielnik et Plebanski, le permet.

3. Implémentation numérique de ces développements

Une des raisons essentielles de l'utilisation de tels développements (Magnus ou autres) est leur facilité d'implémentation numérique et leur efficacité (optimisation et réduction du nombre d'opérations à effectuer par les calculateurs). De nombreuses procédures de résolution numérique de l'équation initiale (3.60) ont ainsi été développées (pour une revue rapide et récente de ces méthodes, voir [177, 190]) : règle de l'exponentielle médiane, méthode de Runge-Kutta, méthode de Strang-Marchuk-Trotter, approximations de Chebyshev ou Lanczos... et bien sûr développement de Magnus.

Les méthodes numériques basées sur le développement itératif (3.63) sont en effet de plus en plus utilisées et étudiées [180, 178, 191] car elles se révèlent très performantes (voir [190, 178]).

Elle reposent principalement sur une *discrétisation* de l'intervalle d'intégration ($t_j := t_0 + s.j$ avec $s := (t - t_0)/n$ et $j \in [0, n]$), puis d'un *calcul pas à pas* du X de chaque tranche $[t_j, t_{j+1}]$:

$$X_{j+1} := X(t_{j+1}) = \exp(\Omega_j) X_j$$

où Ω_j est une approximation adaptée de $\Omega(t_j)$. Cette approximation se fait en deux étapes : d'abord on *tronque* le développement itératif (3.64) à un certain ordre choisi, puis on remplace $A(t)$ dans l'expression restante par un *polynôme d'interpolation* afin de simplifier le calcul numérique de ces Ω_j .

Par exemple, l'approximation la plus simple est celle utilisant la règle du point milieu. Elle conduit à :

$$\Omega_j = s * A(t_j + s/2)$$

D'autres procédures d'approximation plus sophistiquées permettent d'augmenter la rapidité de convergence du calcul numérique. Citons, entre autres, la procédure très puissante de Blanes, Casas et Ros [180] qui utilise la règle de Simpson et qui conduit à :

$$\Omega_j = \frac{s}{6} (A(t_j) + 4A(t_j + s/2) + A(t_{j+1})) - \frac{s^2}{12} [A(t_j), A(t_{j+1})]$$

Cette méthode d'ordre 4 (ie exacte à des termes en s^5 près) ne requiert le calcul que d'un seul commutateur, mais d'autres méthodes, plus fines, peuvent nécessiter le calcul de plusieurs commutateurs (méthodes d'ordre 6 avec 4 commutateurs, d'ordre 8 avec 10 commutateurs, etc) [180, 178].

Evidemment, ces procédures n'ont de sens que si le développement concerné converge (ie pour s suffisamment petit). Néanmoins, on a pu observer que le développement "numérique" de Magnus était proche de la solution exacte même pour des valeurs élevées de $s * \|A(t \in [t_j, t_{j+1}])\|$ [191], et plusieurs études sont en cours pour comprendre ce bon comportement inattendu.

4. Une autre approche : les états adiabatiques successifs

Notre recherche d'informations sur l'évolution des paquets d'ondes atomiques à l'intérieur des séparatrices laser nous amène à construire, avec l'idée précédente de transformation de l'équation initiale, une équation que l'on pourrait appeler "sur-mesure". En effet, il serait très utile de trouver une procédure (itérative par exemple) de transformation de l'équation initiale conduisant à une équation, peut-être moins simple à résoudre exactement, mais plus simple à approximer, et qui nous fournirait directement des informations importantes comme les états propres d'évolution, les *vraies* énergies du système et les vitesses de groupe atomiques...

Parallèlement à cela, on sait que le passage de la base diabatique à la base d'états adiabatiques est particulièrement puissant dans le cas d'un Hamiltonien indépendant du temps (voir paragraphe 3.3.3). Dans ce cas, la matrice d'interaction (ie $M_{adiab}(s; t)$ par exemple) de l'équation obtenue est diagonale et indépendante du temps, et on a ainsi directement accès aux états propres d'évolution (les états adiabatiques) et aux *vraies* énergies du système, ce qui permet, entre autres, d'obtenir les vitesses de groupe atomiques (voir partie 3.6).

L'idée du *développement en états adiabatiques successifs* est alors de combiner ces deux approches en itérant le processus de passage dans une base d'états adiabatiques, comme celui décrit au paragraphe 3.3.3, et en observant si les termes non-diagonaux successifs deviennent négligeables par rapport aux termes diagonaux.

Dans ce paragraphe 3.3.3, on a montré en effet comment passer de la base diabatique \mathcal{D} à la base dite adiabatique \mathcal{E} à l'aide de la transformation unitaire U_{adiab} :

$$U_{adiab} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\theta \in [0; \pi/2[$ est défini par :

$$\tan(2\theta(s; t)) := \frac{2\Omega_0 F(s; t, t_1)}{\Delta(s; t, t_1)}$$

ce qui permettrait de passer de l'équation différentielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_3(s; t) \\ \dot{a}_3(s; t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta(s; t, t_1) & \Omega_0 F(s; t, t_1) \\ \Omega_0 F(s; t, t_1) & -\frac{1}{2}\Delta(s; t, t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3(s; t) \\ a_3(s; t) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

à l'équation différentielle *adiabatique* :

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_{adiab}(s; t) \\ \dot{a}_{adiab}(s; t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \varepsilon(s; t) & i\dot{\theta}(s; t) \\ -i\dot{\theta}(s; t) & -\varepsilon(s; t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{adiab}(s; t) \\ a_{adiab}(s; t) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon(s; t) &:= \sqrt{\Omega_0^2 F^2(s; t, t_1) + \frac{1}{4}\Delta^2(s; t, t_1)} \\ \dot{\theta}(s; t) &= \frac{\Omega_0 \dot{F} \Delta - F \dot{\Delta}}{4\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Considérons donc l'équation différentielle ordinaire indicée par j :

$$\boxed{\dot{\varphi}_j = iM_j(t)\varphi_j}$$

avec :

$$\varphi_j(t) := \begin{pmatrix} b_j(t) \\ a_j(t) \end{pmatrix}$$

et ($\alpha_j(t)$ et $\beta_j(t)$ sont réels) :

$$M_j(t) := \begin{pmatrix} \alpha_j(t) & \beta_j(t) \\ \beta_j(t) & -\alpha_j(t) \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres réelles sont égales à $\pm\varepsilon_j$:

$$\varepsilon_j(t) := \sqrt{\alpha_j^2(t) + \beta_j^2(t)}$$

Considérons alors le changement de fonction :

$$\boxed{\varphi_j(t) := U_j(t) \cdot \phi_j(t)}$$

à l'aide de la transformation $U_j(t)$:

$$\begin{aligned} U_j(t) &: = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & i \sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & -i \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $(\alpha_j(t))$ est supposé différent de zéro) :

$$\tan(2\theta_j(t)) := \frac{\beta_j(t)}{\alpha_j(t)}$$

On obtient ainsi une nouvelle équation différentielle :

$$\dot{\phi}_j = i \begin{pmatrix} \varepsilon_j(t) & \dot{\theta}_j(t) \\ \dot{\theta}_j(t) & -\varepsilon_j(t) \end{pmatrix} \phi_j$$

avec :

$$\dot{\theta}_j(t) = \frac{\dot{\beta}_j \alpha_j - \beta_j \dot{\alpha}_j}{2\varepsilon_j^2}$$

qui a la même structure que l'équation différentielle précédente indicée par j .

Posons donc :

$$\boxed{\varphi_{j+1}(t) := \phi_j(t)}$$

$$M_{j+1}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{j+1}(t) & \beta_{j+1}(t) \\ \beta_{j+1}(t) & -\alpha_{j+1}(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varepsilon_j(t) & \dot{\theta}_j(t) \\ \dot{\theta}_j(t) & -\varepsilon_j(t) \end{pmatrix}$$

ie :

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1}(t) &: = \varepsilon_j(t) = \sqrt{\alpha_j^2(t) + \beta_j^2(t)} \\ \beta_{j+1}(t) &: = \dot{\theta}_j(t) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}_j \alpha_j - \beta_j \dot{\alpha}_j}{\varepsilon_j^2} \end{aligned}$$

ce qui nous redonne finalement l'équation initiale mais indicée cette fois ci par $j+1$:

$$\boxed{\dot{\varphi}_{j+1} = i M_{j+1}(t) \varphi_{j+1}}$$

On peut donc répéter le processus autant de fois que l'on veut, en partant de l'indice 1 ; avec par exemple :

$$M_1(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta(s; t, t_1) & \Omega_0 F(s; t, t_1) \\ \Omega_0 F(s; t, t_1) & -\frac{1}{2} \Delta(s; t, t_1) \end{pmatrix}$$

Si à une étape n donnée l'un des deux termes α_n ou β_n est négligeable devant l'autre, on pourra alors approximer $M_n(t)$ en ignorant ce terme (ou en le traitant en perturbation), et résoudre immédiatement l'équation $\dot{\varphi}_n = i M_n(t) \varphi_n$ obtenue. Le terme restant (le plus souvent α_n quand n est supérieur à 2)

fournira alors une bonne approximation des *énergies propres réelles du problème*, et la base de vecteurs utilisée une bonne approximation de la base des états propres d'évolution. Il ne restera alors plus qu'à effectuer la transformation inverse :

$$U_1(t) \dots U_{n-1}(t)$$

sur $\varphi_n(t)$ pour obtenir la solution.

Par exemple, il arrive souvent que les variations temporelles de $\Delta(s; t, t_1)$ (ie α_1) et de $F(s; t, t_1)$ (ie β_1) soient lisses, et qu'ainsi $\dot{\theta}_1(t)$ soit faible. Dans ce cas, le développement est rapidement convergent, et on peut par exemple s'arrêter directement à l'ordre 1, ou pousser à l'ordre 2 pour améliorer la précision sur $\varepsilon_1(t)$.

Remarquons cependant que l'on a pas besoin d'avoir une méthode convergente : il faut seulement que l'un des deux termes (α_n ou β_n) soit petit par rapport à l'autre à *un ordre particulier* n .

Cette méthode peut donc être très puissante car elle permet non seulement de résoudre les équations différentielles telles que (3.68), mais elle **fournit aussi directement des informations essentielles sur la solution** (énergies propres, états propres...).

Signalons que cette approche a également été développée par Berry à la fin des années 80 [192, 193, 194] (méthode superadiabatique). En utilisant ce schéma itératif, il a de plus montré qu'il existe un certain ordre n^* , et donc une certaine base adiabatique indexée par n^* , pour laquelle $\dot{\theta}_n(t)$ est minimal : c'est la base superadiabatique. Cette méthode a été appliquée à plusieurs problèmes physiques, dont l'interaction entre un atome à deux niveaux et un champ non-résonant [195] (en utilisant la théorie de Floquet) et l'étude de modèles non-linéaires de croisement de niveaux [196].

Dans notre étude, nous ne cherchons cependant pas à nous placer dans cette base superadiabatique, et nous considérons seulement le premier ordre pour lequel le couplage adiabatique $\dot{\theta}_n(t)$ est faible par rapport à $\varepsilon_n(t)$ (par exemple quand $\dot{\theta}_n(t)/\varepsilon_n(t)$ est inférieur à 10^{-2}). En ce sens notre démarche est un compromis entre la minimisation de $\dot{\theta}_n(t)$ et celle de la complexité de la transformation $U_1(t) \dots U_{n-1}(t)$.

5. Bilan

Nous avons montré dans ce paragraphe que les systèmes d'équations différentielles obtenus aux chapitres précédents, sous leur forme **opératoire** :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$$

ou scalaire :

$$\frac{d}{dt} \varphi(s; t) = iM(s; t) \varphi(s; t)$$

(voir paragraphe 3.4.1), pouvaient être traités à l'aide de développements linéaires (série de Dyson) ou de développements non-linéaires (Magnus, Fer, etc). On a montré également que le développement de Magnus était une méthode possible de résolution de notre problème de l'interaction "laser-atomes-champs inertiels et gravitationnels", en soulignant que le type d'impulsions envisagé (impulsions π et $\pi/2$) appartenait aux solutions convergentes d'un tel développement. Ensuite, on a souligné que

plusieurs méthodes d'implémentation numérique étaient disponibles, et que le développement "numérique" de Magnus était l'un des plus efficaces (meilleur que la méthode de Runge-Kutta par exemple, voir [197, 174]³). Enfin, on a développé une autre méthode de résolution (les états adiabatiques successifs), qui a l'avantage de fournir directement des informations physiques (énergies propres, états propres, etc) sur le système en évolution.

Par conséquent, dans notre cas pratique des séparatrices laser, on peut donc :

- soit utiliser l'un des développement décrits ci-dessus (par exemple Magnus ou états adiabatiques successifs) pour calculer *numériquement* les solutions de ces équations différentielles,
- soit s'en servir analytiquement en le *tronquant* et en ne gardant que les premiers termes et obtenir une solution approchée.

3.4.4 Approximation des équations

Dans le cas général, l'équation différentielle modélisant le problème de la triple interaction "atomes-laser-champs inertiels et gravitationnels" s'écrit (cf la fin du paragraphe 3.3.2) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle \quad (3.69)$$

avec :

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta_{op} &= \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{A}(t, t_1) \vec{r}_{op} - \vec{k} \cdot \dot{B}(t, t_1) \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \dot{\xi}(t, t_1) \\ F_{op} &= F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \\ &\approx \bar{F}(t, t_1) \end{aligned}$$

et devient en représentation $|s\rangle$:

$$\frac{d}{dt} \varphi(s; t) = iM(s; t) \varphi(s; t)$$

lorsque $M_{op}(t)$ ne dépend que d'un seul opérateur s_{op} indépendant du temps (après approximations ou non, voir équations (3.47) et (3.49)).

Nous avons alors vu, dans les paragraphes précédents, diverses méthodes de résolution de ces équations (solutions exactes, développement de Magnus, états adiabatiques successifs, etc) dont l'efficacité dépend crucialement de la dépendance temporelle de $\Delta_{op}(t, t_1)$ et $\bar{F}(t, t_1)$.

Nous avons également vu que les termes du développement temporel de l'expression de $\Delta_{op}(t, t_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{op}(t, t_1) &= \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \vec{g}(t - t_1) - \vec{k} \cdot \alpha \vec{r}_{op} - 2 \vec{k} \cdot \alpha \frac{\vec{p}_{op}}{m}(t - t_1) \\ &\quad - \vec{k} \cdot (\alpha^2 + \gamma) \vec{r}_{op}(t - t_1) - \vec{k} \cdot \alpha \vec{g}(t - t_1)^2 - \dots \end{aligned}$$

n'étaient pas tous pertinents (voir paragraphe 3.3.2), et on a montré entre autres que les temps caractéristiques de variation de $\Delta_{op}(t, t_1)$ dus aux termes quadratiques de l'Hamiltonien H_{ext} (gradient

³D'un point de vue analytique, les développements de Magnus et de Runge-Kutta sont identiques [52] à tout ordre, mais la manière de les obtenir est différente. Il a alors été montré que l'implémentation numérique du développement de Magnus était plus performante que celle basée sur la méthode de Runge-Kutta, spécialement pour des systèmes à fortes oscillations ou ayant un comportement asymptotique compliqué (voir [197] et [174]).

de gravité ou d'accélération γ , et rotation α) étaient très longs par rapport au temps caractéristique d'évolution interne $\tau \sim 1/\sqrt{\Omega_0^2 + (\omega - \omega_0)^2}$, et qu'ils pouvaient donc être négligés en première approximation (seul le terme en $\vec{k} \cdot \vec{g} t$ peut rester pertinent).

On peut alors se demander s'il n'y a pas d'autres façons d'approximer cette équation, et voir si elles conduisent à des équations résolubles exactement ou développables facilement (au sens de Magnus ou des états adiabatiques successifs).

Considérons tout d'abord le terme $\Delta_{op}(t, t_1)$.

Ce terme, à la lumière de l'analyse des ordres de grandeur exposée au paragraphe 3.3.2, peut être approximé de multiples façons. Voici la liste des différentes approches envisagées :

1. Approximations de $\Delta_{op}(t, t_1)$

i. Approximation des champs extérieurs faibles :

$$\Delta_{op} \sim \Delta_{op}(\text{libre}) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m}$$

→ C'est une bonne approximation pour les données terrestres (pour α et γ) et lorsque $\vec{k} \perp \vec{g}$ (configuration usuelle d'un gyromètre atomique), ou lorsque le temps τ d'évolution est faible (ie pour $\tau < 1/\sqrt{\vec{k} \cdot \vec{g}} \sim 10^{-4} s$).

Dans ce cas, Δ_{op} est indépendant du temps, et l'opérateur s_{op} n'est autre que l'opérateur \vec{p}_{op} .

→ Si l'enveloppe $\vec{F}(t, t_1)$ de l'impulsion laser appartient à une classe de fonctions à solution analytique (du type créneau ou fonction *sech* par exemple), il s'agit d'un cas à solution exacte.

ii. Approximation des champs extérieurs quadratiques faibles :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \Delta_{op}(\vec{g}) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \vec{g} (t - t_1)$$

→ Bonne approximation pour les données terrestres (pour α et γ).

→ $s_{op} := \vec{p}_{op}$, mais Δ_{op} dépend maintenant linéairement du temps.

→ Lorsque $\vec{F}(t, t_1)$ est constante (impulsion créneau), on connaît une solution exacte (en terme de fonctions cylindriques paraboliques, voir paragraphe 3.4.2). Sinon, il faut recourir à des développements (Magnus, états adiabatiques successifs, ou autre).

iii. Approximation de la matrice lentement variable :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \overline{\Delta_{op}(t, t_1)} := \omega - \omega_0 - \vec{k} \left(\overline{A(t, t_1) \vec{r}_{op}} + \overline{B(t, t_1) \frac{\vec{p}_{op}}{m}} + \overline{\xi(t, t_1)} \right)$$

où le signe $\overline{}$ désigne une moyenne temporelle (à définir) pour l'intervalle $[t_1, t]$, par exemple telle que :

$$\overline{f(t)} := f(t_{1/2})$$

où $t_{1/2}$ est l'instant central de l'impulsion laser (enveloppe symétrique).

→ Se simplifie beaucoup si t_1 est choisi égal à $t_{1/2}$:

$$t_1 = t_{1/2} \implies \Delta_{op} \sim \Delta_{op}(\text{libre})$$

→ Valable lorsque les temps caractéristiques de variation de $\Delta_{op}(t, t_1)$ sont longs par rapport au temps caractéristique d'évolution interne : bonne approximation pour les données terrestres, meilleure que *i.* mais moins pertinente que *ii.*

→ Δ_{op} est indépendant du temps, mais l'opérateur s_{op} vaut maintenant par exemple :

$$s_{op} := \overrightarrow{k} \left(\overrightarrow{A}(t, t_1) \overrightarrow{r_{op}} + \overrightarrow{B}(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \overrightarrow{\xi}(t, t_1) \right)$$

et il faudra dès lors travailler dans la représentation $|s\rangle$ (dont les fonctions propres en représentation $|\overrightarrow{r}\rangle$ sont de simples Gaussiennes).

→ On peut remarquer néanmoins qu'en faisant la transformation unitaire suivante :

$$|\varphi(t)\rangle := \exp \left[im \left(\overrightarrow{k} \overrightarrow{A}(t, t_1) \overrightarrow{r_{op}} \right)^2 / 2\hbar \overrightarrow{k} \overrightarrow{A}(t, t_1) \overrightarrow{B}(t, t_1) \overrightarrow{k} \right] |\varphi^*(t)\rangle$$

sur $|\varphi(t)\rangle$, on peut éliminer les termes en $\overrightarrow{r_{op}}$ de l'équation initiale, et obtenir une équation sur $|\varphi^*(t)\rangle$ où n'intervient que l'opérateur $\overrightarrow{p_{op}}$. On peut ainsi rester dans la représentation $|\overrightarrow{p}\rangle$ habituelle. Cette possibilité vient du fait que c'est la même combinaison $\overrightarrow{A}(t, t_1) \overrightarrow{r_{op}} + \overrightarrow{B}(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m}$ qui intervient dans les deux termes opératoriels de la diagonale de M_{op} .

→ Comme Δ_{op} est indépendant du temps, on arrive au même résultat qu'en *i.* : on a une solution exacte si l'enveloppe $\overrightarrow{F}(t, t_1)$ de l'impulsion laser appartient à une classe de fonctions à solution analytique (du type créneau ou fonction *sech* par exemple).

iv. Approximations semi-classique (WKB) :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \Delta_{op}(WKB) := \omega - \omega_0 - \overrightarrow{k} \overrightarrow{R_{cl}}(t, t_1)$$

où on remplace $\overrightarrow{R_{op}}$ par $\overrightarrow{R_{cl}}(t, t_1)$, ie par la grandeur classique correspondante.

→ Cela revient à effectuer une approximation du type WKB, ie à négliger l'aspect opératoriel à la fois de $\overrightarrow{r_{op}}$ et de $\overrightarrow{p_{op}}$. Or on a vu au paragraphe 3.3.2 qu'on ne pouvait pas, dans le cadre de notre étude, négliger l'aspect opératoriel de $\overrightarrow{p_{op}}$, car sinon on négligerait des termes du même ordre que la fréquence de Rabi Ω_0 du système à deux niveaux (disparition du mécanisme important de sélection en vitesse transverse). C'est une bonne approximation cependant dans le cas où la largeur en vitesse du paquet d'ondes atomique incident est très faible (typiquement inférieure à 10^{-3} m.s^{-1}), et lorsque le désaccord généralisé est également faible ($|\Delta_{op}(WKB)| \ll \Omega_0$, voir le paragraphe 3.6.3).

→ D'autre part, la dépendance temporelle de $\Delta_{op}(WKB)$ est complexe, et il faut donc effectuer une seconde approximation (comme celles précédentes) ou utiliser une méthode de résolution avec développement (Magnus et/ou numérique).

→ Néanmoins, on peut garder l'idée de substitution semi-classique pour $\overrightarrow{r_{op}}$, et conserver l'opérateur $\overrightarrow{p_{op}}$: c'est la méthode suivante.

v. Approximation semi-classique pour $\overrightarrow{r_{op}}$ seulement :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \Delta_{op}(\overrightarrow{r_{approx}}) := \omega - \omega_0 - \overrightarrow{k} \left(\overrightarrow{A}(t, t_1) \overrightarrow{r_{approx}}(t) + \overrightarrow{B}(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \overrightarrow{\xi}(t, t_1) \right)$$

où $\overrightarrow{r_{approx}}(t)$ désigne une approximation de $\overrightarrow{r_{op}}$, ou plutôt une *approximation de l'effet* de $\overrightarrow{r_{op}}$ sur $|\varphi(t)\rangle$.

On verra par ailleurs (voir partie 3.6) que, dans le cas libre et lorsque le désaccord est faible par rapport à la fréquence de Rabi Ω_0 , les centres des paquets d'ondes atomiques évoluant dans la séparatrice suivent à peu près la même trajectoire :

$$\sim \overrightarrow{r_0} + \int_{t_0}^t \overrightarrow{v_g}(t') dt'$$

avec $\overrightarrow{v_g}(t)$ une vitesse de groupe commune aux paquets d'ondes.

D'autre part, du fait des transformations unitaires $U_1(t, t_1)$, $U_2(\frac{1}{2}, t, t_1)$ et $U_3(t, t_1, t_3)$ définies en (3.3), (3.12) et (3.17), $\Delta_{op}(t, t_1)$ n'agit pas en fait sur ces paquets d'ondes, mais sur ceux transformés par U_1 , U_2 et U_3 (voir 3.3.2) dont les centres n'évoluent quasiment pas ($\sim \overrightarrow{r_0}$).

v. A. Un premier choix naturel de $\overrightarrow{r_{approx}}(t)$ est par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{r_{approx}}(t) := \overrightarrow{r_0}}$$

d'où :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \Delta_{op}(\overrightarrow{r_{approx}}) := \omega - \omega_0 - \overrightarrow{k} \left(\dot{A}(t, t_1) \overrightarrow{r_0} + \dot{B}(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \dot{\xi}(t, t_1) \right)$$

→ Revient à négliger la largeur en position des paquets d'ondes solutions de (3.69) (ie par exemple à négliger le terme $k \|\alpha\| \sigma_r(t_0)$ évalué au paragraphe 3.3.2).

→ Selon le développement du désaccord fait au paragraphe 3.3.2, on ne peut négliger l'aspect opératoire de $\overrightarrow{r_{op}}$ tout en gardant des termes dépendant de α et γ (dont l'ordre de grandeur est inférieur, excepté pour $k \|\alpha\| r_0$). Par conséquent, cette approximation semi-classique pour $\overrightarrow{r_{op}}$ implique de négliger également les termes dépendant de α et γ , excepté $k \|\alpha\| r_0$:

$$\Delta_{op}(t, t_1) \sim \Delta_{op}(\overrightarrow{r_{approx}}) := \omega - \omega_0 - \overrightarrow{k} \left(\alpha \overrightarrow{r_0} + \frac{\overrightarrow{p_{op}}}{m} + \overrightarrow{g}(t - t_1) \right)$$

→ On est ainsi ramené au cas *ii.* avec $s_{op} := \overrightarrow{p_{op}}$ et $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \overrightarrow{k} \alpha \overrightarrow{r_0}$.

v. B. Afin de conserver une partie de l'effet de $\overrightarrow{r_{op}}$, on peut améliorer le modèle précédent en introduisant un paramètre de largeur dans l'espace des phases (analogue aux matrices X et Y de la partie 2.3) :

$$\boxed{\overrightarrow{r_{approx}} := \overrightarrow{r_0} + XY^{-1} \left(\overrightarrow{p_{op}} - \overrightarrow{p_0} - \hbar \overrightarrow{k} / 2 \right) / m}$$

→ C'est le résultat de l'effet de $\overrightarrow{r_{op}}$ sur un paquet d'ondes Gaussien centré en $(\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{p_0} + \hbar \overrightarrow{k} / 2)$ et caractérisé par une matrice XY^{-1} exprimant ses largeurs complexes dans l'espace des phases.

On peut choisir par exemple, pour XY^{-1} , la "largeur" simplifiée des paquets d'ondes que l'on obtient dans le cas libre (voir partie 2.3), ie :

$$XY^{-1}(t) = X_0 Y_0^{-1} + t - t_0$$

où $X_0 Y_0^{-1}$ est la matrice des largeurs complexes du paquet d'ondes initial et où $t - t_0$ rend compte de l'étalement naturel.

→ Comme pour le précédent modèle, on est ramené au cas *ii.* avec $s_{op} := \overrightarrow{p_{op}}$.

Ces deux méthodes fournissent une meilleure approximation que les précédentes, mais elles nécessitent - du fait que la dépendance temporelle de Δ_{op} est non-triviale (comme dans le modèle *iv.*) - d'effectuer une seconde approximation ou d'utiliser une méthode de résolution avec développement (Magnus et/ou numérique).

Ces différentes méthodes d'approximation nous font prendre conscience de la difficulté de trouver un compromis "moindre approximation / facilité d'intégration". Finalement, si l'on veut des modèles résolubles analytiquement, on choisira les méthodes *i.*, *ii.* ou *iii.* pour lesquelles la dépendance temporelle de Δ_{op} est simple. D'autre part, si l'on veut approximer Δ_{op} pour pouvoir intégrer *numériquement* les équations, on pourra par exemple employer les méthodes *v.A* ou *v.B*.

Remarquons tout de même qu'il est regrettable, lorsque l'on veut intégrer numériquement les équations précédentes, de faire à la fois des approximations sur les équations et des erreurs numériques. On peut ainsi se demander s'il n'y a pas une autre façon d'exprimer $M_{op}(t)$ pour simplifier l'intégration numérique de l'équation (3.69). C'est précisément l'objectif du paragraphe suivant.

2. Elimination opératorielle

Bien que l'on connaisse des méthodes directes d'intégration de (3.69) (développements de Fer, de Magnus, etc), le fait que $M_{op}(t)$ dépende de deux opérateurs ne commutant pas (\vec{r}_{op} et \vec{p}_{op}) complique énormément l'expression des développements obtenus. En effet, dans le cas de la méthode de Magnus par exemple, on obtient un développement du type :

$$|\varphi(t)\rangle = \exp[i\Omega_{op}(t)] \cdot |\varphi(t_0)\rangle = \exp i \left[\sum_{j=1}^{\infty} \Omega_{j,op}(t) \right] \cdot |\varphi(t_0)\rangle$$

où chaque terme $\Omega_{j,op}(t)$ est une matrice 2×2 qui dépend du temps et des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} (voir paragraphe 3.4.3).

Plus j est élevé, plus ces deux opérateurs canoniques sont enchevêtrés dans $\Omega_{j,op}(t)$. Par conséquent, on ne peut écrire facilement $\exp[i\Omega_{op}(t)]$ en un produit d'exponentielles ne dépendant que d'un seul opérateur, et, quelque soit la représentation choisie, on ne sait pas exprimer exactement l'effet de $\exp[i\Omega_{op}(t)]$ sur $|\varphi(t_0)\rangle$.

Par contre, lorsque $M_{op}(t)$ ne dépend que d'un seul opérateur (indépendant du temps), on sait comment, en se plaçant dans la représentation de cet opérateur, calculer l'effet de $\exp[i\Omega_{op}(t)]$ sur $|\varphi(t_0)\rangle$. On va alors voir qu'il est possible de généraliser l'approche utilisée au modèle *v.*, ie d'éliminer un des deux opérateurs canoniques de $M_{op}(t)$, mais cette fois-ci sans aucune approximation.

Cette méthode (l'*élimination opératorielle*) s'appuie essentiellement sur une des propriétés de l'opérateur de Dyson et sur un outil : les fonctions génératrices. Elle est présentée ici pour l'élimination de l'opérateur \vec{r}_{op} , mais se traite de la même façon pour l'autre opérateur canonique.

Considérons donc la solution formelle de l'équation (3.69) écrite avec l'opérateur \mathcal{T} de Dyson (voir paragraphe 3.4.3) :

$$|\varphi(t)\rangle = U_{op} |\varphi(t_0)\rangle \quad \text{où : } U_{op} := \mathcal{T} \left(e^{i \int_{t_0}^t M_{op}(t') dt'} \right)$$

L'action de \vec{r}_{op} sur $|\varphi(t)\rangle$ peut ainsi s'écrire :

$$\vec{r}_{op} \cdot |\varphi(t)\rangle = \vec{r}_{op} U_{op} |\varphi(t_0)\rangle = ([\vec{r}_{op}, U_{op}] + U_{op} \vec{r}_{op}) |\varphi(t_0)\rangle$$

où on a fait apparaître le commutateur $[\vec{r}_{op}, U_{op}]$.

Choisissons alors comme $|\varphi(t_0)\rangle$ le ket suivant :

$$|\varphi(t_0)\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ |a(\vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)\rangle \end{pmatrix}$$

où $|a(\vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)\rangle$ décrit un paquet d'ondes Gaussien de position centrale \vec{r}_0 , d'impulsion centrale \vec{p}_0 , et de largeurs complexes dans l'espace des phases X_0 et Y_0 :

$$\langle \vec{p} | a(\vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\det(mY_0)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_0)X_0Y_0^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar}\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}$$

(voir paragraphe 2.3.3 pour les notations).

Comme l'équation (3.69) est linéaire, on peut en effet ne considérer que la composante inférieure du ket $|\varphi(t_0)\rangle$; lorsque $|\varphi(t_0)\rangle$ a deux composantes, on les traite l'une après l'autre (somme d'un ket à composante inférieure et d'un ket à composante supérieure).

L'utilisation d'un paquet d'ondes Gaussien se justifie de la même façon qu'au paragraphe 3.5.2 : il est la fonction génératrice des modes Hermito-Gaussiens 3D, ie d'une base de l'espace des fonctions d'ondes. Ainsi, en connaissant l'action de \vec{r}_{op} sur ce $|\varphi(t_0)\rangle$ particulier, on connaîtra l'action de \vec{r}_{op} sur n'importe quel $|\varphi(t_0)\rangle$.

Or l'action de \vec{r}_{op} sur ce $|\varphi(t_0)\rangle$ conduit à :

$$\vec{r}_{op} \cdot |\varphi(t_0)\rangle = \left(\vec{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\vec{p}_{op} - \vec{p}_0)}{m} \right) |\varphi(t_0)\rangle$$

comme on peut le voir sur l'expression de $|a(\vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)\rangle$ en représentation $|\vec{p}\rangle$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} U_{op} \cdot \vec{r}_{op} \cdot |\varphi(t_0)\rangle &= U_{op} \left(\vec{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\vec{p}_{op} - \vec{p}_0)}{m} \right) |\varphi(t_0)\rangle \\ &= \left[\left(\vec{r}_0 - X_0 Y_0^{-1} \frac{\vec{p}_0}{m} \right) U_{op} + X_0 Y_0^{-1} U_{op} \frac{\vec{p}_{op}}{m} \right] |\varphi(t_0)\rangle \\ &= \left(\vec{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\vec{p}_{op} - \vec{p}_0)}{m} \right) |\varphi(t)\rangle + X_0 Y_0^{-1} \left[U_{op}, \frac{\vec{p}_{op}}{m} \right] |\varphi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{r}_{op} \cdot |\varphi(t)\rangle = \left(\vec{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\vec{p}_{op} - \vec{p}_0)}{m} \right) |\varphi(t)\rangle + [\vec{Q}_{op}, U_{op}] |\varphi(t_0)\rangle}$$

avec :

$$\vec{Q}_{op} := \vec{r}_{op} - X_0 Y_0^{-1} \frac{\vec{p}_{op}}{m}$$

et l'on cherche donc maintenant à évaluer $[\vec{Q}_{op}, U_{op}]$ sachant que $U_{op} := \mathcal{T} \left(e^{i \int_{t_0}^t M_{op}(t') dt'} \right)$.

Or on peut montrer (voir formule A.4 de l'appendice A) que $\forall A(t), B$:

$$\begin{aligned} &\left[\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right), B \right] \\ &= \left(\int_{t_0}^t [A(t'), B] dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t'), [A(t''), B]] dt' dt'' + \dots \right) \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

d'où :

$$\boxed{[\vec{Q}_{op}, U_{op}] = \vec{O}_{op} U_{op}}$$

avec :

$$\overrightarrow{O}_{op} := - \left(\int_{t_0}^t [iM_{op}(t'), \overrightarrow{Q}_{op}] dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [iM_{op}(t'), [iM_{op}(t''), \overrightarrow{Q}_{op}]] dt' dt'' + \dots \right)$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{r}_{op} \cdot |\varphi(t)\rangle = \left(\overrightarrow{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\overrightarrow{p}_{op} - \overrightarrow{p}_0)}{m} + \overrightarrow{O}_{op} \right) |\varphi(t)\rangle}$$

où \overrightarrow{O}_{op} est un opérateur facilement calculable à partir du développement précédent.

Il reste à savoir si \overrightarrow{O}_{op} dépend de \overrightarrow{r}_{op} . Dans le cas contraire, on aura, comme annoncé, éliminé un des deux opérateurs canoniques de $M_{op}(t)$.

En fait, seuls les premiers termes de l'expression de \overrightarrow{O}_{op} ne dépendent pas de \overrightarrow{r}_{op} . A partir du troisième commutateur, \overrightarrow{r}_{op} apparaît et nous sommes à nouveau face au problème de la présence explicite des deux opérateurs \overrightarrow{r}_{op} et \overrightarrow{p}_{op} . L'idée finale de cette méthode est alors d'itérer le processus à chaque fois que l'on rencontre \overrightarrow{r}_{op} dans un des termes du développement de \overrightarrow{O}_{op} . On construit ainsi pas-à-pas un opérateur qui ne dépend que de \overrightarrow{p}_{op} :

$$\overrightarrow{N}(\overrightarrow{p}_{op}) := \lim_{\overrightarrow{r}_{op} \rightarrow \overrightarrow{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\overrightarrow{p}_{op} - \overrightarrow{p}_0)}{m} + \overrightarrow{O}_{op}} \left[\overrightarrow{O}_{op}(\overrightarrow{r}_{op}, \overrightarrow{p}_{op}) \right]$$

et finalement on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{r}_{op} \cdot |\varphi(t)\rangle = \left(\overrightarrow{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} (\overrightarrow{p}_{op} - \overrightarrow{p}_0) / m + \overrightarrow{N}(\overrightarrow{p}_{op}) \right) |\varphi(t)\rangle}$$

qui conduit en représentation $|\overrightarrow{p}\rangle$ à l'équation différentielle ordinaire :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varphi(p; t) = i M_N(p; t) \varphi(p; t)} \quad (3.71)$$

avec :

$$M_N(p; t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta_N(p; t, t_1) & \Omega_0 \overrightarrow{F}(t, t_1) \\ \Omega_0 \overrightarrow{F}(t, t_1) & -\frac{1}{2} \Delta_N(p; t, t_1) \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta_N(p; t, t_1) & : = \omega - \omega_0 - \overrightarrow{k} \cdot \dot{\overrightarrow{B}}(t, t_1) \frac{\overrightarrow{p}}{m} - \overrightarrow{k} \cdot \dot{\overrightarrow{\xi}}(t, t_1) \\ & - \overrightarrow{k} \cdot \dot{\overrightarrow{A}}(t, t_1) \left(\overrightarrow{r}_0 + X_0 Y_0^{-1} \frac{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0)}{m} + \overrightarrow{N}(\overrightarrow{p}) \right) \end{aligned}$$

On peut alors appliquer les différentes méthodes d'intégration vues précédemment (Magnus ou autres), et ainsi obtenir une expression analytique de la solution $\varphi(p; t)$ (sous forme d'un double développement).

Cette approche est donc intéressante pour plusieurs raisons :

- Tout d'abord, elle permet d'exprimer la solution de (3.69) dans une des représentations canoniques (ici on a éliminé \overrightarrow{r}_{op} , mais l'élimination de l'opérateur \overrightarrow{p}_{op} s'effectue de la même façon), ce que ne permet pas l'utilisation directe du développement de Magnus (enchevêtrement final des opérateurs canoniques)

- ensuite, elle permet précisément d'exprimer - a posteriori - les développements opératoriels précédents (du type Fer, Magnus, Dyson ou autres) dans une représentation particulière
- enfin, elle illustre l'utilité de la propriété (3.70) lors de l'intégration d'équations différentielles opératorielles.

Il est à remarquer que la **structure du ket initial** $\varphi(p; t_0)$ (ie les paramètres $\vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0$ et Y_0) **intervient deux fois** lors de la résolution de (3.71) : une première fois dans $\Delta_N(p; t, t_1)$ et une seconde après intégration :

$$\varphi(p; t) = \mathcal{T} \left(e^{i \int_{t_0}^t M_N(p; t') dt'} \right) \varphi(p; t_0) \quad (3.72)$$

C'est cette double présence qui permet en fait de passer de $U_{op} |\varphi(t_0)\rangle$ à (3.72) ⁴.

3.4.5 Bilan

L'étude des différentes méthodes de résolution de l'équation (3.69) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i M_{op}(t) |\varphi(t)\rangle \quad (3.73)$$

nous amène donc aux conclusions suivantes :

- Il n'existe pas à ce jour de solution exacte à l'équation générale $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i M_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$, étant donné que $M_{op}(t)$ est une matrice dépendant à la fois du temps et des deux opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} (double source de non-commutation de $M_{op}(t)$ avec elle-même à des instants différents).
- Il est possible cependant d'écrire une solution formelle sous forme de développements opératoriels : Dyson, Fer, Magnus... , mais l'enchevêtrement des opérateurs \vec{r}_{op} et \vec{p}_{op} dans les termes de ces développements rend impossible le choix d'une représentation permettant d'exprimer analytiquement la solution.
- Ce problème peut être résolu :
 - dans le cas général, avec la méthode de l'élimination opératorielle, mais la solution s'exprime alors sous forme d'un double développement, aisément calculable bien que lourd, ce qui a priori en limite son utilité au domaine numérique.
 - dans le cas terrestre, pour lequel on peut négliger l'effet de α (rotation) et γ (gradient de gravité ou d'accélération) lors de l'intégration (et seulement à ce niveau) de (3.73). Dans ce cas, on peut se placer dans la représentation impulsion, et transformer l'équation opératorielle en une équation différentielle ordinaire.
 - dans un des cas particuliers pour lesquels on connaît une solution exacte (appartenant par exemple à une classe de solutions de la théorie $z(t)$).
- Lorsque l'équation (3.73) est rendue non-opératorielle, on peut alors utiliser diverses méthodes d'intégration :
 - approche directe, avec les développements de Dyson, de Magnus... que l'on peut tronquer (quand ils convergent) ou utiliser numériquement.

⁴ $\left(e^{i \int_{t_0}^t M_N(p; t') dt'} \right)$ s'interprète également comme la valeur propre de l'opérateur U_{op} , associée au vecteur propre $\varphi(p; t_0)$.

- approche intermédiaire, avec la méthode des états adiabatiques successifs, qui est très utile pour obtenir les énergies réelles du système “atomes-laser-champs inertiels et gravitationnels”, et ainsi obtenir directement les vitesses de groupe des paquets d’ondes atomiques qui prennent forme à l’intérieur des séparatrices.
- approche exacte, dans le cas où l’équation obtenue (après approximations ou non) appartient à un cas exactement résoluble connu (par théorie $z(t)$ ou méthode de Floquet par exemple).
- Trois cas exactement résolubles sont plus particulièrement intéressants pour nous :
 - le modèle de Rabi (désaccord constant et impulsion créneau)
 - le modèle de Landau-Zener (désaccord linéaire en temps et impulsion créneau)
 - le modèle de Rosen-Zener (désaccord constant et impulsion sécante hyperbolique *sech*)

et d’autant plus que les impulsions laser en *sech* sont une très bonne approximation des impulsions réellement utilisées dans les expériences, et qu’elles ne font pas apparaître de lobes secondaires dans la distribution en impulsion de la solution.

L’étude de ces solutions particulières est loin d’être évidente. En particulier, la structuration en plusieurs paquets d’ondes (avec des vitesses de groupes distinctes) du paquet d’ondes atomique initial n’apparaît pas explicitement dans la forme des solutions. C’est un point essentiel, non seulement pour comprendre ce qui se passe réellement à l’intérieur d’une séparatrice laser, mais également pour obtenir une modélisation pertinente de telles séparatrices dans le cadre de la modélisation des interféromètres atomiques.

Nous allons illustrer ce point dans les paragraphes suivants, après avoir donné quelques résultats concernant le retour dans la représentation initiale, et exposé en détail le *schéma ttt*, qui permet d’exprimer l’action d’une séparatrice sous forme d’une interaction instantanée équivalente.

3.5 Transformations unitaires inverses et matrice S : schéma ttt

Dans la partie 3.3, nous sommes partis de l'équation initiale (3.2) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t) + V_{em}(\vec{r}_{op}, t)) |\Psi(t)\rangle \quad (3.74)$$

pour arriver finalement à l'équation "symétrique" (3.18) :

$$\frac{d}{dt} |\varphi_3(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi_3(t)\rangle \quad (3.75)$$

où :

$$M_{op}(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

à l'aide des transformations unitaires $U_1(t, t_1)$, $U_2(\frac{1}{2}, t, t_1)$ et $U_3(t, t_1, t_3)$ définies respectivement en (3.3), (3.12) et (3.17).

Nous avons ensuite étudié plus précisément la structure de cette équation et nous avons vu comment la transformer pour obtenir d'autres équations équivalentes. Enfin, dans la partie 3.4, nous avons vu comment résoudre ces équations, par des méthodes à résolution exacte (théorie $z(t)$), des développements (développements de Dyson ou Magnus, méthode de l'élimination opératorielle) ou grâce à diverses approximations (développement du désaccord en puissance de α et γ , méthode des états adiabatiques successifs). Le but de ces méthodes de résolution est de nous fournir une solution $|\varphi_{sol}(t)\rangle$ plus ou moins proche de la solution exacte $|\varphi_3(t)\rangle$ de (3.75) :

$$|\varphi_{sol}(t)\rangle \simeq |\varphi_3(t)\rangle$$

où $|\varphi_3(t)\rangle$ s'écrit formellement :

$$|\varphi_3(t)\rangle = \mathcal{T} \left(\exp \left(i \int_{t_0}^t M_{op}(t') dt' \right) \right) |\varphi_3(t_0)\rangle$$

en utilisant l'opérateur \mathcal{T} de Dyson (voir paragraphe 3.4.3).

La solution $|\varphi_{sol}(t)\rangle$ obtenue s'exprime donc en fonction de $|\varphi_3(t_0)\rangle$ sous la forme :

$$\boxed{|\varphi_{sol}(t)\rangle = S_{op}(t, t_0) |\varphi_3(t_0)\rangle}$$

avec comme opérateur d'évolution :

$$S_{op}(t, t_0) = S(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}; t, t_0; t_1) \simeq \mathcal{T} \left(\exp \left(i \int_{t_0}^t M_{op}(t') dt' \right) \right)$$

ie sous la forme d'une **matrice S de diffusion** (matrice 2×2 opératorielle) entre les quatres états finaux $b_{sol}(t)$, $a_{sol}(t)$, $b_3(t_0)$ et $a_3(t_0)$:

$$\begin{pmatrix} |b_{sol}(t)\rangle \\ |a_{sol}(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{op,bb}(t, t_0) & S_{op,ba}(t, t_0) \\ S_{op,ab}(t, t_0) & S_{op,aa}(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |b_3(t_0)\rangle \\ |a_3(t_0)\rangle \end{pmatrix}$$

qu'on pourra écrire plus simplement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} b_{sol}(t) \\ a_{sol}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{op,bb} & S_{op,ba} \\ S_{op,ab} & S_{op,aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3(t_0) \\ a_3(t_0) \end{pmatrix}}$$

et qui illustre les propos de Bordé sur le concept de séparatrice généralisée (voir [102, 58] et partie 3.1).

Une fois cette solution $|\varphi_{sol}(t)\rangle$ obtenue, il est alors possible d'effectuer les **transformations unitaires inverses** de (3.3), (3.12) et (3.17) pour revenir à la **représentation initiale** :

$$|\varphi_3(t)\rangle = U_3^{-1}(t, t_1, t_3) U_2^{-1}(1/2, t, t_1) U_1^{-1}(t, t_1) |\Psi(t)\rangle$$

On obtient ainsi :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) U_2(1/2, t, t_1) U_3(t, t_1, t_3) S_{op}(t, t_0) U_3^{-1}(t_0, t_1, t_3) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1) U_1^{-1}(t_0, t_1) |\Psi(t_0)\rangle$$

qui exprime le lien entre la solution générale $|\Psi_{sol}(t)\rangle$ et le ket initial $|\Psi(t_0)\rangle$.

Il reste maintenant à simplifier et à interpréter cette expression.

Remarquons tout d'abord que, du fait de la définition de la transformation scalaire U_3 , le terme $U_3 S_{op} U_3^{-1}$ se simplifie très simplement en :

$$\begin{aligned} U_3(t, t_1, t_3) S_{op}(t, t_0) U_3^{-1}(t_0, t_1, t_3) &= S_{op}(t, t_0) U_3(t, t_1, t_0) \\ &= U_3(t, t_1, t_0) S_{op}(t, t_0) \\ &= \exp\left(-i \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt'\right) S_{op}(t, t_0) \end{aligned}$$

et il reste en fait essentiellement à étudier le terme :

$$U_1(t, t_1) U_2(1/2, t, t_1) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1) U_1^{-1}(t_0, t_1)$$

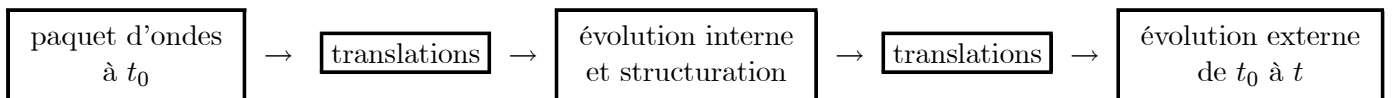
Selon que t_1 est quelconque, ou qu'il est choisi égal à t_0 (ou t , voir paragraphe 3.3.1), cette expression a une forme et une interprétation différentes. Nous détaillons donc les deux cas, avant de montrer comment ces formulations nous permettent d'exprimer l'effet d'une séparatrice sous la forme d'une **interaction instantanée équivalente** (au temps t_1) : c'est le **schéma ttt** exposé au paragraphe 3.5.3.

3.5.1 Cas $t_1 = t_0$:

On va voir que, dans ce cas, l'interaction "laser-atomes-champs inertiels et gravitationnels" peut se schématiser en quatre étapes :

1. ajout d'une impulsion $\pm \frac{\hbar \vec{k}}{2}$
2. action de $S_{op}(t, t_0)$
3. ajout d'une impulsion $\pm \tilde{A}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ et translation en position de $\mp \tilde{B}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$
4. action des champs inertiels et gravitationnels de t_0 à t

ie avec une structure du type :



Avec le choix $t_1 = t_0$, on obtient en effet :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_3(t, t_0, t_3) U_1(t, t_0) U_2(1/2, t, t_0) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

ou plus explicitement :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = \exp\left[-i \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt'\right] \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_0 \cdot (t - t_0)\right] \\ \cdot U_{E1}(t, t_0) \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)} S_{op,bb} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_0)} & e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)} S_{op,ba} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_0)} \\ e^{+\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)} S_{op,ab} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_0)} & e^{+\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)} S_{op,aa} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_0)} \end{pmatrix} |\Psi(t_0)\rangle$$

avec :

$$\Phi_{op}(t, t_0) = \omega t - \omega_0(t - t_0) - \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t, t_0) + \phi \quad (3.76)$$

En écrivant $e^{\pm \frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)}$ sous forme d'un produit d'exponentielles (utilisation de la formule A.7 de l'appendice A) :

$$e^{\pm \frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_0)} = e^{\pm \frac{i}{2}(\omega t - \omega_0(t - t_0) + \phi)} e^{\mp \frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{A}\vec{r}_{op}} e^{\mp \frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{B}\vec{p}_{op}/m} e^{\mp \frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{\xi}} e^{+i\frac{\hbar\vec{k}}{8m} \vec{A}\vec{B}\vec{k}}$$

on peut alors interpréter simplement l'expression de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$.

En effet, considérons un ket initial (représentant le paquet d'ondes atomique incident) du type :

$$|\Psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |a(t_0)\rangle \end{pmatrix}$$

(atomes dans l'état fondamental), alors la **composante supérieure** de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$ devient :

$$\boxed{e^{i\theta_{0ba}} U_{E1}(t, t_0) e^{\frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{A}\vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{B}\vec{p}_{op}/m} S_{op,ba} e^{\frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{r}_{op}} |a(t_0)\rangle}$$

pour laquelle l'action combinée de l'impulsion laser et des champs inertiels et gravitationnels se résume à :

- une première **translation de $+\frac{\hbar\vec{k}}{2}$ de l'impulsion centrale** du paquet d'ondes (celui qui est associé au ket $|a(t_0)\rangle$) (voir propriété A.10 de l'appendice A) :

$$e^{\frac{i}{2}\vec{k} \cdot \vec{r}_{op}} |a(t_0)\rangle$$

Par conséquent, le paquet d'ondes initial a maintenant une impulsion centrale égale à $\vec{p}_0 + \frac{\hbar\vec{k}}{2}$ (voir la figure 3.8).

- ensuite, l'**action structurante de l'élément non-diagonal de matrice S** (changement d'état interne par absorption stimulée, avec structuration particulière du paquet d'ondes incident) :

$$S_{op,ba}(t, t_0)$$

Nous verrons dans la partie 3.6 qu'il y a en fait - à l'intérieur de la séparatrice - structuration du paquet d'ondes incident en deux paquets d'ondes principaux, dont les vitesses de groupe sont comprises entre \vec{p}_0/m et $(\vec{p}_0 + \hbar\vec{k})/m$ (attention, ici les impulsions (divisées par m) sont différentes des vitesses de groupe). On verra également que les positions centrales de ces paquets d'ondes sont différentes de celle du paquet d'ondes incident (voir la figure 3.9).

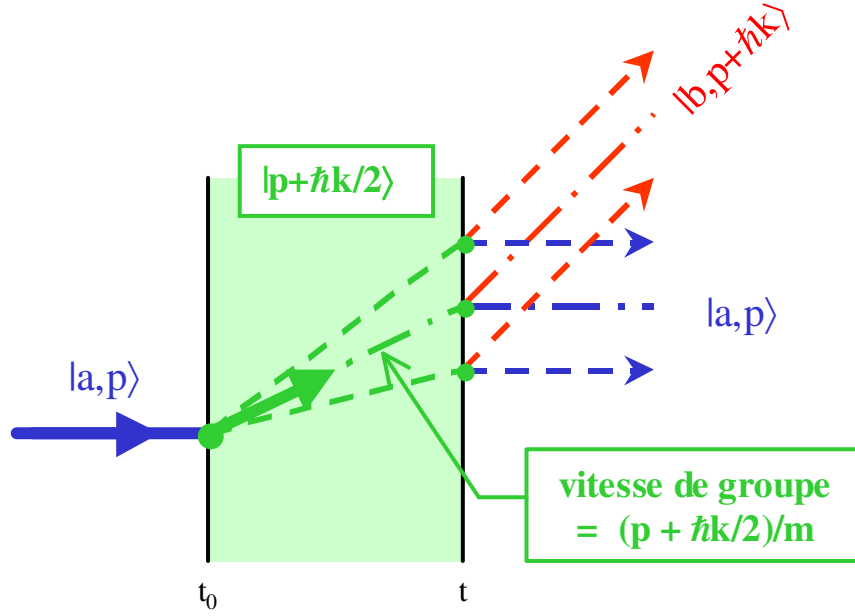


FIG. 3.8: Diagramme spatio-temporel représentant les trajectoires des centres de paquet d'ondes dans une séparatrice : schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Effet de la première translation de l'impulsion centrale (ce schéma et les suivants ont une valeur illustrative, puisque les trajectoires ne sont pas rectilignes en présence de gravitation et de rotation).

- puis une **translation spatiale** de $-\tilde{B}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ du centre du paquet d'ondes (voir propriété A.11 de l'appendice A) due à l'action de l'opérateur :

$$e^{\frac{i}{2} \vec{k} B(t, t_0) \vec{p}_{op}} / m$$

(voir la figure 3.10)

- et une **seconde translation de l'impulsion centrale** de $+\tilde{A}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ due à l'opérateur :

$$e^{\frac{i}{2} \vec{k} A(t, t_0) \vec{r}_{op}}$$

ie que, si $S_{op,ba}(t, t_0)$ n'a pas ou peu d'effet sur l'état externe des atomes, alors les trois translations précédentes se résument à : une translation en position de $-\tilde{B}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ et une translation en impulsion de $\left(1 + \tilde{A}(t, t_0)\right) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$.

(voir la figure 3.11)

- puis le **facteur d'évolution externe**, dû aux champs inertiels et gravitationnels, entre t et t_0 :

$$U_{E1}(t, t_0) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt' \right) \right)$$

- et enfin un **facteur de phase** $e^{i\theta_{0ba}}$ avec :

$$\begin{aligned} \theta_{0ba} := & -\frac{E_b(t-t_0)}{\hbar} - \frac{(\omega - \omega_0)(t-t_0) - \vec{k} \cdot \vec{\xi}(t, t_0)}{2} - \omega t_0 - \phi \\ & + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} A(t, t_0) \tilde{B}(t, t_0) \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_0)}{4} dt' \end{aligned}$$

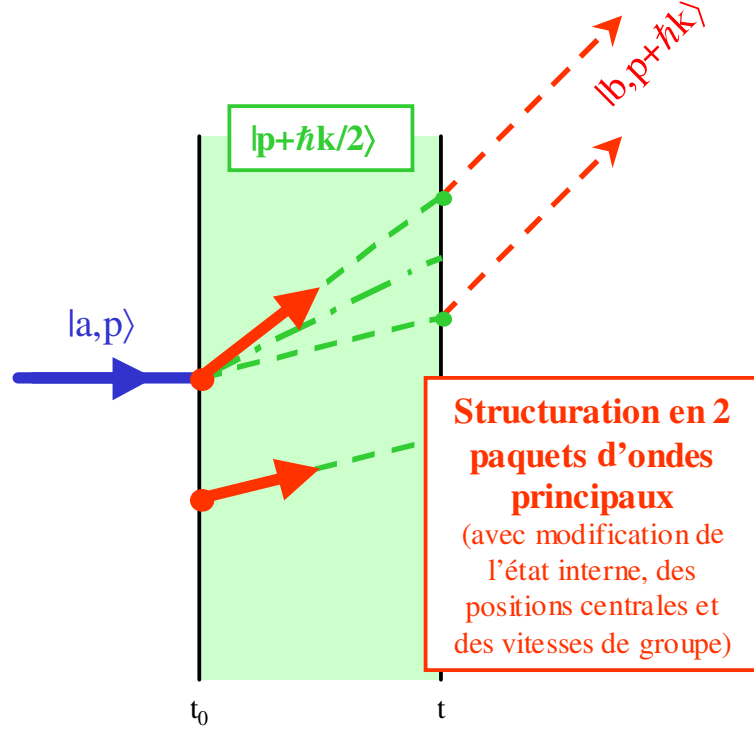


FIG. 3.9: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Action structurante de l'élément de matrice S (seuls les états excités sont représentés).

On obtient de même pour la **composante inférieure** de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$:

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta_{0aa}} & U_{E1}(t, t_0) & e^{-\frac{i}{2}\vec{k}A\vec{r}_{op}} & e^{-\frac{i}{2}\vec{k}B\vec{p}_{op}/m} & S_{op,aa} & e^{\frac{i}{2}\vec{k}\vec{r}_{op}} & |a(t_0)\rangle \end{bmatrix}$$

ie :

- une première *translation* de $+\frac{\hbar\vec{k}}{2}$ de l'impulsion centrale (la même que précédemment) :

$$e^{\frac{i}{2}\vec{k}\vec{r}_{op}} |a(t_0)\rangle$$

- l'action de l'élément diagonal de matrice S (diffusion structurante sans changement d'état interne) :

$$S_{op,aa}(t, t_0)$$

(voir la figure 3.12)

- puis une *translation spatiale* de $+\tilde{B}(t, t_0)\frac{\hbar\vec{k}}{2m}$ (opposée à la précédente) du centre du paquet d'ondes :

$$e^{\frac{i}{2}\vec{k}B(t, t_0)\vec{p}_{op}/m}$$

(voir la figure 3.13)

- puis une *translation* de l'impulsion centrale de $-\tilde{A}(t, t_0)\frac{\hbar\vec{k}}{2}$ (opposée à la précédente) :

$$e^{\frac{i}{2}\vec{k}A(t, t_0)\vec{r}_{op}}$$

ie que si $S_{op,aa}(t, t_0)$ n'a pas ou peu d'effet sur l'état externe des atomes, alors les trois translations précédentes se résument à : une translation en position de $+\tilde{B}(t, t_0)\frac{\hbar\vec{k}}{2m}$, et une translation en impulsion de $\left(1 - \tilde{A}(t, t_0)\right)\frac{\hbar\vec{k}}{2}$.

(voir la figure 3.14)

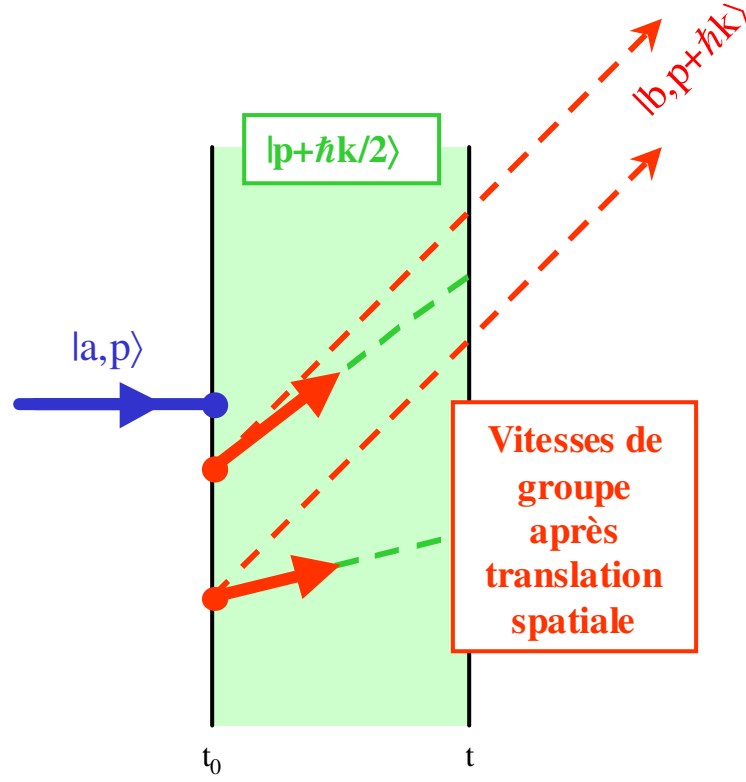


FIG. 3.10: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Effet de la translation spatiale du centre des paquets d'ondes issus de la structuration précédente (ceux dans l'état excité).

- puis le même *facteur d'évolution externe* entre t et t_0 :

$$U_{E1}(t, t_0) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{ext}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t') dt' \right) \right)$$

- et enfin un *facteur de phase* $e^{i\theta_{aa}}$ avec :

$$\begin{aligned} \theta_{0aa} := & -\frac{E_a(t-t_0)}{\hbar} + \frac{(\omega - \omega_0)(t-t_0) - \vec{k} \cdot \vec{\xi}(t, t_0)}{2} \\ & + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} A(t, t_0) \tilde{B}(t, t_0) \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_0)}{4} dt' \end{aligned}$$

qui diffère de θ_{0ba} par le changement $E_b \rightarrow E_a$ et par l'ajout d'une phase :

$$\theta_{0aa} = \theta_{0ba} + \omega t + \phi - \vec{k} \cdot \vec{\xi}(t, t_0)$$

On obtient donc, à l'instant t , des paquets d'ondes atomiques n'ayant pas le même état interne et la même phase, et ayant été translatés différemment (en position et en impulsion).

Néanmoins, si la matrice de transfert $S_{op}(t, t_0)$ n'a pas, ou très peu, d'effet sur l'état *externe* des atomes (par exemple lorsque le désaccord est négligeable par rapport à la fréquence de Rabi Ω_0 , voir parties 3.6 et 3.7), alors on observe que les centres des paquets d'ondes associés à chaque composante évoluent selon la même trajectoire : c'est l'effet Borrmann.

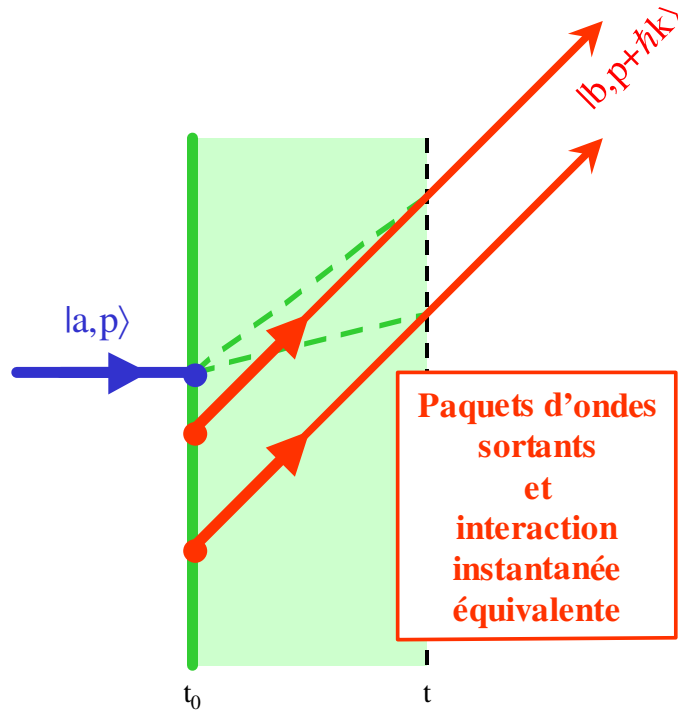


FIG. 3.11: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Trajectoires des paquets d'ondes sortant d'une séparatrice (état excité) et interaction instantanée équivalente.

Cas particulier : effet Borrmann atomique

En diffraction dynamique [198, 199, 15], le fait que les centres des paquets d'ondes atomiques évoluent, sous certaines conditions, selon une unique trajectoire est connu sous le nom d'effet Borrmann. Découvert par Borrmann en 1941 dans le cadre de la diffraction des rayons X [200], ce phénomène a été mis en évidence par Knowles en 1956 pour les ondes neutroniques [201], et plus récemment par Oberthaler et al. pour les ondes atomiques [202]. Historiquement, l'effet Borrmann est associé à un phénomène plus spécifique que celui évoqué ci-dessus (unique trajectoire atomique), valable pour toute diffraction d'ondes (matérielles ou non) dans un **cristal absorbant** :

“pour un certain angle d'incidence défini par rapport à la surface du cristal, la propagation du paquet d'ondes incident à l'intérieur de ce dernier s'effectue :

1. *sans atténuation,*
2. *selon une unique trajectoire,*
3. *trajectoire qui est orthogonale à la surface du cristal”*

Cet angle particulier d'incidence est l'angle bien connu de Bragg, défini par la relation suivante :

$$\vec{P} \cdot (\vec{p}_0 + \vec{P}/2) = 0$$

où \vec{p}_0 est l'impulsion centrale du paquet d'ondes incident, et où \vec{P} est le quantum d'impulsion communiqué aux paquets d'ondes diffractés (la condition de Bragg est écrite pour une diffraction au premier ordre, voir la partie 3.2 pour les ordres supérieurs). Inversement, si cette condition n'est pas respectée, il y a création de deux paquets d'ondes dont les trajectoires au sein du cristal sont très différentes. Lorsqu'il y a succession de plusieurs cristaux de la sorte (utilisés comme séparatrices par exemple), il en résulte alors une multiplication du nombre de paquets d'ondes ayant des trajectoires distinctes (d'où une plus grande complexité des interféromètres utilisant ce type de séparatrices).

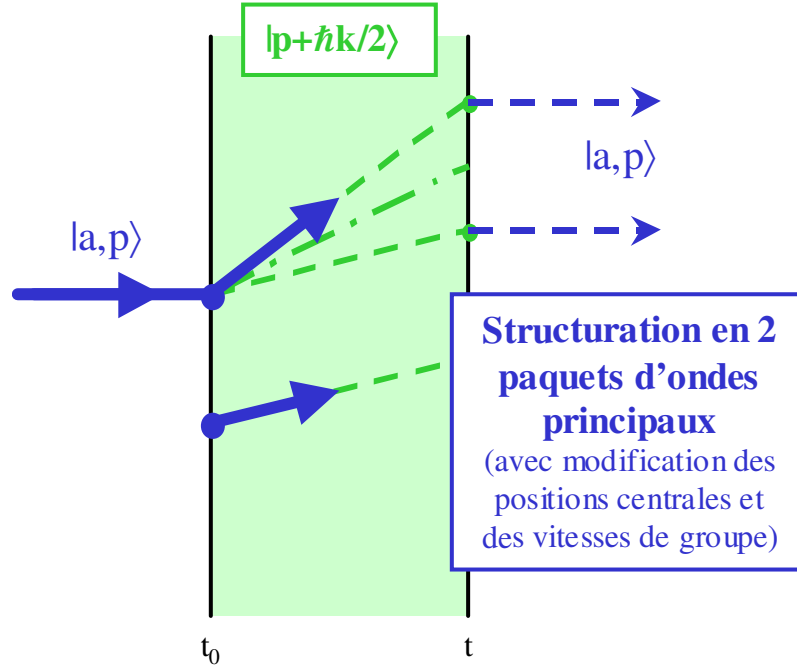


FIG. 3.12: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Action structurante de l'élément de matrice S (atomes dans l'état fondamental).

En outre, une autre caractéristique essentielle de cette “transmission anormale” est liée à sa grande sensibilité à la condition de Bragg. En effet, toute déviation de l'angle de Bragg amplifie de façon très importante l'angle entre les trajectoires des deux paquets d'ondes créés dans le cristal. Par exemple, dans le cas des neutrons, le facteur d'amplification est de l'ordre de 10^6 [15]. Cette propriété s'est révélée fondamentale dans l'interprétation du déphasage mesuré par les interféromètres à neutrons [104, 105, 15].

Dans le cas d'atomes en interaction avec une onde laser quasi-résonante, deux modifications essentielles doivent être apportées à l'effet Borrmann usuel [102, 103] :

1. il n'y a pas d'absorption d'atome par l'onde laser
2. la condition de Bragg (qui ne traduit rien d'autre que la relation de conservation d'énergie-impulsion) est transformée en (voir partie 3.2) :

$$\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \left(\vec{p}_0 + \hbar \vec{k} / 2 \right) / m = 0$$

Cette condition de Bragg généralisée - ou condition d'élasticité - est très intéressante car elle permet de relaxer la condition usuelle de Bragg, et autorise ainsi la propagation de paquets d'ondes atomiques selon une trajectoire unique, comme précédemment, mais non-orthogonale au vecteur d'onde laser \vec{k} .

L'autre avantage de cette condition est qu'elle peut être respectée dans un plus grand nombre de configurations expérimentales. En effet, on peut très bien avoir $\vec{k} \cdot \vec{p}_0 = 0$ (incidence normale), et compenser la présence du terme de recul $\hbar \vec{k}^2 / 2m$ en jouant sur la fréquence du champ laser :

$$\omega = \omega_0 + \hbar \vec{k}^2 / 2m$$

En ce qui concerne la sensibilité de l'effet Borrmann atomique à cette condition d'élasticité, le facteur d'amplification est beaucoup plus faible que celui observé en diffraction neutronique, mais reste tout de même important, de l'ordre de 10^2 (voir partie 3.6.1). Il en résulte que cet effet ne pourra être contrôlé et utilisé que si l'on sait maîtriser la vitesse des atomes incident à mieux que 10^{-2} m.s^{-1} . Dans le cas contraire, il y aura création de plusieurs paquets d'ondes ayant des trajectoires distinctes pendant l'interaction laser, et le nombre de bras interférométriques - dans un interféromètre atomique

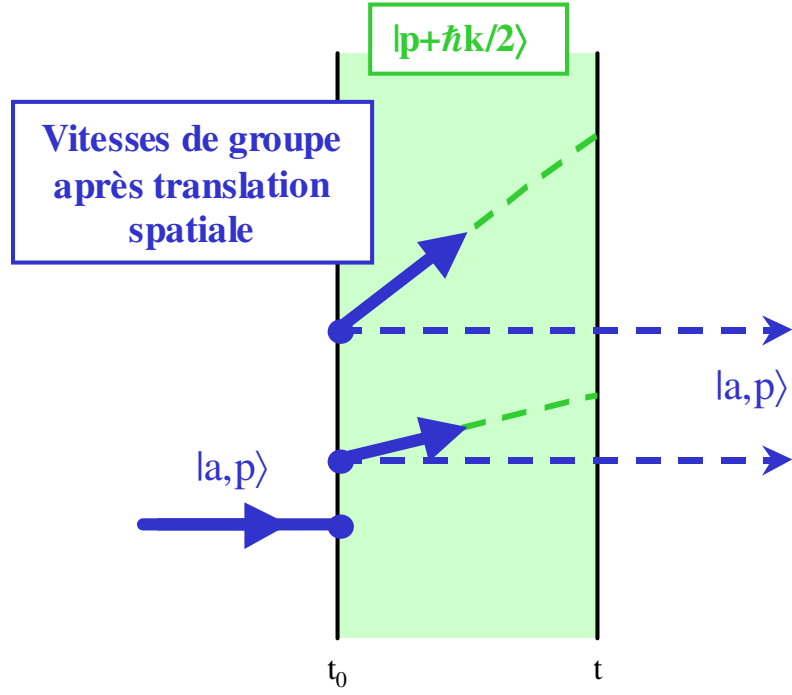


FIG. 3.13: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Effet de la translation spatiale du centre des paquets d'ondes issus de la structuration précédente (ceux dans l'état fondamental).

- sera d'autant plus important qu'il y aura de séparatrices laser (voir les parties 3.6 et 3.7, ainsi que les chapitres 4 et 5).

Signalons que plusieurs études de l'effet Borrmann atomique ont déjà été réalisées dans le cas libre (ie sans champ inertiel ni gravitationnel) [103], ainsi qu'en présence d'un champ de gravité uniforme et constant [101]. Dans ce paragraphe, nous l'examinons dans le cas général où plusieurs champs inertiels et gravitationnels (décrits par l'Hamiltonien H_{ext}) agissent simultanément pendant l'interaction laser (effet Borrmann généralisé), et nous montrons en outre que la trajectoire commune est en fait égale à la moyenne des deux trajectoires extrêmes $A\vec{r}_0 + B\vec{p}_0/m + \vec{\xi}$ (atome absorbant un photon à l'instant final t) et $A\vec{r}_0 + B(\vec{p}_0 + \hbar\vec{k})/m + \vec{\xi}$ (atome absorbant un photon à l'instant initial t_0).

En effet, décomposons par exemple le ket $|a(t_0)\rangle$ en modes Hermite-Gaussiens pour lesquels on peut définir un centre, en position et en impulsion. Soit $WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ un de ces paquets d'ondes initiaux (le principal par exemple, qui peut être Gaussien ou non), il a donc comme centres : \vec{r}_0 en position, et \vec{p}_0 en impulsion.

Si l'effet de $S_{op}(t, t_0)$ sur l'état externe de $e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{r}_{op}}WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ est négligeable (ie qu'il n'y a donc pas de modification de la forme du paquet d'ondes et de ces centres), alors, selon l'analyse précédente et avec l'aide des résultats de la partie 2.3 (sur l'évolution des paquets d'ondes atomiques), les centres des deux paquets d'ondes évoluent selon $(\vec{r}_c(t, t_0), \vec{p}_c(t, t_0))$:

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= A\left(\vec{r}_0 - \tilde{B}\frac{\hbar\vec{k}}{2m}\right) + B\left(\vec{p}_0 + (1 + \tilde{A})\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)/m + \vec{\xi} \\ \vec{p}_c/m &= C\left(\vec{r}_0 - \tilde{B}\frac{\hbar\vec{k}}{2m}\right) + D\left(\vec{p}_0 + (1 + \tilde{A})\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)/m + \vec{\phi}\end{aligned}$$

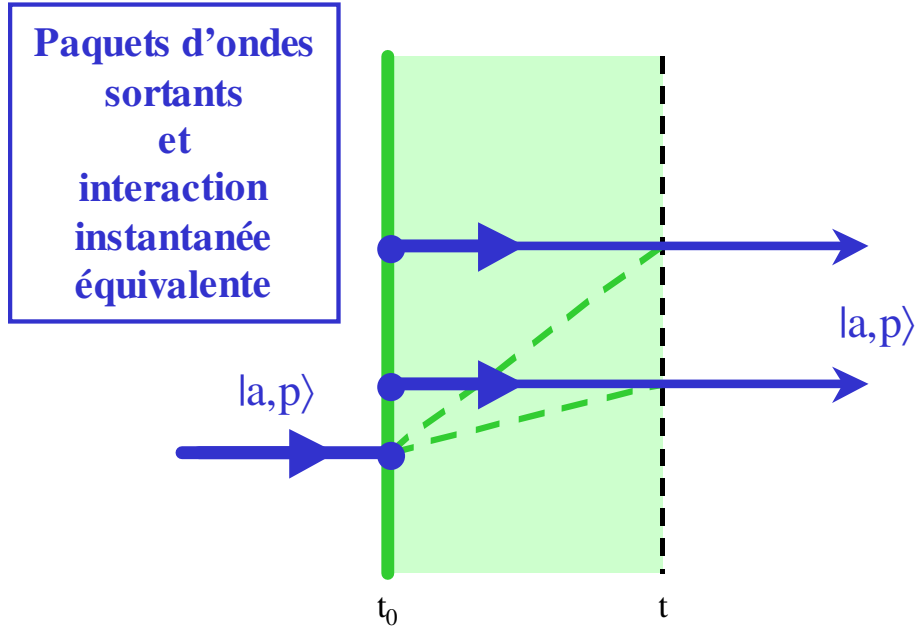


FIG. 3.14: Schéma ttt avec $t_1 = t_0$. Trajectoires des paquets d'ondes sortant d'une séparatrice (état fondamental) et interaction instantanée équivalente.

pour la composante supérieure, et :

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= A \left(\vec{r}_0 + \tilde{B} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + B \left(\vec{p}_0 + \left(1 - \tilde{A} \right) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\xi} \\ \vec{p}_c / m &= C \left(\vec{r}_0 + \tilde{B} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + D \left(\vec{p}_0 + \left(1 - \tilde{A} \right) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\phi}\end{aligned}$$

pour la composante inférieure (où on a sous-entendu la dépendance en (t, t_0)).

En utilisant les propriétés suivantes des matrices $ABCD$ (voir appendice B) :

$$\begin{aligned}\tilde{A}\tilde{B} - B\tilde{A} &= 0 \\ D\tilde{A} - C\tilde{B} &= 1\end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}\vec{r}_c(t, t_0) &= A\vec{r}_0 + B \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\xi} \\ &= \vec{R} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ \vec{p}_c(t, t_0) / m &= C\vec{r}_0 + D \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\phi} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \\ &= \vec{P} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \frac{\hbar \vec{k}}{2m}\end{aligned}$$

pour la composante supérieure, et :

$$\begin{aligned}\vec{r}_c(t, t_0) &= \vec{R} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ \vec{p}_c(t, t_0) / m &= \vec{P} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m - \frac{\hbar \vec{k}}{2m}\end{aligned}$$

pour la composante inférieure.

Le résultat principal est alors que les centres des paquets d'ondes associés aux deux composantes ont la **même trajectoire**, donnée par $\vec{r}_c(t, t_0)$, et qui n'est rien d'autre que la **moyenne arithmétique des deux trajectoires atomiques extrêmes** $A\vec{r}_0 + B\vec{p}_0/m + \vec{\xi}$ (atome absorbant un photon à l'instant final t) et $A\vec{r}_0 + B(\vec{p}_0 + \hbar \vec{k})/m + \vec{\xi}$ (atome absorbant un photon à l'instant initial t_0) :

$$\boxed{\vec{r}_c(t, t_0) = \frac{1}{2} \left(A\vec{r}_0 + B\vec{p}_0/m + \vec{\xi} \quad + \quad A\vec{r}_0 + B(\vec{p}_0 + \hbar \vec{k})/m + \vec{\xi} \right)}$$

D'autre part, on observe bien que la composante supérieure a un supplément d'impulsion de $\hbar \vec{k}/m$ par rapport à la composante inférieure, et cela à *tout instant* t .

Enfin, l'évolution de ces positions et impulsions centrales ne dépend que de deux quantités : \vec{r}_0 , la position centrale initiale, et $\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2}$: l'*impulsion initiale de Bragg*.

Cas général : structuration dispersive en plusieurs paquets d'ondes

Dans le cas général, $S_{op}(t, t_0)$ agit aussi sur l'état externe de $e^{\frac{i}{2} \vec{k} \cdot \vec{r}_{op}} WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$: il y a en fait structuration en **plusieurs paquets d'ondes atomiques** $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$, qui n'ont pas la même *forme* que $WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0 + \hbar \vec{k}/2, t_0)$, ni les mêmes *largeurs* en position et en impulsion (sélectivité en vitesse transverse), ni les mêmes position et impulsion centrales \vec{r}_{oi} et \vec{p}_{oi} (cette structuration dispersive sera analysée dans les parties 3.6 et 3.7) On n'a donc pas, dans le cas général, deux paquets d'ondes qui suivent une seule trajectoire commune, mais plusieurs paquets d'ondes avec des trajectoires différentes.

On peut néanmoins savoir comment ces paquets d'ondes $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$ évoluent dans la séparatrice en suivant la démarche précédente.

Ainsi, chacun de ces $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$ peut être décomposé en paquets d'ondes Hermito-Gaussiens qui subissent les translations $\mp \tilde{B}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ (en position) et $\pm \tilde{A}(t, t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ (en impulsion) avant d'évoluer de t_0 à t suivant $U_{E1}(t, t_0)$.

Par exemple, pour des paquets d'ondes Hermito-Gaussiens $\tilde{w}p_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$ approchant au mieux les $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$, on obtient que la trajectoire de leur centre est donnée par :

$$\vec{r}_{ci}(t, t_0) = A \left(\vec{r}_{oi} \mp \tilde{B} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + B \left(\vec{p}_{oi} \pm \tilde{A} \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\xi}$$

ie :

$$\boxed{\vec{r}_{ci}(t, t_0) = \vec{R}(t, t_0, \vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi}) = A\vec{r}_{oi} + B\vec{p}_{oi}/m + \vec{\xi}}$$

et que leur impulsion centrale vaut à t :

$$\vec{p}_{ci}(t, t_0) / m = C \left(\vec{r}_{oi} \mp \tilde{B} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + D \left(\vec{p}_{oi} \pm \tilde{A} \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\phi}$$

ie :

$$\boxed{\vec{p}_{ci}(t, t_0) = \vec{P}(t, t_0, \vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi}) \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2} = mC\vec{r}_{oi} + D\vec{p}_{oi} + m\vec{\phi} \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2}}$$

où le signe indique si l'on a affaire à une composante supérieure ou inférieure (respectivement). Les conclusions que l'on peut tirer de ce cas général sont alors les mêmes qu'au-dessus : trajectoires

médianes, différence d'impulsion entre les deux composantes de $\hbar \vec{k}$, et dépendance des trajectoires uniquement en fonction des deux quantités \vec{r}_{0i} et \vec{p}_{0i} .

Signalons enfin que cette démarche peut également être suivie en prenant $t_1 = t^-$ (ie égal à une valeur infiniment proche de t par valeurs inférieures) bien que $t_1 = t$ soit exclu par définition de t_1 (voir paragraphe 3.3.1).

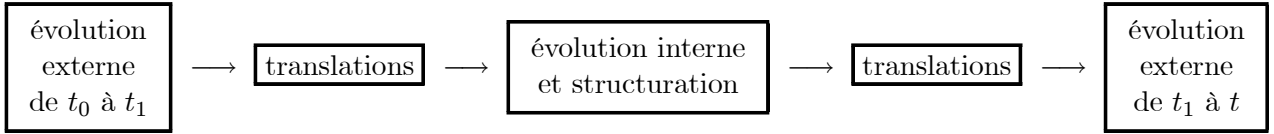
3.5.2 Cas $t > t_1 > t_0$:

Dans le cas où t_1 est distinct de t_0 et de t , on obtient un schéma d'évolution intermédiaire où t_1 joue le rôle central.

Il y a alors cinq étapes :

1. action des champs inertiels et gravitationnels de t_0 à t_1
2. ajout d'une impulsion $\pm \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ et translation en position de $\mp \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$
3. action de $S_{op}(t, t_0)$
4. ajout d'une impulsion $\pm \tilde{A}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ et translation en position de $\mp \tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$
5. action des champs inertiels et gravitationnels de t_1 à t

ie un schéma du type :



L'expression $U_2(1/2, t, t_1) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1)$ peut en effet s'écrire :

$$U_2(1/2, t, t_1) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_1)} S_{op,bb} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_1)} & e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_1)} S_{op,ba} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_1)} \\ e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_1)} S_{op,ab} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_1)} & e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t, t_1)} S_{op,aa} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0, t_1)} \end{pmatrix}$$

(avec Φ_{op} donné en 3.76) et donc, si l'on considère comme précédemment un ket initial du type :

$$|\Psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |a(t_0)\rangle \end{pmatrix}$$

on obtient que la **composante supérieure** de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$ s'écrit :

$$e^{i\theta_{1ba}} U_{E1}(t, t_1) e^{\frac{i}{2}\vec{k}A(t, t_1)\vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}B(t, t_1)\vec{p}_{op}/m} S_{op,ba} e^{\frac{i}{2}\vec{k}A(t_0, t_1)\vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}B(t_0, t_1)\vec{p}_{op}/m} U_{E1}(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle$$

dont l'interprétation est la suivante :

– *évolution de t_0 à t_1* (due aux champs inertiels et gravitationnels) :

$$U_{E1}(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle$$

– *translation en position de $-\tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ et en impulsion de $+\tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$* :

$$e^{\frac{i}{2}\vec{k}A(t_0, t_1)\vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}B(t_0, t_1)\vec{p}_{op}/m}$$

(voir la figure 3.15)

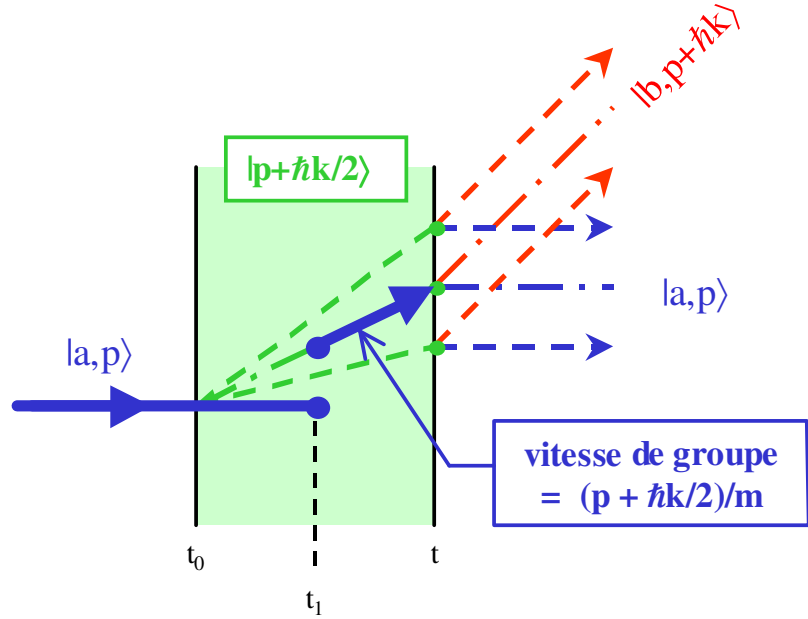


FIG. 3.15: Schéma ttt avec $t_1 = t_{1/2}$. Effet des deux premières translations (en position et impulsion) sur le paquet d'ondes atomique incident (représentation ici du cas libre, ie sans champ inertiel ni gravitationnel).

- action de l'élément non-diagonal de matrice S (changement d'état interne) :

$$S_{op,ba}(t, t_0)$$

(voir la figure 3.16)

- puis à nouveau deux translations : en position de $-\tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ et en impulsion de $+\tilde{A}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$:

$$e^{\frac{i}{2} \vec{k} A(t, t_1) \vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2} \vec{k} B(t, t_1) \vec{p}_{op}/m}$$

ie que si $S_{op,ba}(t, t_0)$ n'a pas ou peu d'effet sur l'état externe des atomes, alors les quatres translations précédentes se résument à : une translation en position de $-\left(\tilde{B}(t_0, t_1) + \tilde{B}(t, t_1)\right) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$, et une translation d'impulsion de $+\left(\tilde{A}(t_0, t_1) + \tilde{A}(t, t_1)\right) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$.

(voir la figure 3.17)

- puis évolution de t_1 à t (due aux champs inertiels et gravitationnels) :

$$U_{E1}(t, t_1)$$

- et enfin un facteur de phase $e^{i\theta_{1ba}}$:

$$\begin{aligned} \theta_{1ba} : &= -\frac{E_b(t - t_0)}{\hbar} - \frac{(\omega - \omega_0)(t - t_0) - \vec{k} \left(\vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1) \right)}{2} - \omega t_0 - \phi \\ &+ \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left(A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) \right) \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{aligned}$$

De même, pour la **composante inférieure** de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$, on a :

$$e^{i\theta_{1aa}} U_{E1}(t, t_1) e^{-\frac{i}{2} \vec{k} A(t, t_1) \vec{r}_{op}} e^{-\frac{i}{2} \vec{k} B(t, t_1) \vec{p}_{op}/m} S_{op,aa} e^{\frac{i}{2} \vec{k} A(t_0, t_1) \vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2} \vec{k} B(t_0, t_1) \vec{p}_{op}/m} U_{E1}(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle$$

qui s'interprète en :

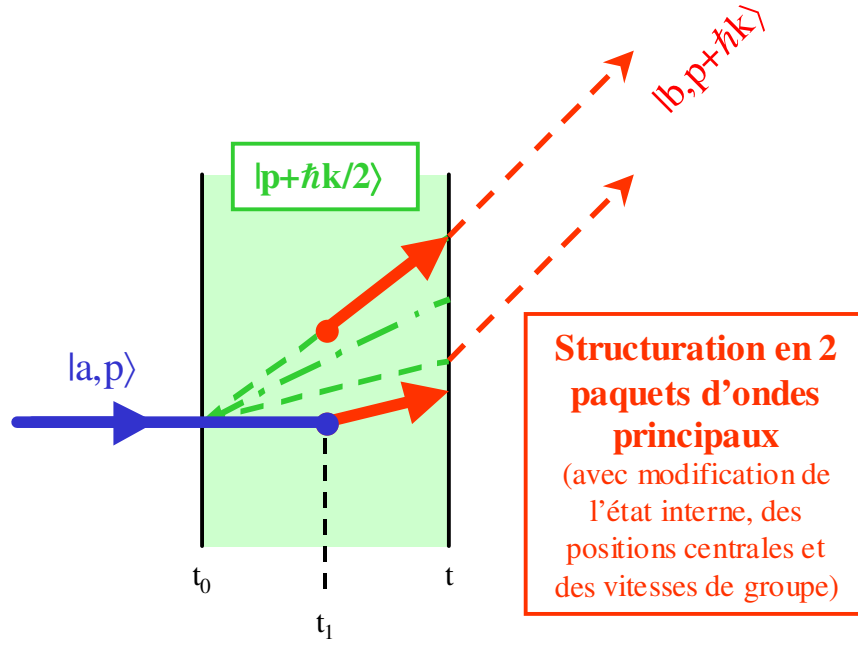


FIG. 3.16: Schéma ttt avec $t_1 = t_{1/2}$. Action structurante de l'élément de matrice S (atomes dans l'état excité).

- évolution de t_0 à t_1 (due aux champs inertiels et gravitationnels) :

$$U_{E1}(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle$$

- translation en position de $-\tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ et en impulsion de $+\tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$:

$$e^{\frac{i}{2} \vec{k} A(t_0, t_1) \vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{2} \vec{k} B(t_0, t_1) \vec{p}_{op}/m}$$

- action de l'élément diagonal de matrice S (diffusion sans changement d'état interne) :

$$S_{op,aa}(t, t_0)$$

(voir la figure 3.18)

- puis à nouveau deux translations (opposées à celles de la composante supérieure) : en position de $+\tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ et en impulsion de $-\tilde{A}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$:

$$e^{-\frac{i}{2} \vec{k} A(t, t_1) \vec{r}_{op}} e^{-\frac{i}{2} \vec{k} B(t, t_1) \vec{p}_{op}/m}$$

ie que si $S_{op,aa}(t, t_0)$ n'a pas ou peu d'effet sur l'état externe des atomes, alors les quatres translations précédentes se résument à : une translation en position de $\left(\tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1)\right) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$, et une translation d'impulsion de $\left(\tilde{A}(t_0, t_1) - \tilde{A}(t, t_1)\right) \frac{\hbar \vec{k}}{2}$.

- puis évolution de t_1 à t (due aux champs inertiels et gravitationnels) :

$$U_{E1}(t, t_1)$$

(voir la figure 3.19)

- et enfin un facteur de phase $e^{i\theta_{1aa}}$:

$$\begin{aligned} \theta_{1aa} : &= -\frac{E_a(t-t_0)}{\hbar} + \frac{(\omega - \omega_0)(t-t_0) - \vec{k} \left(\vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1) \right)}{2} \\ &+ \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left(A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) \right) \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{aligned}$$

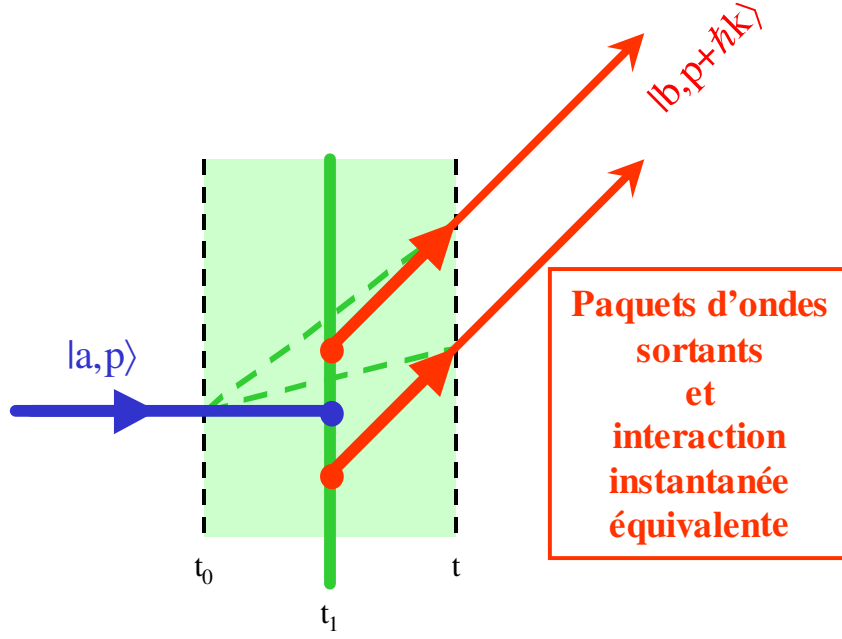


FIG. 3.17: Schéma ttt avec $t_1 = t_{1/2}$. Paquets d'ondes atomiques après les deux dernières translations (en position et impulsion). L'interaction instantanée équivalente est représentée pour les atomes dans l'état excité.

qui diffère de θ_{1ba} par :

$$\theta_{1aa} - \theta_{1ba} = \omega t + \phi - \vec{k} \cdot \vec{\xi}(t, t_1)$$

On peut alors donner une **valeur simplificatrice au temps arbitraire** t_1 .

Par exemple, dans le cas où l'on considère seulement l'effet de \vec{g} (ie d'un champ de gravité uniforme ou d'une accélération), les quantités dépendant de t_1 deviennent :

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t_0, t_1) + \tilde{B}(t, t_1) &= 2 \left(\frac{t + t_0}{2} - t_1 \right) \\ \tilde{A}(t_0, t_1) + \tilde{A}(t, t_1) &= 2 \\ \vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1) &= \left(\frac{t^2 + t_0^2}{2} - t_1^2 \right) \vec{g} \\ A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) &= 2 \left(\frac{t + t_0}{2} - t_1 \right) \\ \tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1) &= t - t_0 \\ \tilde{A}(t_0, t_1) - \tilde{A}(t, t_1) &= 0 \\ \vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1) &= \frac{t^2 - t_0^2}{2} \vec{g} \end{aligned}$$

et se simplifient beaucoup en choisissant pour t_1 l'instant médian :

$$t_1 = \frac{t + t_0}{2}$$

car dans ce cas :

$$\begin{aligned} A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) &= \tilde{B}(t_0, t_1) + \tilde{B}(t, t_1) = 0 \\ \vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1) &= \left(\frac{t - t_0}{2} \right)^2 \vec{g} \end{aligned}$$

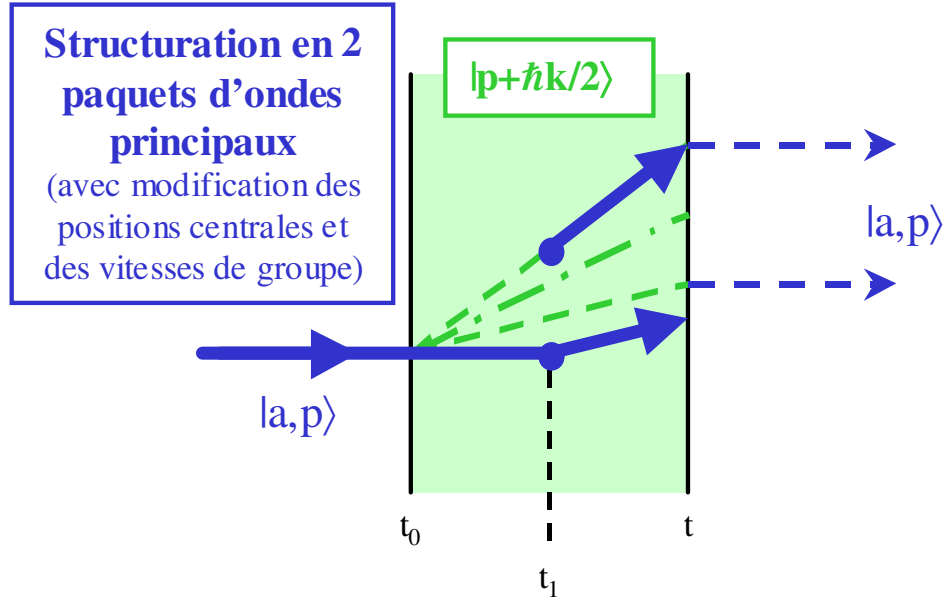


FIG. 3.18: Schéma ttt avec $t_1 = t_{1/2}$. Action structurante de l'élément de matrice S (atomes dans l'état fondamental).

D'autre part, lorsque l'effet de $S_{op}(t, t_0)$ sur l'état externe de $e^{\frac{i}{2} \vec{k} \cdot \vec{r}_{op}} WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ est négligeable (voir partie suivante), on retrouve les trajectoires du cas $t_1 = t_0$.

En effet, pour un paquet d'ondes centré en (\vec{r}_0, \vec{p}_0) , le "schéma $t_0 \ t_1 \ t''$ précédent conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= A(t, t_1) \left[A(t_1, t_0) \vec{r}_0 + B(t_1, t_0) \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) + \vec{\xi}(t_1, t_0) \mp \tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] \\ &\quad + B(t, t_1) \left[C(t_1, t_0) \vec{r}_0 + D(t_1, t_0) \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\phi}(t_1, t_0) \pm \tilde{A}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] + \vec{\xi}(t, t_1) \\ \vec{p}_c / m &= C(t, t_1) \left[A(t_1, t_0) \vec{r}_0 + B(t_1, t_0) \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) + \vec{\xi}(t_1, t_0) \mp \tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] \\ &\quad + D(t, t_1) \left[C(t_1, t_0) \vec{r}_0 + D(t_1, t_0) \left(\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\phi}(t_1, t_0) \pm \tilde{A}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] + \vec{\phi}(t, t_1) \end{aligned}$$

où les signes correspondent aux deux composantes $(-\tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \rightarrow \text{supérieure}, +\tilde{B}(t, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \rightarrow \text{inférieure})$ de $|\Psi_{sol}(t)\rangle$.

Grâce aux propriétés :

$$\begin{aligned} A(t, t_1) A(t_1, t_0) + B(t, t_1) C(t_1, t_0) &= A(t, t_0) \\ A(t, t_1) B(t_1, t_0) + B(t, t_1) D(t_1, t_0) &= B(t, t_0) \\ C(t, t_1) A(t_1, t_0) + D(t, t_1) C(t_1, t_0) &= C(t, t_0) \\ C(t, t_1) B(t_1, t_0) + D(t, t_1) D(t_1, t_0) &= D(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(t, t_1) \vec{\xi}(t_1, t_0) + B(t, t_1) \vec{\phi}(t_1, t_0) &= \vec{\xi}(t, t_0) \\ C(t, t_1) \vec{\xi}(t_1, t_0) + D(t, t_1) \vec{\phi}(t_1, t_0) &= \vec{\phi}(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) - B(t, t_1) \tilde{A}(t, t_1) &= 0 \\ D(t, t_1) \tilde{A}(t, t_1) - C(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) &= 1 \end{aligned}$$

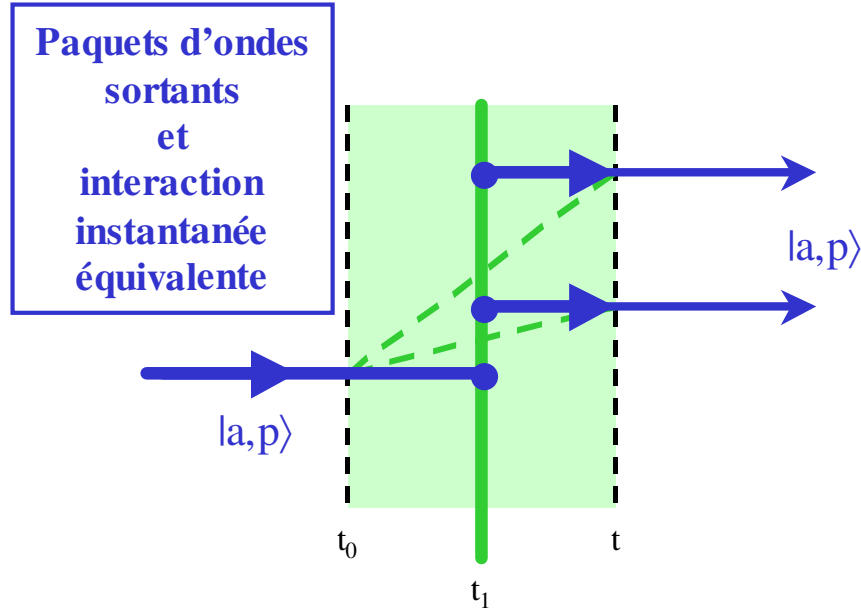


FIG. 3.19: Schéma ttt avec $t_1 = t_{1/2}$. Paquets d'ondes atomiques après les deux dernières translations (en position et impulsion). L'interaction instantanée équivalente est représentée pour les atomes dans l'état fondamental.

des matrices $ABCD$ (voir appendice B), on peut alors simplifier ces expressions, et on retrouve finalement l'unique trajectoire précédente (effet Borrmann généralisé) :

$$\vec{r}_c(t, t_0) = \vec{R} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

ainsi que les deux impulsions suivantes (qui diffèrent de $\hbar \vec{k}$) :

$$\vec{p}_c(t, t_0) = \vec{P} \left(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2}$$

On peut également, comme au paragraphe précédent, traiter le cas général, ie quand $S_{op}(t, t_0)$ agit aussi sur l'état externe de $e^{\frac{i}{2} \vec{k} \vec{r}_{op}} WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ et qu'il y a structuration en *plusieurs* paquets d'ondes atomiques $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$. La démarche est la même : évolution du paquet d'ondes $WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$ jusqu'à t_1 , puis *interaction structurante effective* due à $S_{op}(t, t_0)$, et enfin évolution des paquets d'ondes $wp_i(\vec{r}_{oi}, \vec{p}_{oi})$ obtenus de t_1 à t . On obtient ainsi le *schéma ttt* (avec " ttt " pour $t_0 t_1 t$, voir paragraphe suivant) qui permet de modéliser simplement l'effet des séparatrices sur un paquet d'ondes atomique incident.

3.5.3 Bilan : schéma ttt

Le but du schéma ttt (initialement introduit par Bordé en 2002 dans le cas d'une modélisation en champ faible des séparatrices [35, 79]) est de décrire l'effet d'une séparatrice sous la forme d'une **interaction effective instantanée** (au temps t_1). Les motivations sont essentiellement d'ordre pratique :

1. faire le lien avec les modélisations antérieures. Entre autres, avec celles consistant à simplement translater l'impulsion centrale du paquet d'ondes atomique pris au temps milieu, et à lui ajouter ensuite une phase laser effective (modélisations *infinitement fine* et *ttt - champ faible*),
2. donner une image claire de l'effet des séparatrices en termes de trajectoires centrales et de matrice de diffusion,
3. fournir une modélisation pratique pour le calcul du déphasage des interféromètres atomiques (voir chapitres 4 et 5).

Afin de séparer clairement, dans les expressions précédentes, les termes de diffusion (matrice S) des termes de translation et des termes de phase, nous allons transformer les expressions du type :

$$e^{+\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} S_{bb}(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}) e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)}$$

en :

$$S_{bb} \left(e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} \vec{r}_{op} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)}, e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} \vec{p}_{op} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} \right)$$

puis en :

$$S_{bb} \left(\vec{r}_{op} - \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} + \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

en se servant des formules A.2 et A.3 de l'appendice A.

Grâce à ces formules, on peut en effet exprimer $U_2(1/2, t, t_1) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1)$ comme :

$$U_2(1/2, t, t_1) S_{op}(t, t_0) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t,t_1)} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} & e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t,t_1)} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} \\ .S_{bb} \left(\vec{r}_{op} + \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} - \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) & .S_{ba} \left(\vec{r}_{op} - \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} + \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t,t_1)} e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} & e^{\frac{i}{2}\Phi_{op}(t,t_1)} e^{-\frac{i}{2}\Phi_{op}(t_0,t_1)} \\ .S_{ab} \left(\vec{r}_{op} + \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} - \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) & .S_{aa} \left(\vec{r}_{op} - \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} + \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \end{pmatrix}$$

en faisant apparaître une partie de l'effet des translations $e^{\pm \frac{i}{2} \vec{k} \cdot A(t_0, t_1) \vec{r}_{op}}$ et $e^{\pm \frac{i}{2} \vec{k} \cdot B(t_0, t_1) \vec{p}_{op}/m}$ **directement** dans l'expression de S_{op} .

Dans le cas libre (ou avec seulement l'effet de \vec{g}), les éléments de matrice de S_{op} ne dépendent que de l'opérateur \vec{p}_{op} via l'expression :

$$\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_{op}/m \quad \left(-\vec{k} \cdot \vec{g}(t - t_0) \right)$$

et on fait ainsi apparaître l'habituel *terme de recul* $\hbar \vec{k}^2/2m$ directement dans l'expression de S_{op} :

$$\begin{aligned}
& S_{op,libre} \left(e^{\pm \frac{i}{2} \Phi_{op}(t_0, t_1)} \vec{r}_{op} e^{\mp \frac{i}{2} \Phi_{op}(t_0, t_1)}, e^{\pm \frac{i}{2} \Phi_{op}(t_0, t_1)} \vec{p}_{op} e^{\mp \frac{i}{2} \Phi_{op}(t_0, t_1)} \right) \\
&= S_{op,libre} \left(\vec{r}_{op} \mp (t_0 - t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\
&= S_{op,libre} \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \left(\vec{p}_{op} \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \right) \\
&= S_{op,libre} \left(\omega - \omega_0 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_{op}}{m} \mp \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} \right)
\end{aligned}$$

où on reconnaît le désaccord Δ_{op1} introduit au paragraphe 3.5.1 :

$$\Delta_{op1,libre} = \omega - \omega_0 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_{op}}{m} - \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}$$

Finalement, en regroupant les termes de translation en position d'un côté, ceux en impulsion de l'autre, on peut écrire le ket solution :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) U_2(1/2, t, t_1) U_3(t, t_1, t_3) S_{op}(t, t_0) U_3^{-1}(t_0, t_1, t_3) U_2^{-1}(1/2, t_0, t_1) U_1^{-1}(t_0, t_1) |\Psi(t_0)\rangle$$

sous la forme :

$$\boxed{|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1) U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle} \quad (3.77)$$

où l'on a défini la **matrice de diffusion au temps** t_1 :

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1,bb} & S_{1,ba} \\ S_{1,ab} & S_{1,aa} \end{pmatrix}$$

dont les éléments valent :

pour la transition $b \mapsto b$:

$$\boxed{S_{1,bb} := e^{i\Phi_{bb}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{bb}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{bb}} S_{bb} \left(\vec{r}_{op} + \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} - \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.78)$$

où :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{bb} &: = + \frac{\tilde{A}(t, t_1) - \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\
\vec{r}_{bb} &: = - \frac{\tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\
\Phi_{bb} &: = -\frac{1}{2} \left[(\omega - \omega_0) (t - t_0) - \vec{k} \cdot \left(\vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1) \right) \right] \\
&\quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) - 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt'
\end{aligned} \quad (3.79)$$

pour la transition $a \mapsto b$:

$$\boxed{S_{1,ba} := e^{i\Phi_{ba}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{ba}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{ba}} S_{ba} \left(\vec{r}_{op} - \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} + \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.80)$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ba} &: = + \frac{\tilde{A}(t, t_1) + \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ba} &: = - \frac{\tilde{B}(t, t_1) + \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ba} &: = - \left[\omega \frac{t+t_0}{2} - \omega_0 \left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) + \phi - \vec{k} \cdot \frac{\vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1)}{2} \right] \\ &\quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) + 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{aligned} \quad (3.81)$$

pour la transition $b \mapsto a$:

$$\boxed{S_{1,ab} := e^{i\Phi_{ab}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{ab}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{ab}} S_{ab} \left(\vec{r}_{op} + \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} - \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.82)$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ab} &: = - \frac{\tilde{A}(t, t_1) + \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ab} &: = + \frac{\tilde{B}(t, t_1) + \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ab} &: = + \left[\omega \frac{t+t_0}{2} - \omega_0 \left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) + \phi - \vec{k} \cdot \frac{\vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1)}{2} \right] \\ &\quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) + 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{aligned} \quad (3.83)$$

pour la transition $a \mapsto a$:

$$\boxed{S_{1,aa} := e^{i\Phi_{aa}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{aa}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{aa}} S_{aa} \left(\vec{r}_{op} - \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} + \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.84)$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{aa} &: = - \frac{\tilde{A}(t, t_1) - \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{aa} &: = + \frac{\tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{aa} &: = + \frac{1}{2} \left[(\omega - \omega_0) (t - t_0) - \vec{k} \cdot (\vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1)) \right] \\ &\quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) - 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{aligned} \quad (3.85)$$

L'interprétation de ces termes est simple et constitue le **coeur du schéma ttt**. L'expression du ket $|\Psi_{sol}(t)\rangle$:

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1) U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

et des éléments $S_{1,uv}$ nous indiquent en effet comment fonctionne ce schéma *ttt* :

1. De t_0 à t_1 : le ket initial $|\Psi_{sol}(t)\rangle$ évolue selon l'Hamiltonien H_{ext} (comme s'il n'y avait pas d'interaction laser) :

$$|\Psi(t_0)\rangle \longrightarrow U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

2. A t_1 : le ket évolué $U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$ subit une **interaction laser instantanée effective** :

$$U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \longrightarrow S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1) U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

La matrice de diffusion correspondante $S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1)$ modifie alors les caractéristiques du paquet d'ondes associé à ce ket par :

- i. une **structuration en plusieurs paquets d'ondes** $wp_i(\vec{r}_{0i}, \vec{p}_{0i})$ due aux termes :

$$S_{ij} \left(\vec{r}_{op} \pm \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}, \vec{p}_{op} \pm \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

(cette structuration est détaillée dans les deux parties suivantes)

- ii. puis une translation de la position et de l'impulsion centrales des paquets d'ondes obtenus :

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{uv}} wp_i(\vec{r}_{0i}, \vec{p}_{0i}) \longrightarrow e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{r}_{0i} + \vec{r}_{uv}) \cdot \vec{p}_{uv}} wp_i(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_{0i} + \vec{p}_{uv})$$

- iii. puis l'ajout d'une phase laser effective : Φ_{uv}

3. De t_1 à t : les paquets d'ondes $e^{i\Phi_{uv} + i(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_{uv}) \cdot \vec{p}_{uv} / \hbar} wp_i(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_{0i} + \vec{p}_{uv})$ évoluent selon H_{ext} (comme s'il n'y avait pas d'interaction laser) :

$$S_1 U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \longrightarrow U_1(t, t_1) S_1 U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

Par exemple, dans le **cas libre** (ie sans champ inertiel ni gravitationnel), on obtient comme éléments de S_1 :

$$\boxed{S_{1,bb} = e^{i\Phi_{bb}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{bb}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{bb}} S_{bb} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.86)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{bb} &= \vec{0} \\ \vec{r}_{bb} &= -(t - t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \\ \Phi_{bb} &= -\frac{1}{2} (\omega - \omega_0 + \delta) (t - t_0) \end{aligned} \quad (3.87)$$

pour la transition $b \mapsto b$; puis :

$$\boxed{S_{1,ba} = e^{i\Phi_{ba}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{ba}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{ba}} S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.88)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ba} &= +\hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ba} &= -\left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ba} &= -\left[(\omega - \omega_0 - \delta) \left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) + \phi + \omega t_1 \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

pour la transition $a \mapsto b$; puis :

$$\boxed{S_{1,ab} = e^{i\Phi_{ab}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{ab}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{ab}} S_{ab} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.90)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ab} &= -\hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ab} &= +\left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ab} &= (\omega - \omega_0 + \delta) \left(\frac{t+t_0}{2} - t_1 \right) + \phi + \omega t_1 \end{aligned} \quad (3.91)$$

pour la transition $b \mapsto a$; et enfin :

$$\boxed{S_{1,aa} = e^{i\Phi_{aa}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{aa}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{aa}} S_{aa} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)} \quad (3.92)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{aa} &= \vec{0} \\ \vec{r}_{aa} &= (t - t_0) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \\ \Phi_{aa} &= \frac{1}{2} (\omega - \omega_0 - \delta) (t - t_0) \end{aligned} \quad (3.93)$$

pour la transition $a \mapsto a$.

On voit alors très clairement apparaître le **temps médian** (ou *temps milieu*) : $t_{1/2} = \frac{t+t_0}{2}$, qui, s'il est choisi comme temps intermédiaire (ie $t_1 = t_{1/2}$), permet de simplifier significativement les expressions précédentes, car on a alors :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{ba} &= \vec{r}_{ab} = \vec{0} \\ \Phi_{ba} &= -\Phi_{ab} = -(\phi + \omega t_{1/2}) \end{aligned}$$

Même dans le cas le plus général, ce choix particulier de t_1 simplifie grandement les expressions de \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} . Nous prendrons donc par la suite :

$$\boxed{t_1 = t_{1/2} = \frac{t+t_0}{2}}$$

Il reste maintenant à établir la forme et les caractéristiques des paquets d'ondes $wp_i(\vec{r}_{0i}, \vec{p}_{0i})$ qui prennent naissance dans une séparatrice. Nous étudierons d'abord cette **structuration** dans le cas libre, puis nous verrons comment étendre nos résultats au cas général.

3.6 Etude du cas libre

L'étude du cas libre (ie lorsque l'on néglige les effets gravitationnels et inertiels pendant l'interaction laser) est très **importante pour trois raisons**.

Premièrement, parce que notre étude de la matrice $M_{op}(t)$ au paragraphe 3.3.2 nous a montré que les différents termes du développement du désaccord généralisé n'étaient pas tous du même ordre, et que l'on pouvait négliger quasiment tous les termes inertiels et gravitationnels *lors de la résolution de l'équation* :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle \quad (3.94)$$

et seulement dans ce cas (ou pour des équations issues de celle-ci, comme celles utilisant les états adiabatiques, voir paragraphes 3.3.3 et 3.4.2). En fait, nous sommes arrivés à la conclusion que seul l'effet de \vec{g} (champ de gravité ou d'accélération uniforme) pouvait être non-négligeable *lors de la résolution de cette équation* (dans le cas où \vec{g} n'est pas orthogonal à \vec{k} , et pour des valeurs de \vec{g} suffisamment grandes).

On peut même, en première approximation, et lorsque $\Omega_0 \geq 10^5 s^{-1}$ (valeurs usuelles en interférométrie atomique), négliger également l'effet de \vec{g} dans $M_{op}(t)$, car pour les données terrestres, on a :

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{g} t}{2\Omega_0} \leq \frac{\|\vec{k}\| \|\vec{g}\| \tau}{2\Omega_0} \sim \frac{\|\vec{k}\| \|\vec{g}\|}{\Omega_0^2} \sim 10^{-2}$$

avec $\|\vec{k}\| \sim 10^7 m^{-1}$. Ce terme peut même disparaître dans certains cas (en gyrométrie atomique par exemple, si \vec{g} est orthogonal au vecteur d'onde \vec{k}).

Une autre solution est de considérer, comme on l'a déjà souligné, une modulation de la fréquence du laser qui compense le terme $\vec{k} \cdot \vec{g} t$ (et de façon plus générale, qui compense tout effet Doppler d'origine inertielle ou gravitationnelle).

Finalement, on peut presque toujours approximer $M_{op}(t)$ par son expression obtenue dans le cas libre. L'étude de ce cas libre est donc précieuse pour nous fournir des informations sur le cas général.

Insistons encore sur le fait que négliger les effets inertiels et gravitationnels *lors de la résolution de l'équation* $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$ (évolution principalement interne) ne signifie en aucun cas que l'on néglige ces effets sur le mouvement des atomes pendant l'interaction laser (évolution externe). Voir à ce sujet la partie 3.5.

La seconde raison est qu'il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude vraiment *complète* des séparatrices, même dans le cas libre et avec une impulsion laser de forme crénneau. Il existe en effet de nombreux travaux, par exemple sur l'évolution des populations (oscillations de Rabi avec désaccord non nul), sur la modification de la distribution en impulsion des paquets d'ondes (sélectivité en vitesse transverse et bandes latérales), sur les vitesses de groupe des paquets d'ondes prenant naissance à l'intérieur des séparatrices [30, 102, 58] (uniquement pour des paquets d'ondes atomiques incidents à faible largeur en impulsion), sur l'effet mécanique des interactions laser (effets Kapitza-Dirac et Stern-Gerlach, transfert d'impulsion multiple de $\hbar \vec{k}$)...

L'attention est ainsi portée sur *l'utilisation d'un aspect* de l'interaction laser-matière (en tant que séparatrice interne et/ou externe, ou en tant que filtre en vitesse par exemple), mais non sur **l'étude globale** de tous ses aspects, et en particulier lorsque l'on considère de vrais paquets d'ondes. Par exemple, on connaît bien l'expression de la solution de $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op,libre}(t) |\varphi(t)\rangle$, mais on ne sait pas comment se transforme un paquet d'ondes atomique incident sous l'action d'une impulsion laser, ou quels sont les paquets d'ondes qui prennent forme dans la séparatrice, et quelles sont alors les trajectoires des centres de ces paquets d'ondes...

On sait par ailleurs que l'interaction atomes-laser donne naissance à des états particuliers : les **états adiabatiques**, qui sont en fait les états propres de l'interaction. En représentation impulsion,

on peut alors montrer que ces états sont caractérisés par des **vitesse de groupe différentes** [102] (en utilisant par exemple leur relation de dispersion, ie l'expression de leur énergie ici). Malheureusement, ce traitement n'est valable **que pour des paquets d'ondes incident ayant une faible largeur en impulsion**, et, dans le cas de paquets d'ondes incidents *quelconques*, on ne sait pas encore relier ces vitesses aux vitesses de groupe des paquets d'ondes atomiques qui prennent réellement naissance dans les séparatrices.

L'étude et la modélisation de la structuration en paquets d'ondes des séparatrices laser, même dans le cas le plus simple (sans champ inertiel, ni gravitationnel et avec un créneau temporel), reste donc à faire, d'autant plus qu'elle est maintenant devenue un chaînon essentiel de la modélisation des interféromètres atomiques, tant le niveau de précision de ces appareils est élevé (voir les chapitres 1 et 5).

Enfin, l'étude du cas libre va nous permettre de mieux appréhender le cas général, ie lorsque l'on tient compte de l'effet des champs inertiels et gravitationnels. Cela nous aidera en particulier à **modéliser la structuration en paquets d'ondes due à une séparatrice laser en présence de champs inertiels et gravitationnels**.

Nous commencerons donc par étudier ces vitesses de groupe dans la base des états adiabatiques et pour une impulsion de forme créneau ($F(t) = 1$), puis nous reviendrons dans la représentation initiale pour exposer les principales propriétés de la solution de Rabi (oscillations interne, sélectivité en vitesse...). Ensuite nous verrons comment évolue un paquet d'ondes atomique dans une telle séparatrice : d'abord lorsque la largeur en impulsion du paquet d'ondes incident est faible (paquets d'ondes fins), puis dans le cas général (paquets d'ondes quelconques). Enfin, on verra comment adapter ce modèle à d'autres types d'impulsions (par exemple pour une impulsion de forme sécante hyperbolique *sech*).

3.6.1 Vitesses de groupe des états adiabatiques

Notre recherche d'une *équation de moindre mouvement* nous a conduit, aux paragraphes 3.3.3 et 3.4.3, à considérer une base particulière de l'espace des états : la base des *états adiabatiques*, dans laquelle l'équation précédente $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op, libre}(t) |\varphi(t)\rangle$ devient (en représentation $|s\rangle$) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varphi_{adiab}(s; t) = iM_{adiab}(s; t) \varphi_{adiab}(s; t)} \quad (3.95)$$

avec le changement de base suivant :

$$|\varphi(t)\rangle = U_{adiab} |\varphi_{adiab}(t)\rangle$$

où :

$$U_{adiab} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tan(2\theta(s; t)) = \frac{2\Omega_0 F(s; t, t_1)}{\Delta(s; t, t_1)}$$

et avec :

$$M_{adiab}(s; t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(s; t) & i\dot{\theta}(s; t) \\ -i\dot{\theta}(s; t) & -\varepsilon(s; t) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(s; t) = \sqrt{\Omega_0^2 F^2(s; t, t_1) + \frac{1}{4} \Delta^2(s; t, t_1)} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(s; t) = \frac{\Omega_0}{4} \frac{\dot{F} \Delta - F \dot{\Delta}}{\varepsilon^2}$$

Dans le **cas libre** et avec une impulsion laser constante (**créneau temporel**), on obtient alors pour l'opérateur $|s\rangle$, l'amplitude $F(s; t, t_1)$ et le désaccord $\Delta(s; t, t_1)$ respectivement :

$$|s\rangle \longrightarrow |\vec{p}\rangle$$

$$\begin{aligned} F(s; t, t_1) &\longrightarrow 1 \quad \text{pour } t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

$$\Delta(s; t, t_1) \longrightarrow \boxed{\Delta_l(\vec{p}) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m}$$

ie que $F(s; t, t_1)$ et $\Delta(s; t, t_1)$ sont indépendants du temps et que la représentation adaptée est la représentation impulsion.

Dans ce cas, le paramètre $\dot{\theta}(s; t)$ est nul, et la base adiabatique *diagonalise l'équation* $\frac{d}{dt}\varphi_{\text{adiab}} = iM_{\text{adiab}}\varphi_{\text{adiab}}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_{\text{adiab}}(\vec{p}) \\ a_{\text{adiab}}(\vec{p}) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{p}) & 0 \\ 0 & -\varepsilon(\vec{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\text{adiab}}(\vec{p}) \\ a_{\text{adiab}}(\vec{p}) \end{pmatrix}}$$

avec :

$$\boxed{\varepsilon(\vec{p}) := \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{4}\Delta_l(\vec{p})^2}}$$

Les états $b_{\text{adiab}}(\vec{p})$ et $a_{\text{adiab}}(\vec{p})$ ont donc les énergies $-\hbar\varepsilon(\vec{p})$ et $+\hbar\varepsilon(\vec{p})$ respectivement, et l'équation précédente s'intègre facilement en :

$$\begin{aligned} b_{\text{adiab}}(\vec{p}, t) &= e^{i\varepsilon(\vec{p})(t-t_0)} b_{\text{adiab}}(\vec{p}, t_0) \\ a_{\text{adiab}}(\vec{p}, t) &= e^{-i\varepsilon(\vec{p})(t-t_0)} a_{\text{adiab}}(\vec{p}, t_0) \end{aligned}$$

Ces deux énergies permettent également d'avoir accès aux **vitesse de groupe** des états adiabatiques.

Ici $-\hbar\varepsilon(\vec{p})$ et $+\hbar\varepsilon(\vec{p})$ sont en effet les *relations de dispersion* des états adiabatiques, et en prenant leur dérivée par rapport à \vec{p} :

$$\pm \vec{v}_\varepsilon(\vec{p}) := \mp \hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}}(\varepsilon(\vec{p}))$$

on obtient l'expression des vitesses de groupe de ces états.

Remarquons que ces vitesses ne coïncident pas forcément avec les vitesses centrales des paquets d'ondes solutions. C'est le cas uniquement lorsque l'on considère des paquets d'ondes *infinitement fins*, ie dont la largeur en impulsion est infiniment fine (une version physique des ondes planes en quelque sorte). On verra alors au paragraphe 3.6.4 que ces deux types de vitesse peuvent être très différentes pour des paquets d'ondes de largeur en impulsion quelconque (cette différence vient de la structuration particulière du paquet d'ondes incident par la séparatrice, ce dernier étant en effet multiplié par une filtre impulsionnel qui n'est pas centré sur l'impulsion centrale incidente \vec{p}_0).

Avec l'expression de $\varepsilon(\vec{p})$, nous obtenons donc comme vitesses de groupe :

$$\pm \vec{v}_\varepsilon(\vec{p}) \quad \text{avec :} \quad \boxed{\vec{v}_\varepsilon(\vec{p}) = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}}}$$

où le paramètre $y(\vec{p})$ est défini par [102] :

$$\boxed{y(\vec{p}) := \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m \right) / 2\Omega_0}$$

connu et introduit en physique des neutrons sous le nom de "**Off Braggness Parameter**" (ou **paramètre OB**) pour rendre compte de l'influence de l'écart à l'incidence de Bragg, ie lorsque la condition de Bragg est violée : $\vec{p}_0 \pm \hbar \vec{k}/2 \neq 0$, où \vec{p}_0 est l'impulsion moyenne des neutrons avant traversée du réseau mécanique servant de séparatrice.

En fait, dans le cas libre et selon les résultats de la fin de la partie précédente, la matrice S_{op} agit, non pas sur le paquet d'ondes atomique incident $WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$, mais sur un paquet d'ondes ayant l'impulsion centrale $\vec{p}_0 \pm \hbar \vec{k}/2$ (\pm selon l'état interne de $WP(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t_0)$). La matrice de diffusion (en représentation $|\vec{p}\rangle$) s'écrit par conséquent :

$$S_{libre} \left(\omega - \omega_0 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{m} \mp \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} \right)$$

Avec cette nouvelle matrice de diffusion, on obtient un paramètre OB différent :

$$\boxed{y_{\pm}(\vec{p}) = \left(\omega - \omega_0 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{m} \mp \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} \right) / 2\Omega_0} \quad (3.96)$$

dont on cherche généralement à minimiser la valeur pour une certaine impulsion \vec{p}_c (pour l'instant, on choisit $\vec{p}_c = \vec{p}_0$, ie l'impulsion centrale du paquet d'ondes incident), car il peut faire chuter fortement les taux de transition interne lorsqu'il n'est pas nul (voir ci-après).

Remarquons qu'en optique atomique, la **dévi**ation par rapport à l'angle de Bragg n'est pas la seule raison de non-nullité de $y(\vec{p}_0)$. Dans le cas des atomes on a en effet plusieurs possibilités pour annuler $y_{\pm}(\vec{p}_c)$: par exemple, être à la résonance ($\omega = \omega_0$) et satisfaire la condition de Bragg

$$\vec{p}_c \pm \hbar \vec{k}/2 = 0$$

ou être désaccordé pour compenser l'écart à l'incidence de Bragg (lorsque $\vec{p}_c \perp \vec{k}$ par exemple). Inversement, si l'on est à résonance sans remplir la condition de Bragg, le paramètre $y_{\pm}(\vec{p}_c)$ n'est pas nul. Par exemple, avec $\vec{p}_c \perp \vec{k}$, on obtient :

$$|y_{\pm}(\vec{p}_c)| = \frac{\hbar \vec{k}^2/2m}{2\Omega_0} \sim 1$$

pour les valeurs usuelles de $\vec{k} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\Omega_0 \sim 10^5 \text{ s}^{-1}$ et $m = m_{Cs} \sim 2,2 \cdot 10^{-25} \text{ Kg}$.

Nous reviendrons sur ce point ultérieurement pour donner des précisions sur la valeur de \vec{p}_c qui peut, comme nous le verrons, ne pas être égale à \vec{p}_0 .

Il convient de souligner l'extrême **sensibilité du paramètre OB à l'imprécision de la vitesse centrale initiale** \vec{p}_c/m . En effet, un écart égal à $\Delta v_{c\parallel}$ dans la vitesse centrale transverse du paquet d'ondes atomique incident est amplifié, dans y , par le facteur k/Ω_0 . Pour les valeurs usuelles rappelées ci-dessus ce facteur est très important :

$$k/\Omega_0 \sim 10^2 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}$$

et par conséquent y est non-négligeable dès que $\Delta v_{c\parallel}$ est de l'ordre de $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$\Delta v_{c\parallel} \sim 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \implies \quad |y_{\pm}(\vec{p}_c)| \sim 1$$

Nous verrons plus loin que la valeur de ce paramètre OB est très importante car elle conditionne l'existence de plusieurs trajectoires atomiques distinctes dans la séparatrice (dès que $y_{\pm}(\vec{p}_c)$ est non négligeable devant 1), et par conséquent l'existence de plus de deux bras interférométriques distincts dans un interféromètre atomique (voir chapitres 4 et 5). Il est donc essentiel - si l'on veut que les atomes

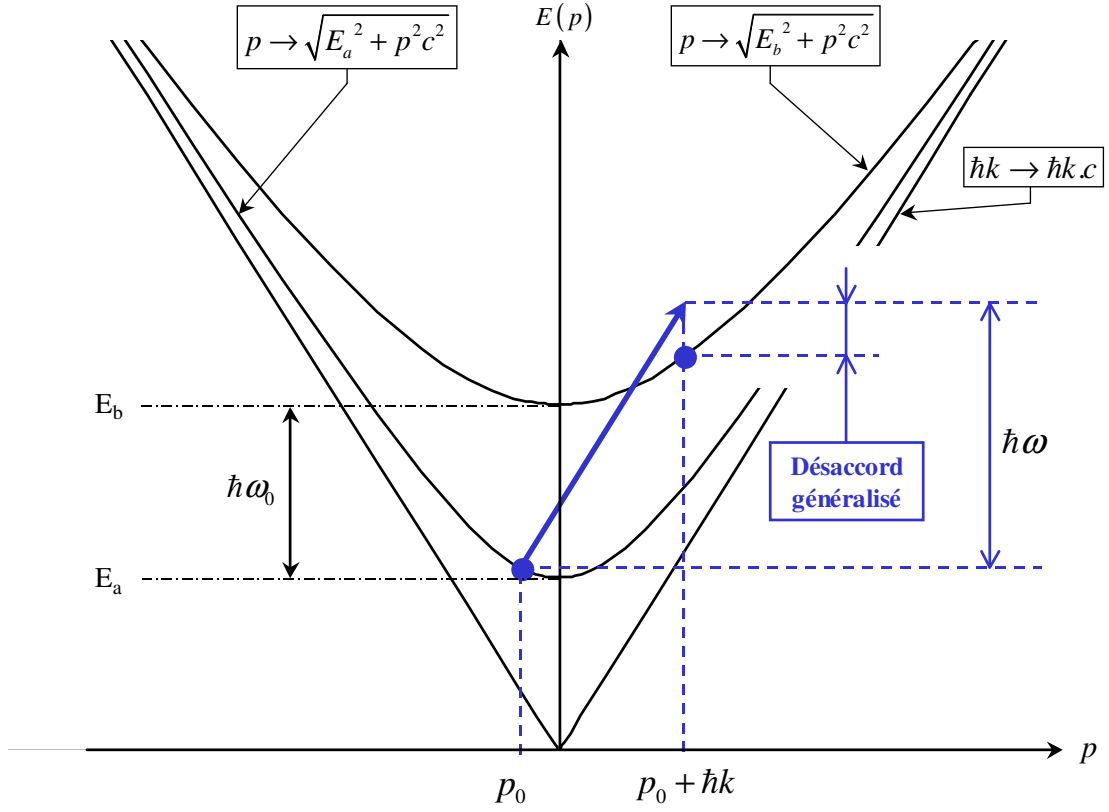


FIG. 3.20: Diagramme énergie-impulsion d'un atome à deux niveaux soumis à une onde laser quasi-résonnante progressive. Cas d'une transition inélastique entre le niveau fondamental a et le niveau excité b.

ne suivent qu'une seule trajectoire dans les séparatrices (**effet Borrmann**, voir la partie 3.5.1) - de savoir maîtriser leur vitesse centrale initiale à mieux que Ω_0/k .

Par la suite, nous appellerons ce paramètre y "**paramètre d'inélasticité**" pour faire référence à la relation de conservation d'énergie-impulsion et au caractère non-élastique de la transition atomique lorsque $y \neq 0$.

Par exemple, pour un atome dans l'état fondamental absorbant un photon (ω, \vec{k}) le faisant passer de l'état (E_a, \vec{p}) à l'état $(E_b, \vec{p} + \hbar \vec{k})$, on obtient la relation de conservation d'énergie-impulsion suivante : (voir figure 3.20) :

$$E_b + \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k})^2}{2m} = E_a + \hbar\omega + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

ie aussi :

$$\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m = 0$$

qui donne en fait une **condition** sur \vec{p} , ω et \vec{k} pour que l'atome absorbe bien le photon (ω_L, \vec{k}_L) .

On peut alors avoir $y \neq 0$ sans qu'il y ait pour autant violation de la conservation d'énergie-impulsion. En effet, comme on l'a vu en détail dans la partie 3.2.2, la structure de l'onde laser servant de séparatrice induit une certaine incertitude sur la fréquence $\omega/2\pi$ et sur le vecteur d'onde \vec{k} du photon réellement absorbé par l'atome. Par exemple, une impulsion laser dont l'amplitude est modulée spatialement (de largeur focale égale à w suivant la direction x) autorisera les transitions atomiques avec des photons de vecteur d'onde k_x compris entre $k_{Lx} - \pi/w$ et $k_{Lx} + \pi/w$, et la condition précédente sera partiellement relaxée.

Dans le cas présent, l'amplitude n'est modulée que temporellement ($F = 1$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$). Le vecteur d'onde des photons absorbés est donc parfaitement défini :

$$\vec{k} = \vec{k}_L$$

(onde plane), mais c'est leur fréquence ω qui n'est plus définie de façon précise (comprise entre $\omega_L - \pi/\tau$ et $\omega_L + \pi/\tau$), et qui autorise par conséquent la transition entre les deux états internes, même pour $y \neq 0$.

On dira donc que la transition est effectuée de façon *inélastique* lorsque $y \neq 0$, et que la structure de l'impulsion laser autorise cet écart (soulignons qu'une transition avec changement d'état interne ne signifie pas pour autant qu'elle est inélastique).

L'examen des vitesses de groupe $\pm \vec{v}_\varepsilon(\vec{p})$ nous amène alors à **plusieurs conclusions importantes** :

1. On a bien confirmation de la **différence entre impulsions et vitesses de groupe** (fois la masse) lorsque les atomes sont en présence d'un champ électromagnétique.

En effet, les atomes d'impulsion \vec{p} soumis à l'interaction laser ont comme impulsion : soit \vec{p} avant absorption d'un photon, soit $\vec{p} + \hbar \vec{k}$ après absorption d'un photon ; or, suivant les résultats de la partie précédente (sur les transformations unitaires inverses), les vitesses de groupe permises sont finalement égales à :

$$\frac{\vec{p}}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left(1 \pm \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \right) \neq \frac{\vec{p}}{m} \quad \text{et} \quad \neq \frac{\vec{p}}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

pour un ket initial dans l'état fondamental. Les trajectoires correspondant à ces vitesses de groupe sont alors symétriques par rapport à la direction de l'impulsion médiane $\vec{p} + \hbar \vec{k}/2$ (voir figure 3.21).

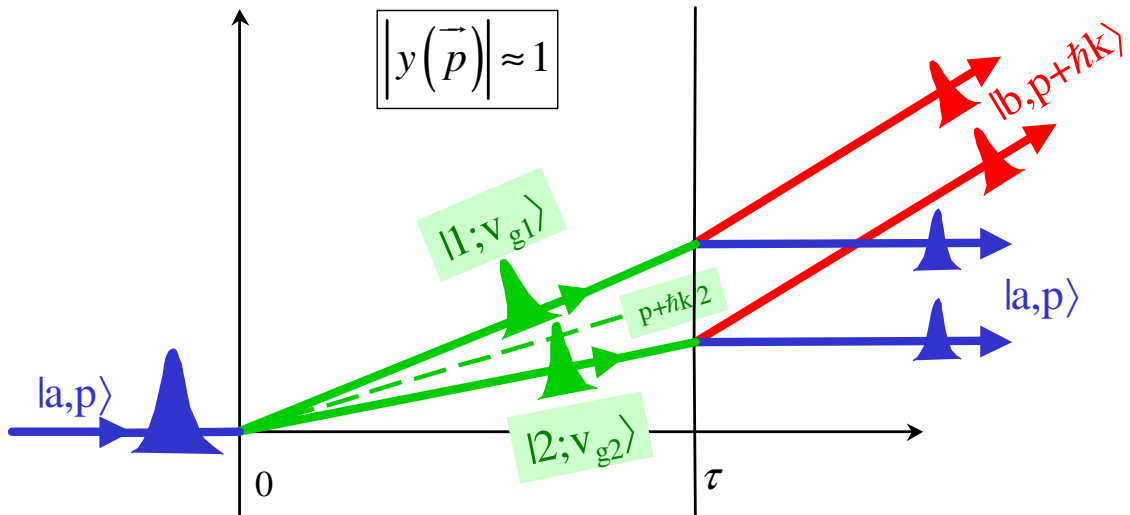


FIG. 3.21: Schéma des trajectoires correspondant aux deux vitesses de groupe du texte pour un paramètre d'inélasticité égal à 1. Lorsque le paquet d'ondes incident possède une largeur en impulsion suffisamment fine, ces trajectoires sont celles des centres des paquets d'ondes créés par la séparatrice.

Ces deux vitesses sont alors égales à :

$$\frac{\vec{p}}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \quad \text{lorsque} \quad |y(\vec{p})| \ll 1$$

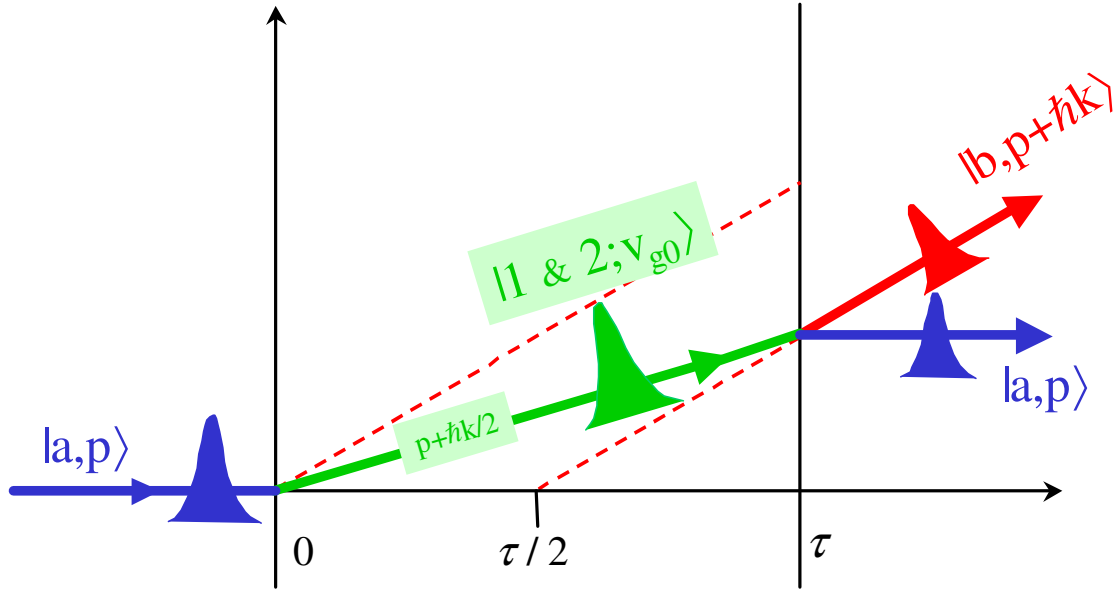


FIG. 3.22: Schéma identique au précédent mais pour un paramètre d'inélasticité proche de 0. Une seule vitesse de groupe est alors présente (effet Borrmann atomique).

ie quand le paramètre OB est proche de zéro (voir figure 3.22).

Au contraire, lorsque $|y(\vec{p})| \gg 1$, ie lorsque le désaccord généralisé est très grand, on retrouve les deux vitesses extrêmes

$$\vec{p}/m \quad \text{et} \quad \vec{p}/m + \hbar \vec{k}/m$$

(voir figure 3.23), mais alors la séparatrice ne remplit plus son rôle comme on le verra par la suite (plus de transition interne).

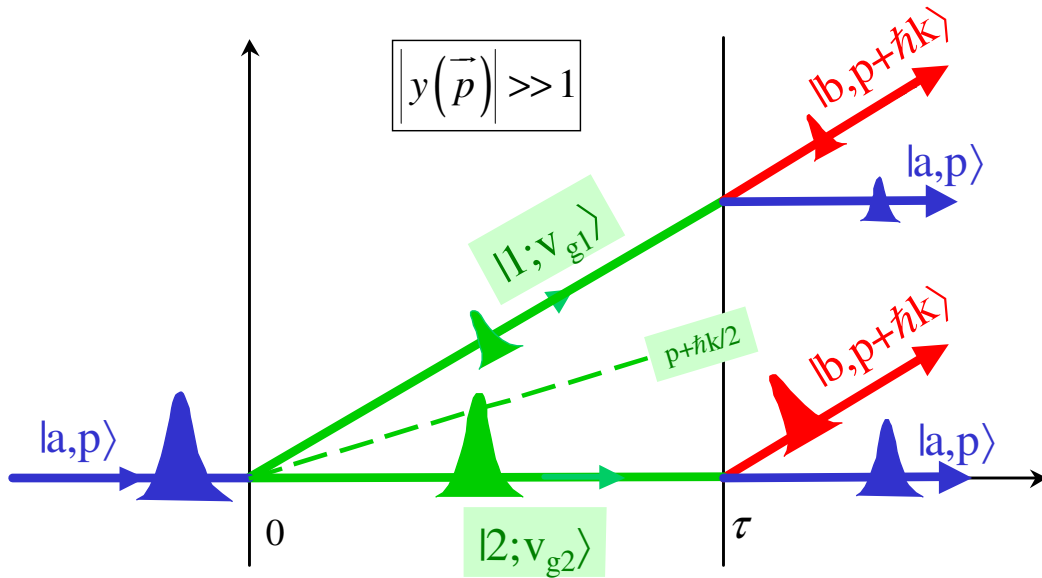


FIG. 3.23: Schéma identique aux précédents, mais pour un paramètre d'inélasticité très supérieur à 1.

2. On peut néanmoins relier les vitesses de groupe $\pm \vec{v}_\varepsilon(\vec{p})$ aux impulsions moyennes du système à deux niveaux.

En effet, la relation :

$$|\varphi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} |\varphi_{adiab}(t)\rangle$$

nous indique que lorsqu'un atome d'impulsion \vec{p} est dans l'état adiabatique *up*, ie :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base adiabatique} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ dans la base initiale (diabatique)}$$

alors il a une certaine probabilité d'être dans l'état initial *up* :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{1 + \Delta_l(\vec{p})/2\varepsilon(\vec{p})}{2}$$

et une certaine probabilité d'être dans l'état initial *down* :

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{1 - \Delta_l(\vec{p})/2\varepsilon(\vec{p})}{2}$$

Or selon les résultats du paragraphe 3.3.3, ces états initiaux correspondent à des états d'impulsion bien définie : $+\hbar \vec{k}/2$ pour l'état initial *up*, et $-\hbar \vec{k}/2$ pour l'état initial *down*. On peut ainsi connaître l'**impulsion la plus probable** de l'état adiabatique *up* :

$$\boxed{\left(+\hbar \vec{k}/2\right) \cdot \cos^2(\theta) + \left(-\hbar \vec{k}/2\right) \cdot \sin^2(\theta) = +\frac{\Delta_l(\vec{p})}{2\varepsilon(\vec{p})} \frac{\hbar \vec{k}}{2} = +m \vec{v}_\varepsilon(\vec{p})}$$

qui est égale comme on le voit à la vitesse de groupe (fois la masse) de cet état, qui a été calculée plus haut. On trouve de même pour l'impulsion la plus probable de l'état adiabatique *down* :

$$\boxed{\left(+\hbar \vec{k}/2\right) \cdot \sin^2(\theta) + \left(-\hbar \vec{k}/2\right) \cdot \cos^2(\theta) = -\frac{\Delta_l(\vec{p})}{2\varepsilon(\vec{p})} \frac{\hbar \vec{k}}{2} = -m \vec{v}_\varepsilon(\vec{p})}$$

qui n'est rien d'autre que la vitesse de groupe (fois la masse) de cet état.

On obtient ainsi le résultat suivant : *les impulsions les plus probables des états adiabatiques sont égales à leurs vitesses de groupe* (multipliées par la masse atomique).

3. Les deux vitesses sont différentes **lorsque le paramètre OB est non-nul** ($y_\pm(\vec{p}) \neq 0$, ou plutôt $y_\pm(\vec{p}_c) \neq 0$ comme on le verra par la suite) : dans ce cas, il y a **formation et propagation de deux paquets d'ondes atomiques distincts** dans la séparatrice.

On peut alors estimer l'ordre de grandeur de la **séparation physique** qui en résulte : au bout du temps τ , les deux centres des paquets d'ondes sont ainsi espacés de la quantité :

$$\boxed{\frac{y(\vec{p}_c)}{\sqrt{1+y(\vec{p}_c)^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \tau}$$

Pour les valeurs numériques des séparatrices laser usuelles ($\vec{k} \sim 10^7 m^{-1}$, $\tau \lesssim 10^{-4} s$, $m = m_{Cs}$), on obtient :

$$\frac{y(\vec{p}_c)}{\sqrt{1+y(\vec{p}_c)^2}} \frac{\hbar \|\vec{k}\|}{m} \tau \lesssim \frac{y(\vec{p}_c)}{\sqrt{1+y(\vec{p}_c)^2}} * 10^{-6} m$$

ie un décalage de l'ordre du micromètre au bout de 10^{-4} secondes (lorsque $|y(\vec{p}_c)| \sim 1$). Ce décalage est très faible comparé à la taille des paquets d'ondes atomiques (surtout après étalement naturel), mais il peut néanmoins être observable dans certains cas très particuliers.

En effet, considérons un paquet d'ondes atomiques *cohérent*, ou quasi-cohérent, ie tel que :

$$\sigma_r(t_0) \sigma_v(t_0) \sim \hbar/2m$$

alors au bout d'un temps τ , sa largeur en position aura subi l'étalement naturel pour devenir égale à :

$$\sigma_r(\tau) = \sqrt{\sigma_r(t_0)^2 + \sigma_v(t_0)^2 \tau^2} = \sqrt{\sigma_r(t_0)^2 + \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \sigma_r(t_0)^2}}$$

En supposant que l'action de la séparatrice ne modifie pas trop cette largeur, il faut donc

$$\text{comparer} \quad \sigma_r(\tau) \quad \text{à} \quad \frac{\hbar \|\vec{k}\|}{m} \tau y(\vec{p}_c) / \sqrt{1 + y(\vec{p}_c)^2}$$

Par exemple, pour avoir

$$\frac{|y(\vec{p}_c)|}{\sqrt{1 + y(\vec{p}_c)^2}} \frac{\hbar \|\vec{k}\|}{m} \tau \sim \frac{\hbar \|\vec{k}\|}{m} \tau \geq \sigma_r(\tau)$$

et sachant que $2 \|\vec{k}\| \sigma_r(t_0) > 1$, le temps d'interaction τ doit obéir à la condition suivante :

$$\tau \geq \frac{2m\sigma_r(t_0)^2}{\hbar \sqrt{\left[2 \|\vec{k}\| \sigma_r(t_0) \right]^2 - 1}}$$

Ce qui conduit, par exemple avec $\sigma_r(t_0) \sim 10^{-6}m$, à la condition :

$$\tau \gtrsim \frac{\sigma_r(t_0)}{\hbar \|\vec{k}\|/m} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

ce qui est parfaitement réalisable expérimentalement.

Ainsi, pour un paquet d'ondes atomique initialement cohérent (état quasi-classique), on peut **observer physiquement la séparation spatiale des paquets d'ondes à la sortie d'une séparatrice**. Evidemment, dans le cas de paquets d'ondes atomiques initiaux quelconques, et même s'il n'y a pas de séparation observable physiquement, le fait d'avoir deux vitesses de groupe distinctes a des conséquences importantes sur la modélisation des séparatrices et des interféromètres atomiques (voir partie ??).

-
4. Enfin, ces deux vitesses de groupe $\pm \vec{v}_\varepsilon(\vec{p})$ dépendent de \vec{p} , et par conséquent le milieu dans lequel évoluent les atomes est un **milieu dispersif** (vitesses de phase et de groupe différentes). Ainsi, les paquets d'ondes atomiques se propagent dans la séparatrice en se déformant (déformation de l'enveloppe en plus de l'étalement naturel). Ce point sera éclairci plus loin lorsque nous développerons $\varepsilon(\vec{p})$ en puissances de \vec{p} dans le cas de paquets d'ondes fins.

3.6.2 Expression et propriétés de la solution de Rabi

Dans le cas libre, la solution de l'équation $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$ s'écrit facilement (en représentation $|\vec{p}\rangle$) :

$$\varphi(\vec{p}, t) = \begin{pmatrix} S_{bb}(\vec{p}, t - t_0) & S_{ba}(\vec{p}, t - t_0) \\ S_{ab}(\vec{p}, t - t_0) & S_{aa}(\vec{p}, t - t_0) \end{pmatrix} \varphi(\vec{p}, t_0) \quad (3.97)$$

avec les expressions :

$$\begin{aligned} S_{bb}(\vec{p}, t - t_0) &= \cos[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] + i \cos[2\theta(\vec{p})] \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{ab}(\vec{p}, t - t_0) &= i \sin[2\theta(\vec{p})] \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{ba}(\vec{p}, t - t_0) &= i \sin[2\theta(\vec{p})] \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{aa}(\vec{p}, t - t_0) &= \cos[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] - i \cos[2\theta(\vec{p})] \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} S_{bb}(\vec{p}, t - t_0) &= \cos[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] + i \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{ab}(\vec{p}, t - t_0) &= i \frac{1}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{ba}(\vec{p}, t - t_0) &= i \frac{1}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ S_{aa}(\vec{p}, t - t_0) &= \cos[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] - i \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \sin[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \end{aligned} \quad (3.98)$$

en utilisant les relations :

$$\begin{aligned} \cos[2\theta(\vec{p})] &= \frac{\Delta_l(\vec{p})}{2\varepsilon(\vec{p})} = \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \\ \sin[2\theta(\vec{p})] &= \frac{\Omega_0}{\varepsilon(\vec{p})} = \frac{1}{\sqrt{1+y(\vec{p})^2}} \end{aligned}$$

On peut également exprimer la solution dans la **représentation initiale**, en utilisant simplement les résultats établis dans la partie 3.5 sur le schéma ttt. Selon la valeur de l'instant t_1 choisie, l'interaction instantanée équivalente sera différente, ainsi que l'expression de $|\Psi(t)\rangle$.

Par exemple, on a vu au paragraphe 3.5.1 que le schéma d'évolution avec $t_1 = t_0$ était *dissymétrique* (on privilégie en effet l'instant du début d'interaction laser), mais qu'il était *plus intuitif* (les trajectoires des centres de paquets d'ondes sont continues de t_0 à t). Inversement, le schéma *symétrique* avec $t_1 = t_{1/2}$ (l'instant central de l'impulsion laser) est plus simple à manier mais *moins intuitif* (à cause des translations en position et impulsion qu'il faut ajouter aux paquets d'ondes au temps effectif d'interaction t_1 , voir le paragraphe 3.5.2).

Dans le premier cas cependant, un instant privilégié apparaît dans l'expression de $|\Psi(t)\rangle$: c'est l'instant central de l'impulsion $t_{1/2}$. Il semble donc plus pertinent de se placer dans le cas $t_1 = t_{1/2}$, et c'est ce schéma d'évolution que nous considérerons par la suite.

Néanmoins, il est intéressant de considérer en détail le premier cas, afin d'illustrer l'importance de cet instant central. Quant à l'autre cas, il a déjà été étudié à la fin du paragraphe 3.5.3 : voir les expressions 3.86, 3.88, 3.90 et 3.92.

Dans le cas où $t_1 = t_0$ (premier schéma d'évolution), on obtient ainsi :

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} T_{bb}(\vec{p}_{op}, t) & e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t) \\ e^{i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ab}(\vec{p}_{op}, t) & T_{aa}(\vec{p}_{op}, t) \end{pmatrix} |\Psi(t_0)\rangle \quad (3.99)$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{bb}(\vec{p}, t) &: = e^{-i \left[\frac{E_b}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{bb} \left(\vec{p} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ T_{ab}(\vec{p}, t) &: = e^{-i \left[\frac{E_a}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} - \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{ab} \left(\vec{p} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ T_{ba}(\vec{p}, t) &: = e^{-i \left[\frac{E_b}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{ba} \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ T_{aa}(\vec{p}, t) &: = e^{-i \left[\frac{E_a}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} - \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{aa} \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \end{aligned}$$

Il est alors intéressant de réécrire $|\Psi(t)\rangle$ en faisant apparaître l'instant médian :

$$t_{1/2} := \frac{t + t_0}{2}$$

Chacun des termes donnant $|\Psi(t)\rangle$ devient alors :

$$\begin{aligned} T_{bb}(\vec{p}_{op}, t) &: = e^{-i\omega t_{1/2}} e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} [E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]} \\ &\quad e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)} S_{bb} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ e^{i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ab}(\vec{p}_{op}, t) &: = e^{i(\omega t_{1/2} - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} [E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]} \\ &\quad e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)} S_{ab} \left(\vec{p}_{op} - \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t) &: = e^{-i(\omega t_{1/2} - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} [E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]} \\ &\quad e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)} S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \\ T_{aa}(\vec{p}_{op}, t) &: = e^{i\omega t_{1/2}} e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} [E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]} \\ &\quad e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)} S_{aa} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) \end{aligned}$$

dont l'interprétation est simple : **tout se passe comme si l'interaction se produisait au temps milieu $t_{1/2}$, avec une trajectoire effective des atomes, de t à t_0 , le long des directions médianes $\vec{p} \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2}$.**

Plus précisément, on distingue **quatre phases** :

1. le paquet d'ondes représentant le ket initial $|\Psi(t_0)\rangle$ est modifié instantanément par les éléments de matrice S (plusieurs paquets d'ondes $w p_i$ peuvent être créés et l'impulsion centrale \vec{p}_{ci} de ceux-ci peut être différente de l'impulsion centrale \vec{p}_0 du paquet d'ondes incident),
2. puis chacun des paquets d'ondes obtenus suit une trajectoire médiane (suivant $\vec{p}_{ci} \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2}$) de t_0 à t ,

3. les atomes subissent alors une transition interne qui semble instantanée : avant l'instant $t_{1/2}$ ils sont dans leur état initial, puis ils subissent la transition interne au temps $t_{1/2}$ (avec changement ou non d'état), et ils restent dans ce nouvel état interne de $t_{1/2}$ à t ,
4. une phase laser vient finalement s'ajouter pour rendre compte d'une interaction effective au temps $t_{1/2}$.

Comme **exemple**, considérons le troisième terme $e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t)$:

$$e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t) \quad : \quad = e^{-i(\omega t_{1/2} - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar}[E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]} \\ e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)} S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

En dehors du facteur de phase $e^{-i\frac{\delta}{4}(t-t_0)}$ (commun à tous les termes), ce terme est constitué de :

1. un élément de matrice S :

$$S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

qui modifie, comme nous allons le voir, la structure de la composante inférieure du ket incident $|\Psi(t_0)\rangle$ (il y a ainsi **création de plusieurs paquets d'ondes** $wp_i(\vec{p}_{ci})$ centrés en \vec{p}_{ci}).

2. une **phase cinétique** (action classique) :

$$e^{-\frac{i}{2m\hbar} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)^2 (t-t_0)}$$

qui montre que chaque paquet d'ondes $wp_i(\vec{p}_{ci})$ évolue selon la direction $\vec{p}_{ci} + \frac{\hbar \vec{k}}{2}$.

3. une **phase interne** (énergie interne) :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}[E_b(t-t_{1/2}) + E_a(t_{1/2}-t_0)]}$$

équivalente à celle d'un atome qui serait dans l'état a de t_0 à $t_{1/2}$ puis dans l'état b de $t_{1/2}$ à t .

4. une **phase laser** prise au temps $t_{1/2}$:

$$e^{-i(\omega t_{1/2} - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)}$$

montrant l'équivalence avec une **interaction laser effective** concentrée en un seul instant : le **temps milieu** $t_{1/2}$.

Nous allons voir maintenant deux des propriétés les plus importantes et les plus utilisées de cette solution : le phénomène d'*oscillation de Rabi* et la *sélectivité en vitesse transverse* induite par l'interaction laser.

1. Oscillations de Rabi

L'écriture de la solution (3.98) en termes de fonctions sinusoïdales de $\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)$ montre que l'évolution temporelle des *populations atomiques* est sinusoïdale. De plus, du fait que les phénomènes de désexcitation spontanée sont négligés (voir partie 3.2), la somme des deux populations reste constante et égale à un, et par conséquent les courbes d'évolution de ces deux populations sont complémentaires.

On peut donc se servir de ces oscillations de populations (oscillations de Rabi) pour transférer une partie des atomes d'un état interne dans l'autre état. En jouant sur les paramètres du problème, et en particulier sur la durée d'interaction laser τ , on peut ainsi réaliser des **miroirs à atomes** (impulsions π ou lames π) pour lesquels le transfert d'un état à l'autre est total (100%), ou des **séparatrices semi-réfléchissantes** (impulsions $\pi/2$ ou lames $\pi/2$) pour lesquelles la moitié des atomes changent d'état (50%).

Enfin, lorsque $y(\vec{p}) \neq 0$, ie hors de la résonance généralisée, les préfacteurs dépendant de $y(\vec{p})$ dans (3.98) atténuent l'amplitude des transitions internes et diminuent ainsi l'efficacité des séparatrices.

Lorsque l'on parle d'oscillation de populations, on sous-entend que c'est entre les deux états diabatiques, ie les états initiaux. Dans la base adiabatique, il n'y a en effet pas d'oscillations, et les populations des états adiabatiques restent constantes et égales à un. Bien sûr, l'évolution des populations des états initiaux dépend de la *base* choisie, mais ne dépend pas de la *représentation* choisie (ie des diverses transformations unitaires conduisant à 3.94 par exemple).

Considérons donc la solution (3.97) avec, par exemple, pour fonction d'onde initiale :

$$\varphi(\vec{p}, t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(\vec{p}, t_0) \end{pmatrix}$$

représentant un paquet d'ondes atomique initial dans l'état fondamental.

A t_0 les populations de chaque composante " \vec{p} " (ondes planes) formant $a(\vec{p}, t_0)$ valent par conséquent :

$$\mathcal{P}_a(t_0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_b(t_0) = 1 - \mathcal{P}_a(t_0) = 0$$

et deviennent à l'instant t :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_b(\vec{p}, t) &= \frac{1}{1+y(\vec{p})^2} \sin^2[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \\ \mathcal{P}_a(\vec{p}, t) &= 1 - \frac{1}{1+y(\vec{p})^2} \sin^2[\varepsilon(\vec{p}) \cdot (t - t_0)] \end{aligned}$$

Pour les composantes " \vec{p} " telles que $y(\vec{p}) = 0$, on obtient ainsi des oscillations totales, ie qui varient entre 0 et 1. Pour les autres, l'amplitude des oscillations est réduite à $\frac{1}{1+y(\vec{p})^2} < 1$. Les courbes d'évolution des populations atomiques sont données dans ces deux cas sur la figure 3.24.

En choisissant $\varepsilon(\vec{p}) \cdot \tau = \pi/4$ ou $\varepsilon(\vec{p}) \cdot \tau = \pi/2$ dans le cas où $y(\vec{p}) = 0$, on obtient alors respectivement les lames $\pi/2$ et π .

La dénomination " $\pi/2$ " ou " π " a deux origines équivalentes : le mouvement du spin fictif et l'aire de l'impulsion crêteau.

En effet, on peut montrer facilement que, dans le cas libre avec une impulsion crêteau et un désaccord nul, le spin fictif associé au ket solution subit une rotation d'un angle égal à $2\varepsilon(\vec{p}) \cdot \tau = 2\Omega_0\tau$. Au bout du temps $\pi/2\Omega_0$ le vecteur de Bloch (spin fictif) aura donc tourné d'un angle π (tous les atomes auront ainsi changé d'état interne), alors qu'au bout du temps $\pi/4\Omega_0$, il n'aura tourné que d'un angle $\pi/2$ (et la moitié seulement des atomes aura changé d'état interne).

L'autre dénomination (équivalente) vient du fait que, pour une interaction π (ou $\pi/2$), l'intégrale temporelle de l'enveloppe de l'impulsion laser (ie l'aire sous la courbe $t \mapsto 2\Omega_0 F(t)$) est précisément égale à π (ou $\pi/2$).

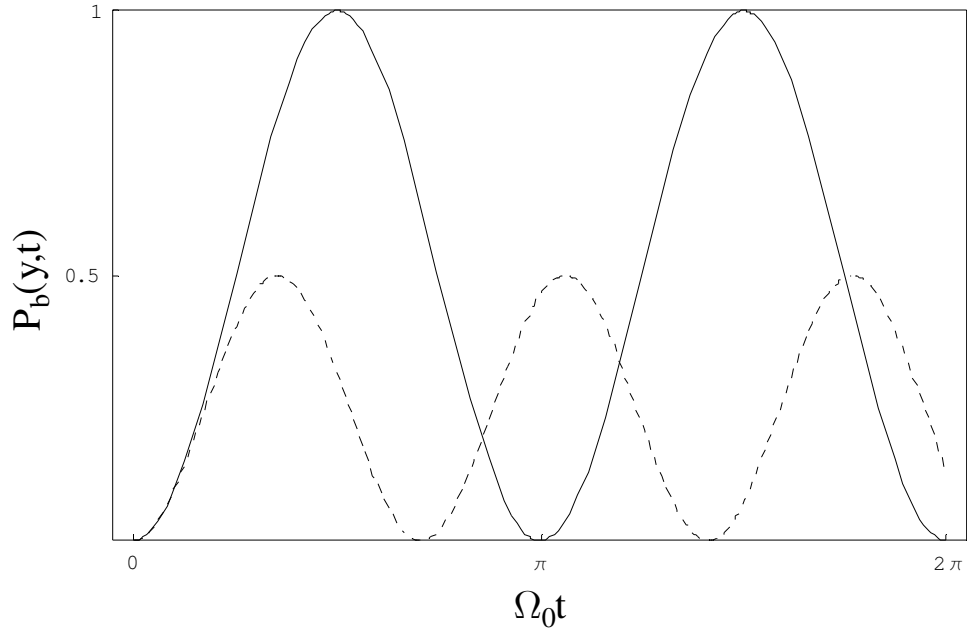


FIG. 3.24: Courbes d'évolution de la population atomique du niveau b , à résonance (—) et hors résonance (---) (ici pour $y(\vec{p}) = 1$)

Il convient de remarquer que, dans le cas où le désaccord généralisé n'est pas nul, c'est non seulement l'amplitude des oscillations qui est modifiée, mais aussi la **position temporelle des maxima**. Ainsi, **le fait d'être hors résonance diminue doublement l'efficacité des séparatrices** lorsque l'on ne modifie pas la durée d'interaction convenablement (ie en prenant $\varepsilon(\vec{p}) \cdot \tau = \pi/2$ pour une lame π par exemple au lieu de $\Omega_0 \tau = \pi/2$).

Dans la réalité, la fonction d'onde initiale $a(\vec{p}, t_0)$ possède une certaine largeur en impulsion. Ainsi, s'il y a résonance pour son impulsion centrale \vec{p}_0 , seules les composantes ayant une impulsion proche de \vec{p}_0 auront alors la même évolution interne, mais le transfert d'état interne des autres composantes sera altéré et une partie des atomes ne sera pas *séparée* comme prévu.

Selon les résultats du début de ce paragraphe, les lames π et $\pi/2$, dans le cas général, sont donc *a priori* définies par :

$$\begin{aligned} \text{lame } \pi & : \quad \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_{\pm}(p_{c\parallel})^2} = \pi/2 \\ \text{lame } \pi/2 & : \quad \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_{\pm}(p_{c\parallel})^2} = \pi/4 \end{aligned}$$

où l'expression de $y_{\pm}(p_{c\parallel})$ est donnée en (3.96), et où le signe + fait référence à un ket initial dans l'état fondamental (transition $a \rightarrow a$ ou b). Nous verrons cependant que ces relations doivent être corrigées dans le cas de paquets d'ondes dont la largeur en impulsion est grande.

2. Sélectivité en vitesse transverse

Une autre propriété très importante de la solution de Rabi tient au fait que les préfacteurs dans (3.98)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y(\vec{p})^2}} \quad \text{et} \quad \frac{y(\vec{p})}{\sqrt{1 + y(\vec{p})^2}}$$

dépendent de l'impulsion \vec{p} , et plus spécifiquement de la composante transverse de \vec{p} , ie celle suivant la direction du vecteur d'onde laser \vec{k} :

$$p_{\parallel} := \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{\|\vec{k}\|}$$

car $y(\vec{p}) = y(p_{\parallel}) = (\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m) / 2\Omega_0$.

Ainsi, si l'on trace les courbes

$$p_{\parallel} \mapsto S_{uv}(\vec{p} \pm \hbar \vec{k}/2, t - t_0) = S_{uv}(p_{\parallel} \pm \hbar k/2, t - t_0) \quad \text{ou} \quad p_{\parallel} \mapsto |S_{uv}(p_{\parallel} \pm \hbar k/2, t - t_0)|^2$$

(avec les éléments de matrice $S_{uv}(p_{\parallel}, t - t_0)$ exprimés plus haut, et avec $u, v = a$ ou b), on obtient des **filtres en impulsion** qui agissent sur les fonctions d'ondes initiales.

Par exemple, pour la transition $a \longrightarrow b$, on obtient la courbe :

$$\begin{aligned} p_{\parallel} \mapsto -iS_{ba}(p_{\parallel} + \hbar k/2, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{1 + y_+(p_{\parallel})^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(p_{\parallel})^2} \right] \\ &= \boxed{\Omega_0 \tau \cdot \text{sinc} \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(p_{\parallel})^2} \right]} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \boxed{y_+(\vec{p})} &= \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m - \hbar \vec{k}^2/2m}{2\Omega_0} \\ &= \frac{\omega - \omega_0 - kp_{\parallel}/m - \delta}{2\Omega_0} \end{aligned}$$

qui donne un filtre impulsif en **sinus cardinal**, dont la forme bien connue est tracée sur la figure 3.25.

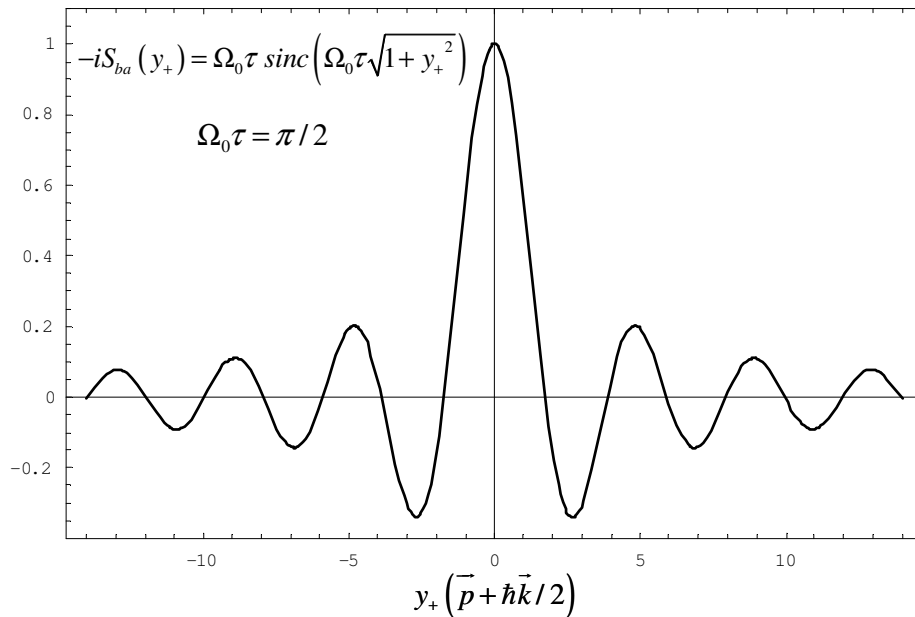


FIG. 3.25: Filtre impulsif en sinus cardinal pour une impulsion π .

Ce filtre en sinus cardinal a des caractéristiques importantes, parmi lesquelles :

- un **lobe central** d'amplitude $\sin(\Omega_0\tau)$, centré en

$$p_{s\parallel}/m := (\omega - \omega_0 - \delta)/k \quad (3.100)$$

et de largeur totale :

$$\Delta p_{\parallel}/m = \frac{4\Omega_0}{k} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\Omega_0\tau}\right)^2 - 1}$$

dont la valeur diminue lorsque τ augmente.

Ainsi dans le cas des lames π et $\pi/2$ définies précédemment, on obtient comme largeur du lobe central :

$$\begin{aligned} \text{lame } \pi & : \quad \Delta p_{\parallel}/m = \frac{4\Omega_0}{k} \sqrt{2\sqrt{1 + y_+ (p_{c\parallel})^2} - 1} \\ \text{lame } \pi/2 & : \quad \Delta p_{\parallel}/m = \frac{4\Omega_0}{k} \sqrt{4\sqrt{1 + y_+ (p_{c\parallel})^2} - 1} \end{aligned}$$

qui devient, lorsque la condition de résonance généralisée est satisfaite (ie $y_+ (p_{c\parallel}) = 0$) :

$$\begin{aligned} \text{lame } \pi & : \quad \Delta p_{\parallel}/m = \frac{4\Omega_0}{k} \\ \text{lame } \pi/2 & : \quad \Delta p_{\parallel}/m = \frac{4\Omega_0}{k} \sqrt{3} \end{aligned}$$

de l'ordre de $10^{-2} m.s^{-1}$ pour des valeurs expérimentales usuelles ($\Omega_0 \sim 10^5 s^{-1}$ et $\vec{k} \sim 10^7 m^{-1}$).

- des **noeuds** espacés de $\Delta p_{\parallel}/2m$ et des **lobes secondaires**, à valeurs positives ou négatives, dont l'amplitude décroît rapidement
- une **décroissance générale** avec la vitesse transverse p_{\parallel}/m .

Appliquons donc cette fonction filtre sur un paquet d'ondes atomique de forme Gaussienne. Par exemple, sur la figure 3.26 sont représentées les deux courbes initiales (le filtre en sinus cardinal et le paquet d'ondes Gaussien, en traits pointillés) et la courbe produit (solution du filtrage de la Gaussienne par le filtre en sinc, courbe en trait plein) dans le cas d'une impulsion π . Le paramètre d'inélasticité est non nul pour la porteuse ($y_{0+} = 2$), et la largeur de la Gaussienne initiale est égale à 3 (en unités y , ie : $\sigma_y = 3$).

La figure 3.27 est identique à la précédente, mais pour une impulsion $\pi/2$.

On remarque alors que :

- le filtre n'est pas centré sur $p_{0\parallel}$** (ie l'impulsion centrale transverse du paquet d'ondes incident) lorsque $y_{0+} := y_+(\vec{p}_0) \neq 0$, et par conséquent, **l'impulsion centrale de la fonction filtrée** (ie celle égale au produit du filtre en sinc par le paquet d'ondes initial) **n'est pas égale à $p_{0\parallel}$** (on obtient par exemple $y_c \sim 0,2$ pour l'impulsion π de la figure 3.26). Nous en verrons les conséquences plus loin.
- la largeur du filtre peut être inférieure à la largeur en impulsion du paquet d'ondes initial, il en résulte alors une **sélection en vitesse transverse** de ce paquet d'ondes, ie une diminution de sa largeur en p_{\parallel}/m .

Cette sélectivité en vitesse transverse est très intéressante en interférométrie (augmentation du contraste des franges), mais également et surtout dans le domaine du *refroidissement atomique*. En effet, l'utilisation de transition Raman à deux photons avec des vecteurs d'ondes laser opposés (impulsions *contra-propageantes*) permet de créer des *résonances noires sélectives en vitesse* (VSCPT [203, 204, 205]), et ainsi de refroidir les atomes en dessous de leur énergie de recul ($\Delta p_{\parallel} < \hbar k$). Une autre méthode utilise directement les séparatrices Raman dont on a parlé précédemment (ie avec impulsions *co-propageantes*) : en répétant plusieurs fois le cycle "transition Raman - pompage optique", elle permet de comprimer la distribution en vitesse des atomes jusqu'à des températures *sub-recul* [45]. Une revue de ces mécanismes est détaillée dans [206, 207, 42].

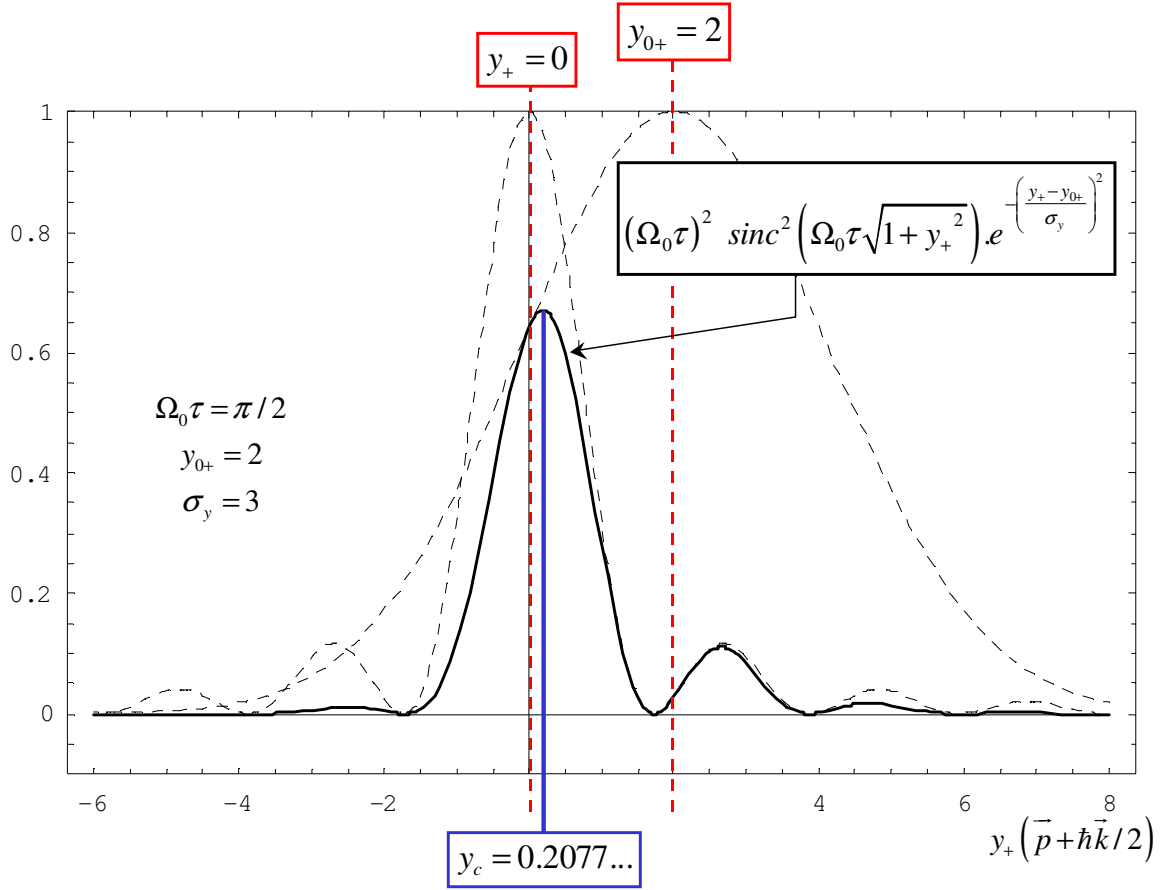


FIG. 3.26: Distribution en impulsion d'un paquet d'ondes atomique filtré par une séparatrice laser π (amplitude de transition $a \rightarrow b$). Les courbes en trait discontinu représentent les distributions *avant* filtrage (ie le filtre en sinus cardinal et la Gaussienne atomique) et la courbe en trait plein représente la distribution *après* filtrage (multiplication des deux courbes précédentes). Comme on peut le voir, celle-ci n'est pas centrée sur l'impulsion centrale initiale ($y_c \neq y_{0+}$).

Il est à remarquer également que cette sélectivité en vitesse ne vient pas du terme

$$\sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2} \right] / \sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$$

mais essentiellement du **préfacteur** $1/\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$, le sinus venant simplement d'une combinaison particulière des états adiabatiques. Cette remarque n'est plus valable pour des temps d'interaction τ longs (plus exactement lorsque $\tau \gtrsim \pi/2\Omega_0$, ie pour des lames " $\gtrsim \pi$ ").

- iii. la distribution en impulsion des atomes présente une structure en arches (les **lobes secondaires**) qui diminue l'efficacité des séparatrices.

En effet, si la largeur en impulsion du paquet d'ondes initial est suffisamment large pour englober un ou plusieurs de ces lobes secondaires, le paquet d'ondes filtré contiendra ces lobes et sera alors la somme de plusieurs paquets d'ondes impulsionnels dont les impulsions centrales ne seront plus en accord avec les conditions de résonance précédentes. Lorsque plusieurs séparatrices se succèdent (comme en interférométrie), ce phénomène diminue le nombre d'atomes *utiles* en sortie, et, par conséquent également le contraste des franges finales.

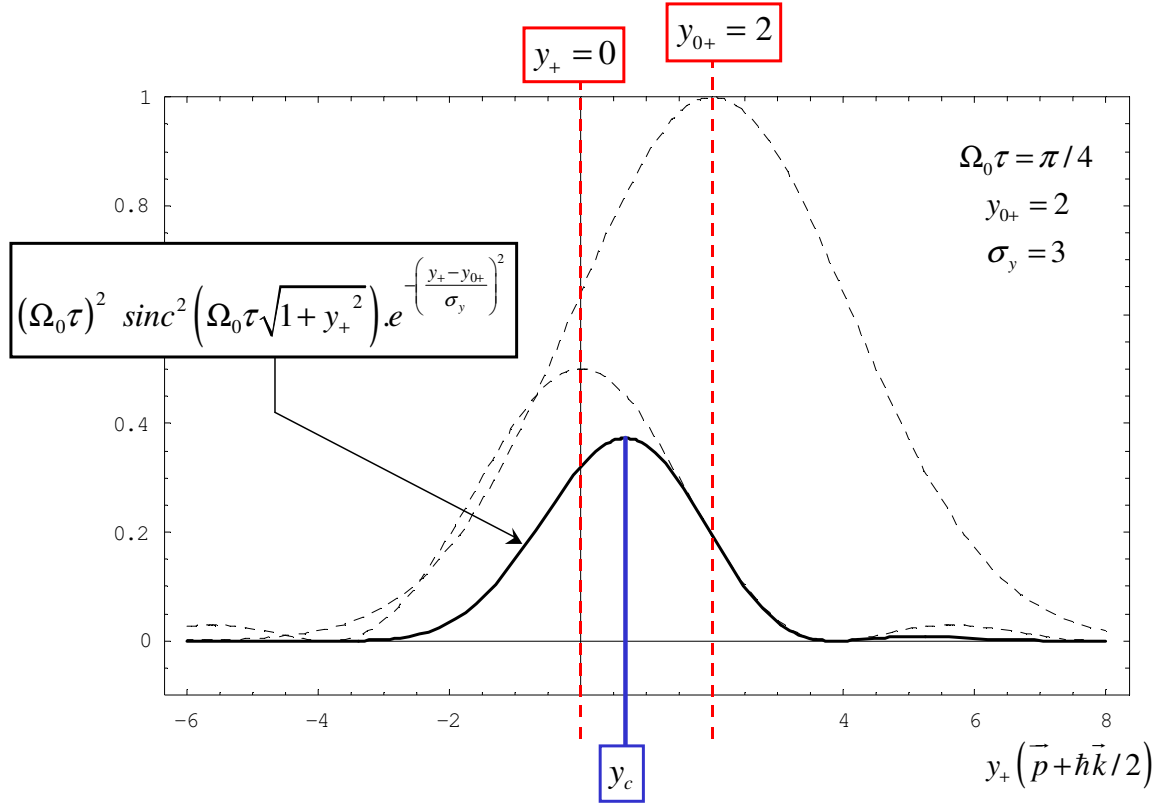


FIG. 3.27: Distribution en impulsion d'un paquet d'ondes atomique filtré par une séparatrice laser $\pi/2$ (amplitude de transition $a \rightarrow b$). Les courbes en trait discontinu représentent les distributions *avant* filtrage (ie le filtre en sinus cardinal et la Gaussienne atomique) et la courbe en trait plein représente la distribution *après* filtrage.

Lorsque le paquet d'ondes initial est dans l'état fondamental (état a), on obtient **deux transitions** : la transition **avec changement d'état interne** $a \mapsto b$ dont on vient de parler, et la transition **sans changement d'état interne** $a \mapsto a$ ⁵. Même si les deux transitions présentent des comportements similaires, elles ne sont pas liées par une simple relation de complémentarité et les propriétés de leur filtre en impulsion sont très différentes.

Le filtre impulsif de la transition $a \mapsto a$:

$$\begin{aligned}
 p_{\parallel} &\mapsto |S_{aa}(p_{\parallel} + \hbar k/2, \tau)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + y_+(p_{\parallel})^2} \sin^2 \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(p_{\parallel})^2} \right] \\
 &= \boxed{1 - \left(\Omega_0 \tau \cdot \text{sinc} \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(p_{\parallel})^2} \right] \right)^2}
 \end{aligned}$$

dont la courbe représentative est donnée sur la figure 3.28, présente en effet les caractéristiques suivantes :

- un trou dans la distribution - complémentaire du pic de la distribution correspondant à la transition $a \mapsto b$ - centré en $p_{s\parallel}$ (voir la relation 3.100), et dont l'amplitude peut atteindre 1 lorsque $\Omega_0 \tau = \pi/2$ (dans ce cas, la distribution est coupée en deux).
- des lobes secondaires (sous forme de pics asymétriques centrés sur les noeuds précédents) dont l'amplitude croît avec la vitesse transverse p_{\parallel}/m
- et des zones d'amplitude 1 pour $|p_{\parallel}/m|$ très grand.

⁵Par simplicité, nous employons le mot "transition" pour désigner une "amplitude de transition", même si cette dénomination n'est pas très judicieuse pour les amplitudes de transition sans changement d'état interne.

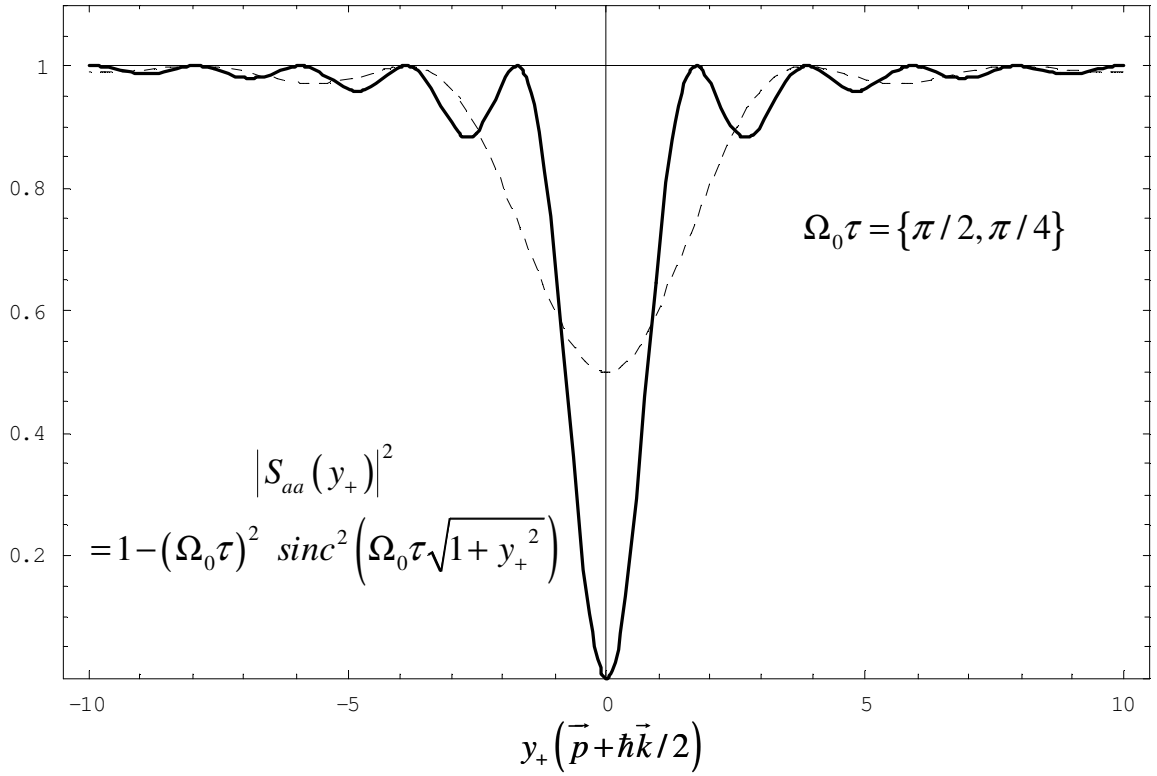


FIG. 3.28: Filtre impulsionnel de la transition $a \mapsto a$, pour une impulsion π (en trait continu) et pour une impulsion $\pi/2$ (en trait discontinu).

Comme précédemment, appliquons ce filtre particulier sur un paquet d'ondes atomique de forme Gaussienne. Pour une impulsion $\pi/2$, on obtient alors la courbe de la figure 3.29, sur laquelle sont représentées les deux courbes initiales (le filtre en $1 - \text{sinc}^2$ et le paquet d'ondes Gaussien, en traits pointillés) et la courbe produit (solution du filtrage de la Gaussienne par le filtre, en trait plein). Le paramètre d'inélasticité est non nul pour la porteuse ($y_{0+} = 2$), et la largeur de la Gaussienne initiale est égale à 5 (en unités y , ie : $\sigma_y = 5$).

La figure 3.30 est identique à la figure 3.29 mais pour une impulsion π .

Ce filtre n'est alors pas centré sur l'impulsion transverse initiale $p_{0\parallel}$. De plus, il y a maintenant trois zones d'impulsion (ou deux lorsque $\Omega_0\tau = \pi/2$) bien délimitées qui conduiront à la création d'autres paquets impulsionnels lorsque le paquet d'ondes incident aura une très grande largeur en impulsion. Il s'agit de la zone du trou central (de largeur $\sim \frac{4\Omega_0}{k} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_0\tau} - 1}$), et des deux zones de chaque côté du trou (pour $p_{\parallel} \lesssim -\frac{2\Omega_0}{k} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_0\tau} - 1}$ et pour $p_{\parallel} \gtrsim +\frac{2\Omega_0}{k} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_0\tau} - 1}$). La fonction filtrée sera ainsi doublement structurée : à la fois par les *pics secondaires* et par ces zones d'impulsion non-nulle.

Lorsque $\Omega_0\tau = \pi/2$ on n'aura alors, dans cette fonction filtrée, que deux lobes primaires présentant chacun des pics secondaires, ainsi qu'un troisième lobe primaire dans la zone du trou. Chacun de ces lobes (primaires et secondaires) induira l'apparition de plusieurs maxima d'impulsion, différents de $p_{s\parallel}$ ou $p_{0\parallel}$, qui conduiront alors à la création de plusieurs paquets d'ondes dont les impulsions centrales seront différentes de $p_{0\parallel}$ (voir figure 3.30).

L'étude de la sélectivité en vitesse des solutions de Rabi montre bien qu'il n'est pas évident de connaître l'état externe - l'impulsion centrale par exemple - des paquets d'ondes obtenus pendant et après le filtrage. De plus, nous allons voir que certaines de ces impulsions particulières sont liées aux vitesses de groupe des paquets d'ondes. La structuration en plusieurs paquets d'ondes impulsionnels étant d'autant plus marquée que la largeur en impulsion du paquet d'ondes initial est grande, nous allons par la suite commencer par prendre un paquet d'ondes initial fin, avant de considérer des largeurs impulsionnelles quelconques.

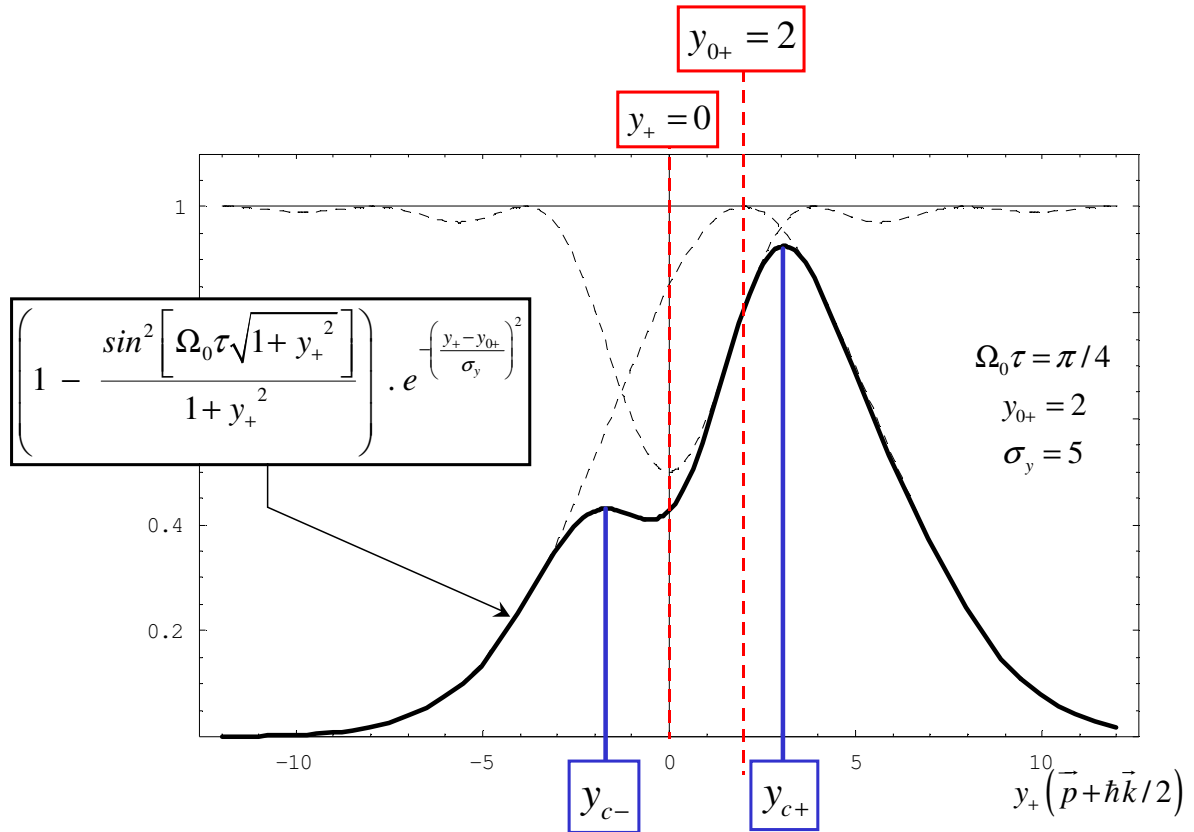


FIG. 3.29: Distribution en impulsion d'un paquet d'ondes atomique filtré par une séparatrice laser $\pi/2$ (amplitude de transition $a \rightarrow a$). Les courbes en trait discontinu représentent les distributions *avant* filtrage (ie le filtre laser et la Gaussienne atomique) et la courbe en trait plein représente la distribution *après* filtrage (multiplication des deux courbes précédentes). Comme on peut le voir, il y a formation de deux paquets d'ondes principaux centrés en y_{c+} et y_{c-} (ils ne sont pas centrés sur l'impulsion centrale initiale : $y_{c+} \neq y_{0+}$ et $y_{c-} = y_{0+}$).

Remarquons, pour finir, que le filtrage dû aux transitions $b \mapsto a$ et $b \mapsto b$ se traite avec les mêmes formules et propriétés que précédemment ⁶.

3.6.3 Séparation d'un paquet d'ondes atomique fin

Considérons un ket initial dans l'état fondamental

$$|\Psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |a(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (:= a(t_0) |a\rangle + 0 |b\rangle)$$

pour lequel la solution 3.99 s'écrit (schéma d'évolution avec $t_1 = t_0$, voir paragraphe 3.5.1 et plus haut) :

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t) |a(t_0)\rangle \\ T_{aa}(\vec{p}_{op}, t) |a(t_0)\rangle \end{pmatrix}$$

⁶ Il faut effectuer néanmoins le changement de paramètre OB : $y_+ \rightarrow y_-$ (voir la relation 3.96).

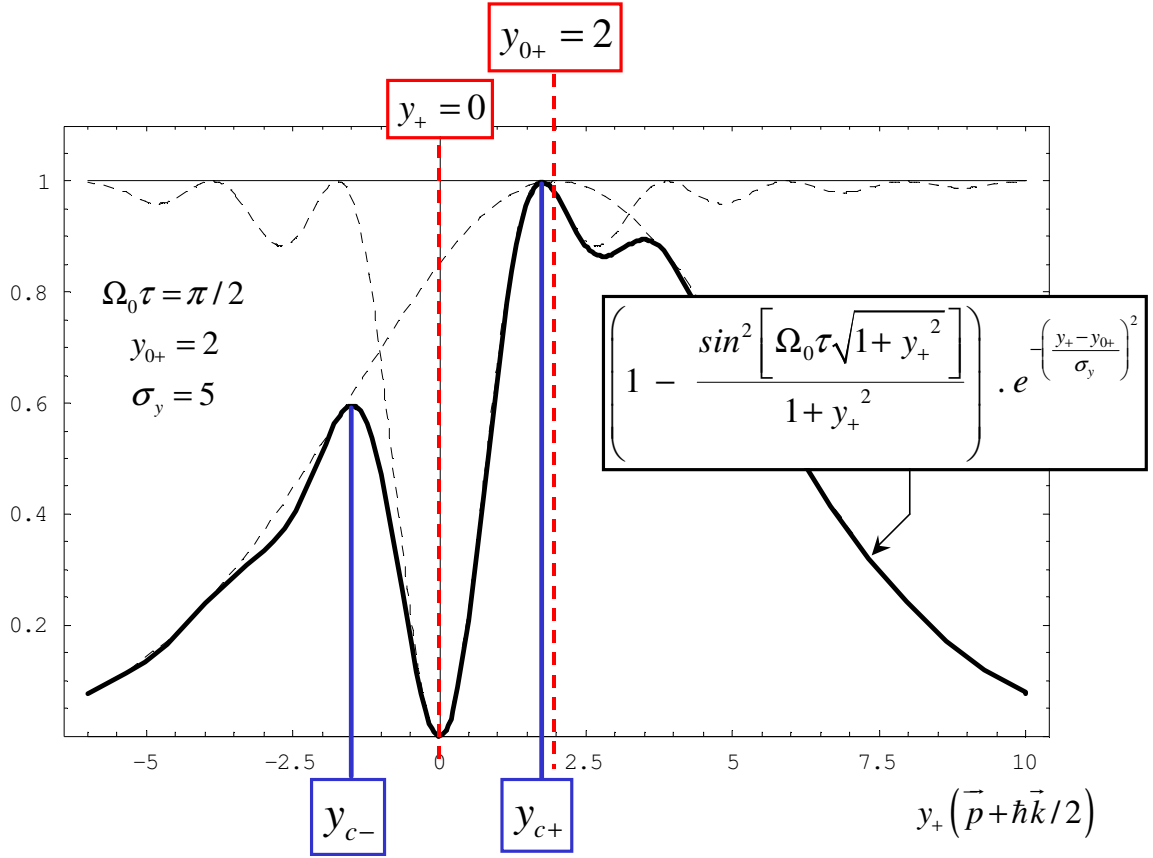


FIG. 3.30: Distribution en impulsion d'un paquet d'ondes atomique filtré par une séparatrice laser π (amplitude de transition $a \rightarrow a$). Les courbes en trait discontinu représentent les distributions *avant* filtrage (ie le filtre laser et la Gaussienne atomique) et la courbe en trait plein représente la distribution *après* filtrage.

avec :

$$T_{ba}(\vec{p}, t) : = e^{-i \left[\frac{E\vec{p}}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{ba} \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

$$T_{aa}(\vec{p}, t) : = e^{-i \left[\frac{Ea}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\delta}{2} - \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} S_{aa} \left(\vec{p} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

ou aussi (schéma d'évolution avec $t_1 = t_{1/2}$, voir paragraphe 3.5.3) :

$$|\Psi(t)\rangle = U_1(t, t_1) \begin{pmatrix} S_{1,ba} & U_1(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle \\ S_{1,aa} & U_1(t_1, t_0) |a(t_0)\rangle \end{pmatrix}$$

avec :

$$S_{1,ba} = e^{-i(\omega t_1 + \phi)} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}_{op}} S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

$$S_{1,aa} = e^{+\frac{i}{2}(\omega - \omega_0 - \delta)(t - t_0)} e^{-i \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_{op}}{2m} (t - t_0)} S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$$

Comme ce sont les mêmes matrices S qui interviennent dans les deux formulations, nous pouvons choisir l'une ou l'autre sans distinction. En fait, nous voulons étudier ici le **terme principal de la transition** $a \mapsto b$, ie finalement l'effet de la matrice $S_{ba} \left(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right)$ sur un paquet d'ondes atomique incident. Celui-ci sera donc égal à $\langle \vec{p} | a(t_0) \rangle := a(\vec{p}, t_0)$ pour la première formulation et à

$\langle \vec{p} | U_1(t_{1/2}, t_0) | a(t_0) \rangle$ pour la seconde. Néanmoins, pour simplifier les notations, on écrira génériquement $a(\vec{p}, t_0)$ pour le paquet d'ondes incident dans les deux cas.

De plus, l'élément de matrice $S_{ba}(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2})$ ne dépend de \vec{p}_{op} qu'à travers le produit scalaire $\vec{p}_{op} \cdot \vec{k}$, ie que $S_{ba}(\vec{p}_{op} + \frac{\hbar \vec{k}}{2})$ ne fait intervenir que la composante transverse de l'impulsion : p_{\parallel} .

Finalement, le terme à étudier s'écrit :

$$S_{ba}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2}) a(p_{\parallel}, t_0) = \frac{i}{\sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2} \right] a(p_{\parallel}, t_0)$$

où $a(p_{\parallel}, t_0)$ est la partie transverse du paquet d'ondes atomique (en représentation impulsion) associé au ket $|a(t_0)\rangle$.

Pour connaître l'effet de $S_{ba}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2})$ sur un paquet d'ondes quelconque, nous allons appliquer la méthode de la fonction génératrice, qui a déjà été utilisée à plusieurs reprises dans ce mémoire et qui est rappelée au paragraphe 2.3.2 : en connaissant l'effet de S_{ba} sur une Gaussienne (ie sur la fonction génératrice de la base des Hermites-Gauss), on connaît son effet sur chaque mode Hermito-Gaussien, et par conséquent sur toute fonction.

On considère donc le paquet d'ondes Gaussien suivant (on revient à une notation vectorielle plus générale pour \vec{p} même si c'est seulement la composante p_{\parallel} qui intervient dans les calculs) :

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, t_0) &= a(\vec{p}, t_0; r_0, p_0, \alpha_0) \\ &= e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_0)X_0Y_0^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0} \end{aligned}$$

avec $X_0Y_0^{-1}$ une matrice 3×3 complexe (voir paragraphe 2.3.3 pour la notation des paquets d'ondes atomiques; ici d'ailleurs on a simplifié cette expression en n'écrivant pas le facteur d'amplitude $1/\sqrt{\det(mY_0)}$ et en ajoutant une phase $\exp[i\vec{p}_0 \cdot \vec{r}_0/\hbar]$).

Comme nous recherchons les paquets d'ondes qui évoluent dans une séparatrice, il faut revenir aux états propres de l'interaction, ie les états adiabatiques, pour lesquels nous connaissons les vitesses de groupe. Ces deux état adiabatiques correspondent aux **deux exponentielles complexes du sinus** :

$$\sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right] = \frac{1}{2i} \left(e^{+i\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}} - e^{-i\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}} \right)$$

Décomposons donc ce sinus et étudions chacun des deux termes obtenus :

$$a_{\pm}(\vec{p}, t) := \pm \frac{1}{2\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}} e^{\pm i\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_0)X_0Y_0^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0}$$

Pour un paquet d'ondes dont la largeur en impulsion est suffisamment fine on peut alors développer ces termes autour de la valeur \vec{p}_0 . A l'aide de la formule A.12 de l'appendice A, on obtient ainsi au deuxième ordre en $\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)/2m\Omega_0$:

$$\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} = \sqrt{1+y_{0+}^2} - \frac{y_{0+}}{\sqrt{1+y_{0+}^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} + \frac{1}{2(1+y_{0+}^2)^{3/2}} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} \right)^2 + \dots$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_{0+}^2}} \left[1 + \frac{y_{0+}}{1+y_{0+}^2} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} + \frac{y_{0+}^2 - \frac{1}{2}}{(1+y_{0+}^2)^2} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} \right)^2 + \dots \right]$$

avec :

$$y_{0+} := y_+(\vec{p}_0)$$

$a_{\pm}(\vec{p}, t)$ s'écrit donc à cet ordre comme le produit de trois termes : un **préfacteur réel** au plus quadratique en $\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0}$, qui va essentiellement **modifier la forme** du paquet d'ondes $a(\vec{p}, t_0)$; un **facteur de phase** qui va ajouter un terme **dispersif** et **modifier la vitesse de groupe** de l'enveloppe de $a(\vec{p}, t_0)$, et le paquet d'ondes initial $a(\vec{p}, t_0)$.

On peut tout d'abord séparer l'effet des deux termes développés ci-avant en écrivant le préfacteur comme une combinaison linéaire de polynômes d'Hermite \mathcal{H}_n (afin de l'exprimer dans la base de fonctions utilisée tout au long de ce mémoire) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_+(\vec{p})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \left[\left(1 + \frac{y_{0+}^2 - \frac{1}{2}}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \right) \mathcal{H}_0 - \frac{y_{0+}}{2(1 + y_{0+}^2)} \mathcal{H}_1 \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} \right) + \frac{y_{0+}^2 - \frac{1}{2}}{4(1 + y_{0+}^2)^2} \mathcal{H}_2 \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} \right) + \dots \right]$$

et en étudiant simplement les paquets d'ondes restants :

$$\alpha_{\pm}(\vec{p}, t) := e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \left[X_0 Y_0^{-1} \mp \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right] (\vec{p} - \vec{p}_0)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \left[\vec{r}_0 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]}$$

où on a posé :

$$\vec{\delta} := \frac{\hbar \vec{k} \cdot \widetilde{\vec{k}}}{2m} = \frac{\hbar}{2m} \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 \end{pmatrix}$$

qui est la **matrice complémentaire du terme de recul** $\delta = \hbar \vec{k} \cdot \widetilde{\vec{k}} / 2m = \hbar k^2 / 2m$, appelée aussi "matrice de recul".

Bilan : ces deux paquets d'ondes $\alpha_{\pm}(\vec{p}, t)$ ont donc \vec{p}_0 comme impulsion centrale, $\vec{r}_0 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} (t - t_0)$ comme positions centrales, et $X_0 Y_0^{-1} \pm \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \vec{\delta} (t - t_0) / \Omega_0$ comme matrices des largeurs en impulsion.

On retrouve ainsi le résultat du paragraphe précédent, à savoir que **deux paquets d'ondes** prennent naissance dans la séparatrice avec comme vitesses de groupe :

$$\pm \vec{v}_{g0} \quad \text{avec :} \quad \vec{v}_{g0} := \vec{v}_{\varepsilon}(\vec{p}_0) = \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$$

L'expression de $\alpha_{\pm}(\vec{p}, t)$ montre également que ces paquets d'ondes subissent une **dispersion supplémentaire**, et qu'ils **s'étalent différemment** avec le temps : ainsi $\alpha_+(\vec{p}, t)$ s'étale plus rapidement que la normale (ie que l'étalement naturel) et $\alpha_-(\vec{p}, t)$ moins rapidement.

Cet effet apparaît plus clairement dans la représentation initiale.

En effet, dans celle-ci, la composante supérieure de $\langle \vec{p} | \Psi(t) \rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p} | e^{-i(\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_{op} + \phi)} T_{ba}(\vec{p}_{op}, t) | a(t_0) \rangle_{\pm} \\ : &= \pm e^{-i(\omega t_0 + \phi)} e^{-i \left[\frac{E_b}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k})^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \hbar \vec{k})}{2m} + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{2} \right] (t - t_0)} \\ & \cdot \frac{e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(\vec{p})^2}}}{2 \sqrt{1 + y_+(\vec{p})^2}} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \hbar \vec{k} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \hbar \vec{k} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} (\vec{p} - \hbar \vec{k} - \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0} \end{aligned}$$

ie :

$$\begin{aligned} & \pm \frac{e^{-i(\omega t_0 + \phi + \varpi_{\pm} \tau)}}{2 \sqrt{1 + y_+(\vec{p})^2}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\vec{p} - (\vec{p}_0 + \hbar \vec{k})) \cdot \left(\vec{r}_0 + \left[\vec{p}_0/m + \left(1 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \right) \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] \tau \right) \right] \\ & * \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - (\vec{p}_0 + \hbar \vec{k})) \left[X_0 Y_0^{-1} + \left(1 \mp \frac{\vec{\delta}/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \right) \tau \right] (\vec{p} - (\vec{p}_0 + \hbar \vec{k})) + \dots \right] \end{aligned}$$

où on a introduit la phase $\varpi_{\pm} * \tau$ avec :

$$\varpi_{\pm} := \frac{E_b}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{p}_0^2}{2m} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_0}{2m} + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{2} \mp \Omega_0 \sqrt{1 + y_{0+}^2}$$

Pour la transition $a \mapsto b$, les caractéristiques des paquets d'ondes solutions sont alors :

impulsion centrale	: $\vec{p}_0 + \hbar \vec{k}$
vitesses de groupe	: $\vec{p}_0/m + \left(1 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \right) \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$
largeurs en impulsion	: $X_0 Y_0^{-1} + \left(1 \mp \frac{\vec{\delta}/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \right) \tau$

Les matrices des largeurs en impulsion sont ainsi constituées de trois termes :

$$\boxed{X_0 Y_0^{-1}} + \boxed{\tau} \quad \boxed{\mp \frac{\vec{\delta}/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \tau}$$

ie :

largeurs initiales + **étalement naturel** + **dispersion supplémentaire**

Suivant la direction de \vec{k} on obtient donc deux étalements différents : $1 + \frac{\delta/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}}$ (plus important que l'étalement naturel), et $1 - \frac{\delta/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}}$ (plus faible au contraire). Dans certaines conditions, on peut ainsi **même supprimer l'étalement** d'un des deux paquets d'ondes, par exemple lorsque :

$$\frac{\delta/\Omega_0}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} = 1$$

ie lorsque $\Omega_0 = \delta/2$ pour $y_{0+} = 0$.

Il est à remarquer que, **quel que soit la valeur de y_{0+} , il y a structuration en deux paquets d'ondes distincts.**

En effet, lorsque $y_{0+} = 0$, les deux paquets d'ondes ont la même vitesse de groupe $\vec{p}_0/m + \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$ (effet Borrmann atomique), mais pas la même largeur en impulsion :

$$X_0 Y_0^{-1} + \left(1 \mp \frac{\vec{\delta}}{2\Omega_0}\right) \tau$$

Inversement, lorsque $|y_{0+}| \gg 1$, ces deux paquets d'ondes ont même largeur en impulsion ($= X_0 Y_0^{-1} + \tau$), mais ont des vitesses de groupe très différentes :

$$\vec{p}_0/m \quad \text{ou} \quad \left(\vec{p}_0 + \hbar \vec{k}\right)/m$$

Dans ce cas cependant, la séparatrice ne joue plus son rôle car les taux de transition (oscillations de Rabi) tendent vers zéro (voir paragraphe précédent).

Le **préfacteur** $1/\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ intervient également dans la modification des caractéristiques du paquet d'ondes atomique incident. On peut l'écrire, comme plus haut, sous la forme d'une somme de polynômes d'Hermite, mais son effet sur les vitesses de groupe et sur les largeurs en impulsion n'est pas explicite. Il est alors intéressant d'écrire le début du développement de $1/\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ **sous forme d'une fonction Gaussienne**. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}} \\ = & \frac{1}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \exp \left[\frac{y_{0+}}{1 + y_{0+}^2} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0} + \frac{1}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) \left(\frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0^2} \right) (\vec{p} - \vec{p}_0) + \dots \right] \end{aligned}$$

qui conduit à :

$$\begin{aligned} a_{\pm}(\vec{p}, t) = & \pm \frac{e^{\pm i\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_{0+}^2}}}{2\sqrt{1 + y_{0+}^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \left[\vec{r}_0 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right] + \frac{y_{0+}}{1 + y_{0+}^2} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{2m\Omega_0}} \\ & e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \left[X_0 Y_0^{-1} \mp \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0} \tau + i \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0^2} \right] (\vec{p} - \vec{p}_0) + \dots} \end{aligned}$$

On peut alors calculer les position et impulsion centrales de ces paquets d'ondes (attention, nous ne sommes pas dans la représentation initiale) :

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{p}_c} &= \vec{p}_0 - \left(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}) + \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0^2} \right)^{-1} \frac{y_{0+}}{1 + y_{0+}^2} \hbar \vec{k} / \Omega_0 \\ \boxed{\vec{r}_{c\pm}} &= \vec{r}_0 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau + \left(\text{Re}(X_0 Y_0^{-1}) \mp \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0} \tau / \Omega_0 \right) \cdot (\vec{p}_c - \vec{p}_0) \end{aligned}$$

pour réécrire $a_{\pm}(\vec{p}, t)$ avec ses paramètres centraux :

$$\begin{aligned} a_{\pm}(\vec{p}, t) = & \pm \frac{e^{i\Phi_{\pm}}}{2\sqrt{1 + y_{0+}^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_c) \cdot \vec{r}_{c\pm}} \\ & e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_c) \cdot \left[X_0 Y_0^{-1} \mp \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0} \tau + i \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0^2} \right] (\vec{p} - \vec{p}_c) + \dots} \end{aligned}$$

où :

$$\boxed{\Phi_{\pm}} : = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_{0+}^2} - \frac{y_{0+}^2}{4(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}) + \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\delta} / \Omega_0^2 \right)^{-1} \cdot \left(\text{Re}(X_0 Y_0^{-1}) \mp \frac{1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\delta} \tau / \Omega_0 \right) \cdot \left(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}) + \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\delta} / \Omega_0^2 \right)^{-1} \vec{k} / \Omega_0^2 \mp \frac{y_{0+}^2}{2(1 + y_{0+}^2)^{3/2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}) + \frac{y_{0+}^2 - 1}{2(1 + y_{0+}^2)^2} \frac{\vec{\delta}}{\delta} / \Omega_0^2 \right)^{-1} \vec{k} \tau / \Omega_0$$

De ces expressions compliquées nous pouvons tirer des conclusions importantes et très utiles pour l'étude de l'effet des séparatrices sur des paquets d'ondes atomiques à grande largeur en impulsion :

- (a) le **préfacteur** $1/\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ **modifie les paramètres des paquets d'ondes solutions** (positions et impulsion centrales, largeurs en position et en impulsion, vitesses de groupe)
- (b) les nouveaux **paramètres dépendent de la matrice** $X_0 Y_0^{-1}$, ie de la matrice des largeurs dans l'espace des phases du paquet d'ondes initial $a(\vec{p}, t_0)$
- (c) **l'impulsion centrale** \vec{p}_0 **est modifiée en** \vec{p}_c dont la valeur - selon la direction \vec{k} - est comprise entre $p_{0\parallel}$ et $p_{s\parallel}$, avec :

$$\begin{aligned} p_{0\parallel} & : = \vec{p}_0 \cdot \vec{k} / k \\ p_{s\parallel} & : = \frac{\omega - \omega_0 - \delta}{k} \\ k & : = \|\vec{k}\| \end{aligned}$$

En effet, du fait que le paquet d'ondes initial considéré est supposé très fin en impulsion (d'où la condition $\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) / 2m\Omega_0 \ll 1$), le terme $\vec{\delta} / \Omega_0^2$ est négligeable par rapport au terme $\text{Im}(X_0 Y_0^{-1})$ et on obtient :

$$\vec{p}_c \simeq \vec{p}_0 - \text{Im}(X_0 Y_0^{-1})^{-1} \frac{y_{0+}}{1 + y_{0+}^2} \hbar \vec{k} / \Omega_0$$

ou plutôt :

$$p_{c\parallel} \simeq p_{0\parallel} - \vec{k} \cdot \text{Im}(X_0 Y_0^{-1})^{-1} \cdot \vec{k} \frac{y_{0+}}{1 + y_{0+}^2} \frac{\hbar}{k\Omega_0}$$

Or $\vec{k} \cdot \text{Im}(X_0 Y_0^{-1})^{-1} \cdot \vec{k}$ est négatif (distribution en impulsion bornée), et le paramètre d'inélasticité y_{0+} peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} y_{0+} & = \frac{\omega - \omega_0 - kp_{0\parallel} / m - \delta}{2\Omega_0} \\ & = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{0\parallel})}{2m\Omega_0} \end{aligned}$$

par conséquent, $p_{c\parallel} - p_{0\parallel}$ est du signe de $p_{s\parallel} - p_{0\parallel}$, et ainsi $p_{c\parallel}$ est comprise entre $p_{0\parallel}$ et $p_{s\parallel}$.

- (d) **Pour un paquet d'ondes infiniment fin** (onde quasi-plane), on retrouve les impulsion et position centrales précédentes : $\vec{p}_c = \vec{p}_0$ et $\vec{r}_{c\pm} = \vec{r}_0 \pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau$. Dans ce cas, **il y a encore deux vitesses de groupe différentes** :

$$\pm \frac{y_{0+}}{\sqrt{1 + y_{0+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$$

qui s'annulent pour $y_{0+} = 0$ (effet Borrmann atomique), mais dont il faut tenir compte lorsque $y_{0+} \neq 0$. Cette remarque importante montre qu'**une approximation semi-classique consistant à négliger l'aspect opératoire de \vec{p}_{op} lors de la résolution de l'équation (3.94) n'est pas valable pour $y_{0+} \neq 0$** (il ne suffit donc pas de supposer que la largeur en impulsion du paquet d'ondes atomique incident est très fine pour utiliser cette approximation semi-classique).

- (e) La remarque précédente nous indique qu'écrire le préfacteur $1/\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ comme une combinaison linéaire d'Hermite-Gauss est non-seulement plus simple mais permet aussi de séparer clairement les effets de la séparatrice sur l'amplitude atomique (sélection en vitesse) des effets sur la phase et les vitesses de groupe.

Nous allons voir maintenant comment traiter le cas des paquets d'ondes à grande largeur en impulsion.

3.6.4 Paquet d'ondes atomique quelconque

On a vu, lors de l'étude de la sélectivité en vitesse transverse que la distribution en impulsion du paquet d'ondes solution était structurée en plusieurs paquets d'ondes impulsionsnels $wp_i(\vec{r}_{0i}, \vec{p}_{0i})$ (un lobe central et des lobes (ou pics) secondaires). Par exemple, dans le cas d'une transition $a \longrightarrow b$, et pour un paquet d'ondes incident Gaussien

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, t_0) &= a(\vec{p}, t_0; r_0, p_0, X_0 Y_0^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(m Y_0)}} \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_0 \right] \end{aligned}$$

de largeur en impulsion quelconque, on obtient la distribution en impulsion de la figure 3.31, où l'on a tracé la courbe :

$$p_{\parallel} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2} \right] u(y_+, t_0)$$

pour une impulsion π , avec $u(y_+, t_0)$ le terme d'amplitude de $a(p_{\parallel}, t_0)$:

$$u(y_+, t_0) := e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_{0+} - y_+}{\sigma_y} \right)^2}$$

exprimé en fonction de la largeur en impulsion (en unités "y") :

$$\sigma_y := \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel}}}$$

et du paramètre d'inélasticité évalué en l'impulsion centrale du paquet d'ondes incident :

$$y_{0+} := y_+(p_{0\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - kp_{0\parallel}/m - \delta}{2\Omega_0}$$

Notation : Par simplicité, nous ne ferons plus apparaître les signes $+$ ou $-$ dans l'expression du paramètre d'inélasticité y_{\pm} .

Ceux-ci sont en effet censés rappeler que ce paramètre d'inélasticité possède une expression différente selon que l'on considère un paquet d'ondes initial dans l'état fondamental a (conduisant aux transitions $a \longrightarrow a$ et $a \longrightarrow b$) ou dans l'état excité b (conduisant aux transitions $b \longrightarrow a$ et $b \longrightarrow b$).

Par la suite, nous considérerons uniquement des transitions du type $a \longrightarrow a$ et $a \longrightarrow b$ (les calculs pour les deux autres types de transition étant identiques à celles-ci, au changement $y_+ \longrightarrow y_-$ près), et l'indice $+$ dans y_{0+} ne sera donc pas nécessaire :

$$y_{0+} \longrightarrow y_0 := \frac{\omega - \omega_0 - kp_{0\parallel}/m - \delta}{2\Omega_0}$$

Cela évitera toute confusion entre les paramètres $y_{0\pm}$ et $y_{c\pm}$, qui n'ont pas du tout le même sens, comme on va le voir ci-après (les signes \pm dans $y_{c\pm}$ font en effet référence aux deux paquets d'ondes principaux prenant naissance dans la séparatrice).

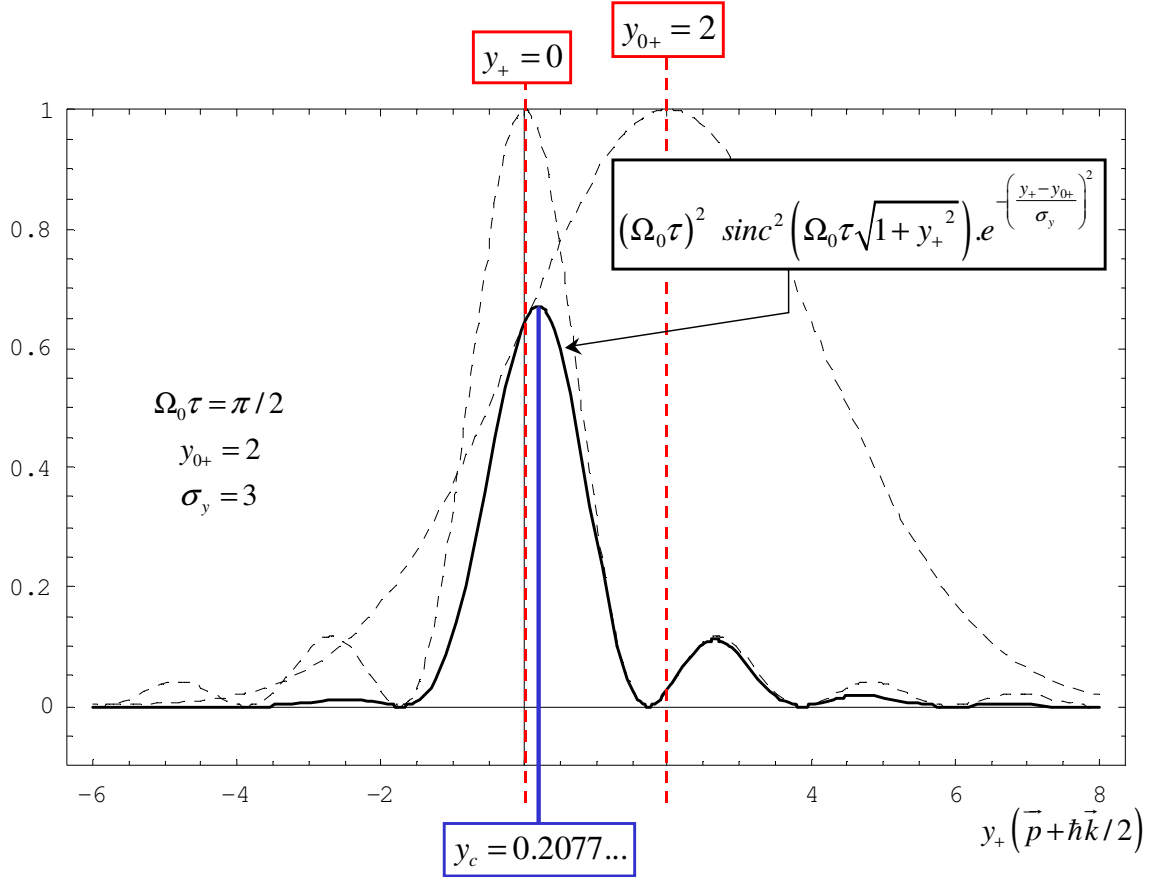


FIG. 3.31: Distribution en impulsion d'un paquet d'ondes atomique filtré par une séparatrice laser π (amplitude de transition $a \longrightarrow b$). Les courbes en trait discontinu représentent les distributions *avant* filtrage (ie le filtre en sinus cardinal et la Gaussienne atomique) et la courbe en trait plein représente la distribution *après* filtrage (multiplication des deux courbes précédentes). On voit clairement la structuration du paquet d'ondes initial en un paquet d'ondes central, auquel s'ajoutent des paquets d'ondes secondaires, correspondant aux lobes secondaires de la fonction sinus cardinal.

De cette figure (et des autres données au paragraphe 3.6.2), on peut alors extraire les conclusions suivantes : lorsque $y_0 \neq 0$, il y a structuration du paquet d'ondes incident en plusieurs paquets d'ondes (un ou deux paquets principaux, et des paquets secondaires correspondant aux lobes secondaires de la fonction sinus cardinal) dont les impulsions centrales sont différentes de l'impulsion initiale ($y_c \neq y_0$ pour la transition $a \longrightarrow b$ et $y_{c\pm} \neq y_0$ pour la transition $a \longrightarrow a$).

Par conséquent, si $y_0 \neq 0$, la composante impulsionnelle qui sera la plus intense en sortie de la séparatrice n'est pas la composante $|\vec{p}_0\rangle$ (ie la porteuse initiale), mais la (ou les) composante(s) $|\vec{p}_c\rangle$ ($|\vec{p}_{c\pm}\rangle$). Autrement dit, c'est la partie du paquet d'ondes incident qui est centrée en \vec{p}_c qui sera "séparée" le plus efficacement lorsque $y_0 \neq 0$. Dans ce cas, il apparaît plus pertinent de considérer le

paramètre d'inélasticité pour la composante centrale utile :

$$y_c = y(\vec{p}_c) = y(p_{c\parallel})$$

plutôt que celui correspondant à l'impulsion centrale initiale $y_0 = y(\vec{p}_0)$.

La définition des lames π et $\pi/2$ dans ce cas est légèrement différente de celle vue au paragraphe 3.6.2.

En effet, lorsque $y_0 \neq 0$:

$$\omega - \omega_0 - kp_{0\parallel}/m - \delta \neq 0$$

et que l'on ne peut pas agir sur ω ou $p_{0\parallel}$, il est important de savoir comment optimiser l'efficacité des lames π et $\pi/2$ en jouant sur le paramètre τ , ie la durée d'interaction laser. Par ailleurs, on a déjà vu au paragraphe 3.6.2 comment les relations de définition de ces lames pouvaient tenir compte du fait que $y_0 \neq 0$. On obtenait alors :

$$\begin{aligned} \text{lame } \pi & : \quad \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_0^2} = \pi/2 \\ \text{lame } \pi/2 & : \quad \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_0^2} = \pi/4 \end{aligned}$$

Cependant, ces relations supposaient implicitement que le paquet d'ondes incident avait une très faible largeur en impulsion (voir le paragraphe précédent) ou que sa structure n'était presque pas modifiée par la séparatrice. Nous venons de voir que ce n'est pas le cas, et que, dans le cas général, il vallait mieux considérer la partie centrée en \vec{p}_c du paquet d'ondes incident, ie la partie de sa distribution en impulsion qui est utile.

Cette impulsion centrale \vec{p}_c peut alors être obtenue de plusieurs façons (numériquement ou en l'approchant par l'impulsion correspondant au maximum de la distribution filtrée, voir l'appendice F), et elle dépend principalement du paramètre d'inélasticité initial y_0 et de la largeur en impulsion du paquet d'ondes initial (ie de σ_y en "unités y "). En première approximation, elle dépend donc explicitement de Ω_0 , la fréquence de Rabi effective, mais pas de τ , la durée d'interaction laser.

A Ω_0 fixé (ie à intensité laser fixée) et lorsque $y_0 \neq 0$, on peut donc déterminer la durée d'interaction laser conduisant à une séparation atomique optimale. Cette durée τ_c est alors définie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{lame } \pi & : \quad \Omega_0 \tau_c \sqrt{1 + y_c^2} = \pi/2 \\ \text{lame } \pi/2 & : \quad \Omega_0 \tau_c \sqrt{1 + y_c^2} = \pi/4 \end{aligned}$$

Par exemple, pour la figure 3.31, on obtient une durée d'interaction optimale plus courte que celles obtenue par la relation simplifiée $\Omega_0 \tau = \pi/2$, mais plus longue que celle obtenue par la relation $\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_0^2} = \pi/2$:

$$\frac{\pi}{2\Omega_0 \sqrt{1 + y_0^2}} < \tau_c < \frac{\pi}{2\Omega_0}$$

L'élément principal à déterminer en premier est donc cette (ou ces) impulsion(s) centrale(s) \vec{p}_c ($\vec{p}_{c\pm}$). Comme on l'a déjà dit, cette recherche est **détaillée dans l'appendice F**.

Dans cet appendice, on cherche en fait à connaître l'ensemble des caractéristiques principales de chacun des paquet d'ondes wp_i (\vec{r}_{0i} , \vec{p}_{0i}) créés par la séparatrice (paramètres centraux, vitesses de groupe, structure en impulsion...). La motivation d'un tel travail est de pouvoir obtenir une **modélisation simple** de l'effet d'une séparatrice sur un paquet d'ondes initialement Gaussien (ie sur la fonction génératrice des modes Hermite-Gaussiens).

En limitant le plus possible les approximations, on montre comment obtenir une modélisation qui rend compte de presque tous les effets principaux d'une **séparatrice traitée en champ fort**, à savoir :

- la **structuration en deux paquets d’ondes principaux**, pour chaque amplitude de transition $u \longrightarrow v$, avec $(u, v) \in (a, b)$,
- le **changement global d’amplitude** (oscillations de Rabi),
- la **sélectivité (complexe) en vitesse transverse**,
- le **changement de phase et d’impulsion centrale**,
- l’apparition de **deux vitesses de groupe distinctes** pendant la durée d’interaction,
- le **décalage spatial** qui en résulte en fin d’interaction, pour tous les paquets d’ondes créés,
- et la **dispersion anormale**, ie le fait que l’étalement de certains paquets d’ondes soit moins rapide que l’étalement naturel, et qu’il soit plus rapide pour d’autres.

Avant de continuer et d’exposer les résultats démontrés dans l’appendice F, il convient de souligner qu’il n’est pas nécessaire de construire une telle modélisation pour connaître l’effet d’une séparatrice sur un paquet d’ondes atomique incident.

En effet, on sait aujourd’hui comment résoudre analytiquement ce problème dans de nombreux cas particuliers, entre autres dans le cas libre (ie sans champ inertiel ni gravitationnel), ou lorsque l’on tient compte d’un champ d’accélération uniforme et constant (voir [53] et [54]), ou encore lorsque le champ laser a une amplitude modulée dans le temps (pour les familles de fonction à solution exacte du paragraphe 3.4.2). Dans ces cas, on possède au minimum une solution analytique en représentation impulsion $|\vec{p}\rangle$, dont on peut calculer numériquement la transformation de Fourier (pour passer en représentation position $|\vec{r}\rangle$).

Il est ainsi possible de connaître parfaitement les caractéristiques des ondes matérielles sortant d’une séparatrice laser temporelle, et en particulier leur phase (ce qui n’est pas le cas avec une séparatrice spatiale, avec séparation par champ laser ou microstructure matérielle). En ce sens, les séparatrices laser temporelles ne constituent pas un handicap à la détermination du déphasage en sortie d’un interféromètre atomique, car il est toujours possible, in fine, de calculer numériquement leur effet exact sur des ondes atomiques.

Il est cependant important de remarquer qu’il n’est **pas suffisant** de pouvoir résoudre numériquement l’effet d’une séparatrice sur un paquet d’ondes atomique. En effet, le problème majeur d’un appareil de mesure est précisément de savoir... ce qu’il mesure. Le **”problème inverse”**, qui consiste à pouvoir relier un effet mesurable à une cause précise apparaît alors aussi important que le fait de savoir résoudre numériquement l’action d’une séparatrice sur un paquet d’ondes atomique. Lorsque l’on désire **discriminer et évaluer plusieurs contributions à un même signal** (par exemple, dans le déphasage de sortie d’un interféromètre atomique), une solution analytique est finalement nécessaire. La modélisation des séparatrices (et celle des autres zones d’un interféromètre atomique, voir partie 3.5.2) entreprise ici s’inscrit dans cette démarche où l’on cherche à pousser le modèle le plus loin possible, afin d’extraire une **expression analytique qui rende compte du maximum d’informations possible**, tout en restant manipulable.

Ainsi, après avoir modélisé les **”zones sombres”** d’un interféromètre atomique au chapitre 2 (évolution d’ondes atomiques en présence uniquement de champs inertiels et gravitationnels \longrightarrow théorème ABCD), nous voulons modéliser maintenant les zones constituées par les séparatrices et obtenir une expression analytique relativement **simple** de l’action réelle de celles-ci.

Bien sûr, selon le degré de finesse de la modélisation, on obtiendra des expressions plus ou moins complexes. Dans ce mémoire, nous cherchons essentiellement à obtenir une modélisation **qui rende compte des effets principaux** d’une séparatrice temporelle (sur un paquet d’ondes atomique incident, voir plus haut la liste des effets pris en compte) et qui soit **compatible avec la modélisation des zones sombres** obtenue au chapitre 2.

L’approximation principale sur laquelle repose cette modélisation ttt champ fort (sans champ inertiel ni gravitationnel pour l’instant) est alors une **approximation ”Gaussienne”**. Elle consiste

à généraliser les résultats du paragraphe 3.6.3 et à décrire les **paquets d'ondes principaux** qui prennent naissance dans la séparatrice sous forme Gaussienne ⁷.

Le choix d'approcher ces paquets d'ondes par des fonctions d'ondes Gaussiennes résulte du fait que l'on considère des paquets d'ondes atomiques **initialement Gaussiens**. En effet, et comme on l'a détaillé dans la partie 2.3.2, une fonction Gaussienne est la **fonction génératrice** d'une base de fonctions : les **modes Hermite-Gaussiens**. Il suffit donc de considérer un paquet d'ondes incident Gaussien, pour finalement connaître l'effet d'une séparatrice sur tout mode Hermite-Gaussien, et donc - par combinaisons linéaires - sur toute fonction d'onde. Il est ainsi très avantageux de **conserver** - lors de l'interaction laser - **la forme Gaussienne incidente**, d'autant plus que les résultats concernant l'évolution de paquets d'ondes en dehors des séparatrices (théorème ABCD) s'expriment simplement dans ce cas Gaussien.

L'autre avantage majeur de cette modélisation "Gaussienne" est qu'elle permet de traiter de la même façon tous les éléments de matrice S , ie que l'on obtient une **modélisation commune pour les quatre amplitudes de transition** $u \rightarrow v$, avec $(u, v) \in (a, b)$, alors que la structuration en impulsion correspondant à ces diverses transitions n'est pas du tout semblable (voir les figures 3.27, 3.29, 3.30 et 3.31 par exemple). Cet aspect pratique se révélera très important lors de la modélisation globale des interféromètres atomiques.

Avant de donner le résultat explicite de cette modélisation ttt champ fort (cas libre), rappelons donc en quelques mots la **démarche** suivie dans l'appendice F. Elle y est détaillée dans le cas particulier d'une **impulsion laser temporelle de forme créneau**, mais la démarche générale est **transposable à d'autres types d'impulsions** (par exemple, pour celles dont on connaît une solution analytique : fonction sécante hyperbolique, etc).

Cette modélisation est en fait construite en deux étapes. Premièrement, comme on l'a déjà souligné, on détermine les impulsions centrales \vec{p}_c et $\vec{p}_{c\pm}$ des paquets d'ondes principaux issus du filtrage de la distribution en impulsion initiale. On peut les calculer numériquement ou les approcher par les impulsions qui correspondent aux maxima des distributions filtrées. On trouve ainsi une seule impulsion centrale \vec{p}_c dans le cas des transitions avec changement d'état interne (du type $a \rightarrow b$ ou $b \rightarrow a$, voir les figures 3.31 et 3.27), et deux impulsions distinctes, \vec{p}_{c+} et \vec{p}_{c-} dans le cas des transitions sans changement d'état interne (du type $a \rightarrow a$ ou $b \rightarrow b$, voir les figures 3.30 et 3.29).

Une fois ces impulsions centrales connues, on obtient directement les deux vitesses de groupe associées à chacun des paquets d'ondes formés :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} && \text{pour ceux créés par les transitions } a \mapsto b \text{ (ou } b \mapsto a) \\ \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1+y_{c\pm}^2}} && \text{pour ceux créés par les transitions } a \mapsto a \text{ (ou } b \mapsto b) \end{aligned}$$

(avec $y_c = y(\vec{p}_c)$ et $y_{c\pm} = y(\vec{p}_{c\pm})$), ce qui nous donne également accès aux positions centrales de ces paquets d'ondes :

$$\vec{r}_{c\pm} = \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc\pm} \cdot \tau$$

où τ est la durée d'interaction laser (lorsque $y_c = 0$, une seule trajectoire est suivie par les atomes, et on retrouve les résultats de la partie 3.5.1 concernant l'effet Borrmann atomique).

Ensuite, on modélise l'amplitude et les largeurs (en position et impulsion) des paquets d'ondes formés. Pour cela, comme on l'a déjà dit, on utilise des fonctions Gaussiennes dont on optimise les paramètres (paramètres matriciels à coefficients complexes). En fait, on généralise les développements

⁷Cette modélisation souffrira donc de plusieurs compromis, dont celui de ne pas rendre rigoureusement compte des **lobes secondaires** (une modélisation de la structuration en impulsion, où les lobes secondaires sont inclus, est toutefois possible en approchant les paquets d'ondes créés par des **sommes d'Hermite-Gauss**).

quadratiques établis au paragraphe 3.6.3, en faisant attention de préserver les impulsions centrales \vec{p}_c et $\vec{p}_{c\pm}$ obtenues précédemment. On vérifie alors que ces développements conduisent à des distributions en impulsion proches des distributions exactes.

Finalement, on obtient que l'action des éléments de matrice $S_{ba}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2})$ et $S_{aa}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2})$ sur le paquet d'ondes initial :

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, t_0) &= a(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0 Y_0^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(mY_0)}} \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_0 \right] \end{aligned}$$

peut être modélisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \boxed{S_{ba}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2}) \cdot a(\vec{p}, t_0)} \\ &= M_{ba+} \cdot e^{i\theta_{ba+}} \cdot a \left(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc+} \cdot \tau, \vec{p}_0 + \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_c - \vec{p}_0), X_0 Y_0^{-1} - \text{coef}_+ * \Omega_0 \tau - ib_{c+} \right) \\ &+ M_{ba-} \cdot e^{i\theta_{ba-}} \cdot a \left(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc-} \cdot \tau, \vec{p}_0 + \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_c - \vec{p}_0), X_0 Y_0^{-1} + \text{coef}_- * \Omega_0 \tau - ib_{c-} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \boxed{S_{aa}(p_{\parallel} + \frac{\hbar k}{2}) \cdot a(\vec{p}, t_0)} \\ &= M_{aa+} \cdot e^{i\theta_{aa+}} \cdot a \left(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc+} \cdot \tau, \vec{p}_0 + \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c+} - \vec{p}_0), X_0 Y_0^{-1} - \text{coef}_+ * \Omega_0 \tau - ib_{c+} \right) \\ &+ M_{aa-} \cdot e^{i\theta_{aa-}} \cdot a \left(\vec{p}, t_0; \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc-} \cdot \tau, \vec{p}_0 + \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c-} - \vec{p}_0), X_0 Y_0^{-1} + \text{coef}_- * \Omega_0 \tau - ib_{c-} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{ba\pm} &: = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y_c^2}} \\ \theta_{ba\pm} &: = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1+y_c^2} - \frac{(\vec{p}_c - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot \vec{r}_0}{\hbar \delta} - \frac{1}{2m\hbar\delta^2} (\vec{p}_c - \vec{p}_0) \cdot \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot X_0 Y_0^{-1} \cdot \frac{\vec{\delta}}{\delta} \right] \cdot (\vec{p}_c - \vec{p}_0) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} M_{aa\pm} &: = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1+y_{c\pm}^2}} \right) \\ \theta_{ba\pm} &: = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1+y_{c\pm}^2} - \frac{(\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot \vec{r}_0}{\hbar \delta} - \frac{1}{2m\hbar\delta^2} (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_0) \cdot \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot X_0 Y_0^{-1} \cdot \frac{\vec{\delta}}{\delta} \right] \cdot (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_0) \end{aligned}$$

et où les paramètres matriciels coef_{\pm} et $b_{c\pm}$ sont donnés dans l'appendice F et seront rappelés plus loin.

Enfin, dans le cas des amplitudes de transition $S_{ab}(p_{\parallel} - \frac{\hbar k}{2})$ et $S_{bb}(p_{\parallel} - \frac{\hbar k}{2})$, on trouve des résultats identiques au changement près suivant :

- il faut remplacer y par $-y_-$:

$$y = y_+ = \frac{\omega - \omega_0 - kp_{\parallel}/m \boxed{-\delta}}{2\Omega_0} \longrightarrow -y_- = -\frac{\omega - \omega_0 - kp_{\parallel}/m \boxed{+\delta}}{2\Omega_0}$$

- d'où la modification d'amplitude :

$$M_{aa\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \boxed{\pm} \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \right) \longrightarrow M_{bb\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \boxed{\mp} \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \right)$$

Autrement dit, selon cette modélisation, l'action des éléments S_{uv} sur le paquet d'ondes incident $a(\vec{p}, t_0)$ se résume à la création de deux paquets d'ondes principaux (notés $wp_{1,2}(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm})$), pour chaque élément S_{uv} , qui possèdent la même forme que $a(\vec{p}, t_0)$, mais où les paramètres de ce dernier subissent une modification :

- d'amplitude :

$$M_{uv\pm}$$

- de phase globale :

$$\exp[i \theta_{uv\pm}]$$

- de position centrale :

$$\vec{r}_0 \longrightarrow \vec{r}_0 + \vec{v}_{gc\pm} \cdot \tau$$

- d'impulsion centrale :

$$\vec{p}_0 \longrightarrow \vec{p}_0 + \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_0)$$

- et de largeur dans l'espace des phases :

$$X_0 Y_0^{-1} \longrightarrow X_0 Y_0^{-1} \mp \text{coef}_{\pm} * \Omega_0 \tau - ib_{c\pm}$$

Il nous reste maintenant à exprimer ces paquets d'ondes dans la représentation initiale, en utilisant les résultats de la fin du paragraphe 3.5.3 sur le schéma ttt. On obtiendra ainsi la **modélisation ttt champ fort** dans le **cas libre** (sans champ inertiel ni gravitationnel), qui est l'équivalent en champ fort du *théorème ttt* démontré en champs faibles (et pour un paquet d'ondes initial à faible largeur en impulsion) par Bordé dans [79].

– Modélisation ttt champ fort - cas libre

Le schéma ttt, comme nous l'avons déjà exposé au paragraphe 3.5.3, consiste à décrire les effets d'une séparatrice sous la forme d'une **interaction effective instantanée** (au temps t_1). Dans la **représentation initiale**, nous avons montré en effet que le ket solution pouvait s'écrire :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1) U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

à l'aide d'une matrice de diffusion S_1 (au temps t_1 pris égal au temps milieu $t_{1/2}$) :

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1,bb} & S_{1,ba} \\ S_{1,ab} & S_{1,aa} \end{pmatrix}$$

dont les éléments s'exprimaient sous la forme :

$$\boxed{S_{1,uv} := e^{i\Phi_{uv}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{r}_{op}\cdot\vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_{op}\cdot\vec{r}_{uv}} S_{uv}\left(\vec{p}_{op} \mp \frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)}$$

avec $u, v = a, b$.

L'étude présente du cas libre nous a alors permis de modéliser l'action des éléments $S_{uv}\left(\vec{p}_{op} \mp \frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)$ sur le paquet d'ondes atomique incident, et nous a conduit aux paquets d'ondes principaux $wp_{1,2}(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm})$.

Enfin, on peut montrer facilement que l'action de l'opérateur $e^{i\Phi_{uv}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{r}_{op}\cdot\vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_{op}\cdot\vec{r}_{uv}}$ sur ces paquets d'ondes $wp_i(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm})$ revient à **translater leurs centres (en position et en impulsion)** $\vec{r}_{c\pm}$ et $\vec{p}_{c\pm}$, et à leur ajouter une **phase globale** Φ_{uv} :

$$e^{i\Phi_{uv}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{r}_{op}\cdot\vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_{op}\cdot\vec{r}_{uv}} wp_i(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm}) \longrightarrow e^{i\Phi_{uv}} wp_i(\vec{r}_{c\pm} + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_{c\pm} + \vec{p}_{uv}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{r}_{c\pm} + \vec{r}_{uv})\cdot\vec{p}_{uv}}$$

Il est à souligner que ce que l'on entend par **paquet d'ondes incident** est en fait le paquet d'ondes atomique initial mais pris **à l'instant** t_1 (et non à l'instant t_0). Il s'écrit par conséquent :

$$wp(\vec{p}, t_1) = wp(\vec{p}, t_1; r_1, p_1, X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(mY_1)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_1)X_1 Y_1^{-1}(\vec{p} - \vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{r}_1}$$

avec des paramètres - au temps t_1 - que l'on peut relier à ceux au temps t_0 par la loi *ABCD* :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + (t_1 - t_0) \vec{p}_0 & \text{et} & \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_0 \\ X_1 &= X_0 + (t_1 - t_0) Y_0 & \text{et} & \quad Y_1 = Y_0 \end{aligned}$$

On obtient finalement la "modélisation *ttt* champ fort - cas libre" :

Soit un paquet d'ondes atomique initialement Gaussien au temps t_0 , et soit une séparatrice laser temporelle constituée d'une impulsion de forme créneau (de t_0 à $t = t_0 + \tau$), alors on peut modéliser l'effet de cette séparatrice sur ce paquet d'ondes atomique sous la forme d'une interaction laser instantanée effective (au temps t_1) :

si à $t = t_1^-$ (ie juste avant l'instant t_1) le paquet d'ondes atomique initial s'écrit :

$$\begin{aligned} wp(\vec{p}, t_1) &= wp(\vec{p}, t_1; r_1, p_1, X_1, Y_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(mY_1)}} \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_1) X_1 Y_1^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_1 \right] \end{aligned}$$

(en étant dans un des états internes a ou b),

alors à $t = t_1^+$ (ie juste après l'instant t_1) il y a quatre paquets d'ondes solutions - deux pour chaque transition $u \longrightarrow v$ ($u, v = a, b$) - qui s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{M_1 \cdot e^{i\theta_1} wp\left(\vec{p}, t_1^+; \vec{r}_1^+, \vec{p}_1^+, (X_1 Y_1^{-1})^+, m_1\right)}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1^+ &= \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \\ \vec{p}_1^+ &= \vec{p}_1 + \vec{b}_1 \\ (X_1 Y_1^{-1})^+ &= X_1 Y_1^{-1} + F_1 \end{aligned}$$

et où les quantités $M_1, \theta_1, \vec{a}_1, \vec{b}_1$ et F_1 s'expriment à l'aide des coefficients $(M_{1\pm}, \theta_{1\pm}, \vec{a}_{1\pm}, \vec{b}_{1\pm}, F_{1\pm})$, issus de la modélisation précédente, et des termes $\vec{r}_{uv}, \vec{p}_{uv}$ et Φ_{uv} du schéma ttt (donnés à la fin du paragraphe 3.5.3 et rappelés plus bas) :

$$\begin{aligned}
 M_1 & : = M_{1\pm} \\
 \theta_1 & : = \Phi_{uv} + \vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}) / \hbar + \theta_{1\pm} \\
 \vec{a}_1 & : = \vec{r}_{uv} + \vec{a}_{1\pm} \\
 \vec{b}_1 & : = \vec{p}_{uv} + \vec{b}_{1\pm} \\
 F_1 & : = F_{1\pm}
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Concernant les termes indicés par + et -, ils dépendent essentiellement des deux impulsions centrales \vec{p}_{c+} et \vec{p}_{c-} issues de la modélisation précédente. S'il n'y a qu'une impulsion centrale \vec{p}_c , comme dans le cas des transitions $a \mapsto b$ (ie avec changement d'état interne), ces deux impulsions \vec{p}_{c+} et \vec{p}_{c-} sont simplement prises identiques :

$$\begin{aligned}
 \text{transition } a & \mapsto b : & \text{une seule impulsion centrale : } & \vec{p}_{c+} = \vec{p}_{c-} = \vec{p}_c \\
 \text{transition } a & \mapsto a : & \text{deux impulsions centrales distinctes : } & \vec{p}_{c+} \text{ et } \vec{p}_{c-}
 \end{aligned}$$

On obtient alors des **expressions communes aux deux types de transition** ($a \mapsto b$ et $a \mapsto a$) :

$$\vec{a}_{1\pm} = \vec{v}_{gc\pm} \tau \tag{3.102}$$

$$\vec{b}_{1\pm} = \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \quad \text{avec :} \quad \vec{\delta} = \frac{\hbar}{2m_0} \left(\vec{k} \cdot \vec{k} \right) \tag{3.103}$$

$$F_{1\pm} = -(\pm \text{coef}_{\pm} * \Omega_0 \tau + i b_{c\pm}) \vec{\delta} / \Omega_0^2 \tag{3.104}$$

$$\theta_{1\pm} = \frac{\vec{p}_{uv} \cdot \vec{a}_{1\pm}}{\hbar} + \Theta_{\pm} - \frac{(\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \vec{\delta} \cdot \vec{r}_1}{\hbar \delta} - \frac{1}{2m\hbar\delta^2} (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \vec{\delta} X_1 Y_1^{-1} \vec{\delta} (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \tag{3.105}$$

expressions auxquelles il faut ajouter les relations définissant les **facteurs d'amplitude**, dont la forme dépend du type de transition :

$$\begin{aligned}
 \text{transition } a & \mapsto b : & M_{1\pm} &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \\
 \text{transition } a & \mapsto a : & M_{1\pm} &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

ainsi que les **paramètres matriciels** coef_{\pm} et $b_{c\pm}$ **caractérisant les largeurs - en position et impulsion -** des paquets d'ondes formés (la méthode d'obtention est détaillée dans l'appendice F).

Pour la transition $a \longrightarrow b$:

$$\boxed{b_{c+} = b_{c-}} \sim 16 / \left(1 + 3 \frac{\pi/2}{\Omega_0 \tau} \right)^2$$

$$\boxed{coef_+ = coef_-} \sim (coef_{+1} + coef_{-1}) / 2$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} coef_{+1} = \frac{3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} - \sqrt{1+y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} (y_{\min} - y_{c+})}{(y_{\min} - y_c)^2} \\ coef_{-1} = \frac{3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} - \sqrt{1+y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} (-y_{\min} - y_c)}{(-y_{\min} - y_c)^2} \\ y_{\min} = \sqrt{\left(3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2}\right)^2 - 1} \end{cases}$$

Pour la transition $a \longrightarrow a$:

$$\boxed{b_{c+} = b_{c-}} \sim \begin{cases} \frac{1.4}{1+\sigma_y} & \text{pour une lame } \pi \\ \frac{2}{0.8+\sigma_y} & \text{pour une lame } \pi/2 \end{cases}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} coef_+ = \left(1 - \sqrt{1+y_{c+}^2} + \frac{y_{c+}^2}{\sqrt{1+y_{c+}^2}}\right) / y_{c+}^2 \\ coef_- = \left(1 - \sqrt{1+y_{c-}^2} + \frac{y_{c-}^2}{\sqrt{1+y_{c-}^2}}\right) / y_{c-}^2 \end{cases}$$

(ces expressions n'ont pas de valeur universelle et correspondent à une impulsion laser temporelle de forme créneau. Pour d'autres types d'impulsions, il est plus judicieux d'obtenir les matrices $coef_{\pm}$ et $b_{c\pm}$ expérimentalement ou numériquement.)

Enfin, concernant l'expression des termes \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} , elle est donnée à la fin du paragraphe 3.5.3 (formules 3.86, 3.88, 3.90 et 3.92 pour $t_1 = t_{1/2} = (t + t_0) / 2$). Nous donnons ici uniquement les termes correspondant aux transitions $a \longmapsto b$ et $a \longmapsto a$:

$$\text{transition } a \longmapsto b : \quad \begin{cases} \vec{p}_{ba} = +\hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ba} = \vec{0} \\ \Phi_{ba} = -(\phi + \omega t_1) \end{cases}$$

et :

$$\text{transition } a \longmapsto a : \quad \begin{cases} \vec{p}_{aa} = \vec{0} \\ \vec{r}_{aa} = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \\ \Phi_{aa} = \frac{1}{2} (\omega - \omega_0 - \delta) \tau \end{cases}$$

Soulignons encore une fois que l'on obtient les mêmes expressions dans le cas des transitions $b \longmapsto a$ et $b \longmapsto b$, les seuls changements intervenant dans l'expression du paramètre d'inélasticité ($y = y_+ \longrightarrow y_-$) et dans un des facteurs d'amplitude :

$$\text{transition } b \longmapsto b : \quad M_{1\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{y_{-c\pm}}{\sqrt{1+y_{-c\pm}^2}} \right)$$

3.6.5 Bilan et extensions

Nous avons vu dans ce chapitre que la solution de Rabi du problème de l'interaction laser-matière (dans le cas libre, ie sans champ inertiel, ni gravitationnel, et avec une impulsion temporelle de forme créneau traitée **en champ fort**) présentait des caractéristiques étonnantes.

En dehors des propriétés bien connues d'oscillation de Rabi et de sélectivité en vitesse transverse, on a souligné en effet l'importance de **la structuration du paquet d'ondes atomique incident en plusieurs paquets d'ondes**. En particulier, et ce quelque soit le type de transition considéré ($a \mapsto a$ ou $a \mapsto b$ par exemple), on a montré l'existence de deux paquets d'ondes principaux ayant des vitesses de groupe et des largeurs en impulsion différentes. Ces paquets d'ondes correspondent aux états propres de l'interaction, ie aux états adiabatiques usuels, et ont des caractéristiques radicalement différentes.

Dans tous les cas, et même lorsque le paramètre d'inélasticité ("Off-Braggness Parameter") $y(\vec{p}_0)$ est nul, on a montré que l'action réelle des séparatrices sur un paquet d'ondes atomique était très éloignée de celle qui est communément modélisée et utilisée en interférométrie atomique (séparatrices infiniment fines, approximation classique, traitement en champ faible...).

Que le paquet d'ondes incident ait une largeur en impulsion faible ou très grande, les paquets d'ondes issus de cette structuration ne sont généralement **pas centrés sur l'impulsion centrale initiale** \vec{p}_0 , et il faut, avant toute tentative de modélisation, chercher (numériquement ou non) quelles sont les impulsions centrales de ces paquets d'ondes solutions. Celles-ci permettent d'avoir accès à leur vitesse de groupe, ce qui permet ensuite de modéliser leur largeur complexe (en position et impulsion).

Dans un souci de simplicité (pour rendre plus aisée l'utilisation du formalisme ABCD, et pour garder une modélisation relativement simple des séparatrices), nous nous sommes restreints à une modélisation *Gaussienne*, ie n'utilisant que des Gaussiennes pour approximer les éléments de matrice S . Cette approche **permet néanmoins de rendre compte efficacement des principales propriétés étudiées précédemment (oscillations de Rabi, sélectivité en vitesse transverse, vitesses de groupe différentes, décalage des positions centrales en fin d'interaction, phénomène de dispersion anormale)** et offre la possibilité de modéliser simplement le résultat d'une succession de séparatrices (lames π et $\pi/2$), comme c'est le cas par exemple en interférométrie atomique.

Bien sûr, cette modélisation n'est pas parfaite, et ne rend pas compte, en particulier, de la sous-structuration en lobes secondaires des distributions en impulsions. On peut néanmoins étendre la modélisation présentée ici dans le cas des transitions avec changement d'état interne (du type $a \mapsto b$ ou $b \mapsto a$). En effet, dans ce cas, on peut facilement **modéliser les distributions en impulsion sous forme Hermite-Gaussienne, et ainsi rendre compte des lobes secondaires**.

– Extension aux impulsions de forme sécante hyperbolique *sech* :

Bien que l'on sache aujourd'hui réaliser des impulsions ayant une forme de quasi-créniaux, il est fondamental, pour des raisons théoriques (validité du modèle à deux niveaux par exemple) et expérimentales (diminution des lobes secondaires), d'avoir une modélisation des séparatrices pour des **impulsions de forme quelconque**. On connaît des solutions exactes pour beaucoup d'impulsions différentes (voir le paragraphe sur la théorie $z(t)$), mais hélas pas pour celles usuellement manipulées (Gaussiennes, Lorentziennes...), ou alors sous forme de fonctions spéciales difficilement manipulables (fonctions hypergéométriques ou cylindriques paraboliques par exemple), et il faut très souvent avoir recours à des **modélisations numériques**.

Cependant, il existe un type d'impulsion, pour lequel on connaît une solution analytique simple, et qui possède une forme très proche d'une Gaussienne : il s'agit de l'impulsion **sécante hyperbolique** ($sech = 1/ch$), dont on a tracé la courbe représentative sur la figure 3.32. Il est donc important de savoir si on peut - et auquel cas comment - adapter la modélisation précédente au cas des impulsions sécantes hyperboliques.

Dans le cas de telles impulsions, nous sommes cependant confrontés à **deux problèmes**.

Le premier concerne la **détermination des vitesses de groupe**. En effet, du fait que la matrice $M_{op}(t)$ dans l'équation initiale $\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t)|\varphi(t)\rangle$ dépend du temps ($F(t) = \text{sech}(t/\sigma_t)$), les vecteurs propres de $M_{op}(t)$ dépendent eux aussi du temps, et il faut employer la méthode des états adiabatiques successifs (exposée au paragraphe 3.4.3), à la recherche d'un éventuel ordre n pour lequel l'un des deux éléments $\alpha_n(t)$ ou $\beta_n(t)$ de la matrice

$$M_n(t) := \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \beta_n(t) & -\alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

serait négligeable devant l'autre, afin de pouvoir ainsi facilement diagonaliser l'équation $\dot{\varphi}_n = iM_n(t)\varphi_n$, ie obtenir les *vrais* états adiabatiques dont on pourrait tirer les vitesses de groupe pertinentes.

Hélas, dans le cas des impulsions en *sech*, on peut montrer facilement qu'un tel ordre n n'existe pas (sauf dans le cas très particulier où le paramètre d'inélasticité est nul et lorsque le paquet d'ondes atomique incident a une largeur en impulsion très faible : $\sigma_p/m \ll 2\Omega_0/k$). On ne peut donc pas définir de vitesses de groupe à partir des états adiabatiques comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant.

Une manière d'approcher ces vitesses de groupe possibles consiste à approximer l'impulsion sécante hyperbolique par un **créneau équivalent** (avec la même aire d'impulsion par exemple) **lors du calcul des vitesses de groupe**, et à revenir ensuite à l'impulsion en *sech* pour modéliser les distributions en impulsion. Il serait d'ailleurs intéressant de mesurer expérimentalement (avec un paquet d'ondes incident minimal par exemple) les vitesses de groupe dans le cas d'une telle impulsion laser.

D'autre part, dans le cas des transitions du type $a \mapsto b$ ou $b \mapsto a$, et lorsque le paramètre d'inélasticité est nul, le lobe principal des distributions solutions est centré sur la même impulsion centrale que le paquet d'ondes incident, et il n'y a donc qu'une seule vitesse de groupe \vec{v}_{gc} qui est nulle. On peut alors modéliser les paquets d'ondes solutions en multipliant simplement le paquet d'ondes incident par une distribution en impulsion Gaussienne approchant au mieux celle en *sech* (voir figure 3.32).

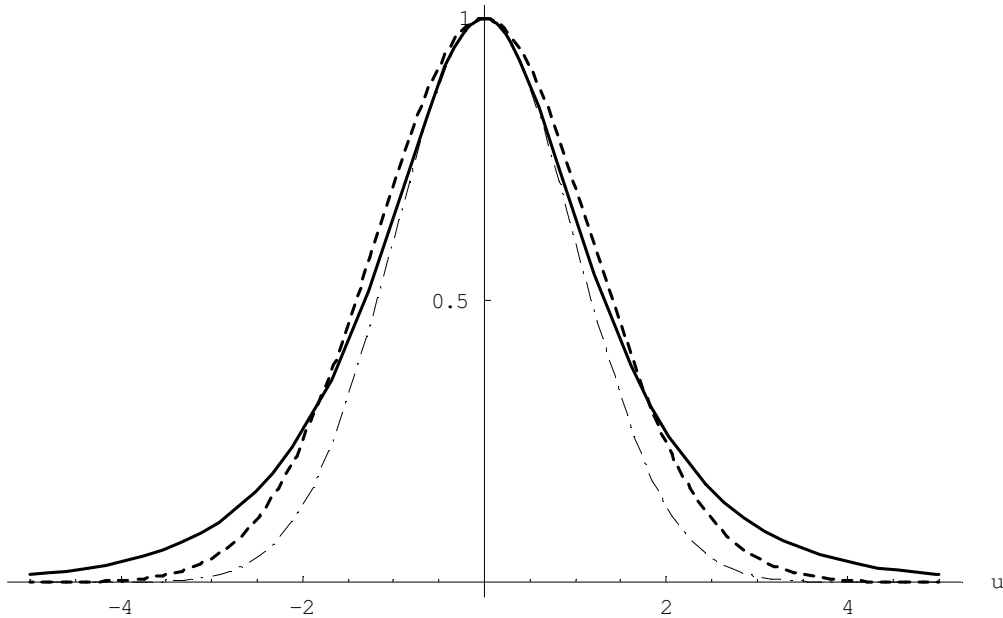


FIG. 3.32: Courbes $u \mapsto \text{sech}(u)$ (—), $u \mapsto \exp(-0.35 u^2)$ (---) et $u \mapsto \exp(-0.5 u^2)$ (- · - · -).

Le second problème est dû au fait que le **domaine d'existence** de l'impulsion *sech* est non borné ($\text{sech}(u) \neq 0$ quelque soit u), et que les solutions analytiques ne sont simples qu'en dehors de ce domaine, ie en intégrant l'équation $\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t)|\varphi(t)\rangle$ de $-\infty$ à $+\infty$ (sinon il faut faire appel à des fonctions hypergéométriques délicates à manipuler). Il faut donc *définir* des instants de début

et de fin d'interaction, suffisamment éloignés de l'instant central de l'impulsion laser, et considérer seulement la solution analytique obtenue en fin d'interaction. On a donc un **fonctionnement de type "boîte noire"** où ne peut être modélisé que ce qui *sort* de la séparatrice, et non ce qui se passe à l'intérieur.

Finalement, en dehors de certains cas très particuliers (paquets d'ondes fins en impulsion, paramètre d'inélasticité nul), il n'est pas aisé de transposer les résultats de notre modélisation, qui est valable pour des impulsions de forme créneau, et la façon la plus simple de modéliser les cas avec impulsions de forme quelconque semble être de les approximer par une succession continue d'impulsions créneau.

3.7 Cas général et modélisation *ttt* champ fort généralisée

3.7.1 Position du problème

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu successivement :

1. comment mettre en équation le problème de la triple interaction "atomes - laser - champs inertiels et gravitationnels",
2. comment transformer (par différents changements de représentations) cette équation en une équation :

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i M_{op}(t) |\varphi(t)\rangle \quad (3.107)$$

plus simple à résoudre,

3. comment ensuite résoudre cette équation (numériquement ou par des développements, approximations ou solutions exactes),
4. et comment revenir dans la représentation initiale en exprimant la solution sous la forme d'une interaction instantanée équivalente (*schéma ttt*),

Enfin, nous avons étudié en détail - et modélisé - la solution en champ fort obtenue dans le cas particulier d'une séparatrice à champ constant (impulsion crénneau de durée τ) sans aucun champ inertielle ou gravitationnel (cas dénommé "libre").

Nous avons également vu au paragraphe 3.3.2 que les différents termes de la matrice

$$M_{op}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2}\Delta_{op} \end{pmatrix}$$

où :

$$\Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{A}(t, t_1) \vec{r}_{op} - \vec{k} \cdot \dot{B}(t, t_1) \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \dot{\xi}(t, t_1)$$

$$\Omega_0 F_{op} = \Omega_0 F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \approx \Omega_0 \bar{F}(t, t_1)$$

n'étaient pas tous du même ordre - pour les données inertielle et gravitationnelles usuelles - et que l'on pouvait négliger dans l'expression de Δ_{op} les effets dus au gradient de gravité (ou d'accélération) et aux rotations :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \approx \bar{\Delta}_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \vec{g}(t - t_1)$$

$$M_{op}(t) \longrightarrow \bar{M}(\vec{p}_{op}, t)$$

On peut même négliger le terme dépendant de \vec{g} lorsque $|\vec{k} \cdot \vec{g}| \tau^2 \ll 1$ (ie $|\vec{k} \cdot \vec{g}| \ll \Omega_0^2$) et ainsi retrouver l'expression du cas libre :

$$\Delta_{op, libre} = \omega - \omega_0 - \vec{k} \frac{\vec{p}_{op}}{m}$$

Notre **but** maintenant est de généraliser la démarche du paragraphe précédent (recherche des vitesses de groupe et de la sélectivité *complexe* en impulsion) afin d'obtenir une *modélisation ttt champ fort* valable dans le cas général, ie une **modélisation des séparatrices en champ fort en présence de champs inertiels et gravitationnels**.

3.7.2 Recherche des vitesses de groupe et approximation du désaccord

Comme dans le cas libre, on veut pouvoir avoir accès aux *vitesses de groupe principales*, ie aux vitesses de groupe des paquets d'ondes principaux associés aux deux *vrais états propres (adiabatiques)* du système.

Le calcul de ces états adiabatiques n'est pas simple, comme on l'a déjà souligné à la fin du chapitre précédent (mise en défaut de la *méthode des états adiabatiques successifs* pour des impulsions de type sécante hyperbolique), et nous devons en premier lieu **restreindre notre modélisation au cas des impulsions laser constantes** (ie sous forme de créneau temporel).

Par ailleurs, du fait que le terme $\overline{\Delta_{op}}$ dépend du temps par l'intermédiaire de \vec{g} , les états adiabatiques de $\overline{M}(\vec{p}, t)$ dépendent du temps et ne sont généralement pas égaux aux vrais états adiabatiques (ie à ceux qui permettent de diagonaliser l'équation $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$, voir paragraphe 3.4.3). Il faut donc appliquer la **méthode des états adiabatiques successifs** afin de déterminer ces vrais états adiabatiques, et ainsi pouvoir appliquer la modélisation du chapitre précédent (recherche des impulsions centrales, vitesses de groupe associées, structuration complexe en impulsion).

Hélas, lorsque $|\vec{k} \vec{g}| \tau/4 \sim \Omega_0$, on a le même problème qu'avec les impulsions sécantes hyperboliques, à savoir qu'il n'y a pas d'ordre n pour lequel l'un des deux éléments $\alpha_n(t)$ ou $\beta_n(t)$ de la matrice

$$M_n(t) := \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \beta_n(t) & -\alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

est négligeable devant l'autre. On ne peut donc pas définir de vrais états adiabatiques, et l'on est obligé soit de modéliser la séparation atomique d'une autre façon (par exemple en étudiant numériquement la solution analytique de ce problème, exprimée en termes de fonctions cylindriques paraboliques), soit de faire une approximation supplémentaire pour permettre le calcul de vitesses de groupe pertinentes (par exemple avec la méthode de la matrice lentement variable exposée au paragraphe 3.4.4).

En fonction de la valeur de $|\vec{k} \vec{g}|/4\Omega_0^2$, on obtient par conséquent le schéma suivant :

1. $|\vec{k} \vec{g}| \ll 4\Omega_0^2$, alors : $\Delta_{op}(t, t_1) \simeq \Delta_{op, libre}$
2. $|\vec{k} \vec{g}| \gtrsim 4\Omega_0^2$, alors :
 - (a) soit on augmente expérimentalement la valeur de Ω_0 pour se ramener au cas 1.
 - (b) soit on modélise autrement (étude numérique)
 - (c) soit on approche $\overline{\Delta_{op}}(t, t_1)$ par $\overline{\Delta_{op}}(t_{1/2}, t_1)$ (méthode de la matrice lentement variable, très intéressante lorsque $t_1 = t_{1/2}$, car dans ce cas $\overline{\Delta_{op}}(t_{1/2}, t_1) = \Delta_{op, libre}$)
3. $10^{-2} \lesssim |\vec{k} \vec{g}|/4\Omega_0^2 \lesssim 10^{-1}$: dans ce cas intermédiaire, où on peut ne pas négliger $|\vec{k} \vec{g}|/4\Omega_0^2$, la méthode des états adiabatiques successifs est efficace, et on peut diagonaliser rapidement l'équation $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$.

Dans la suite, nous prendrons $t_1 = t_{1/2}$ et $\Delta_{op}(t, t_1) \simeq \overline{\Delta_{op}}(t_{1/2}, t_1)$, ie :

$$\Delta_{op}(t, t_1) \simeq \Delta_{op, libre}$$

tout en gardant à l'esprit que dans le cas intermédiaire où $10^{-2} \lesssim |\vec{k} \vec{g}|/4\Omega_0^2 \lesssim 10^{-1}$ on peut améliorer la modélisation grâce à la méthode des états adiabatiques successifs.

On est donc ramené au cas libre pour la résolution de l'équation $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$, et on peut alors appliquer les résultats démontrés dans la partie précédente (et en particulier en ce qui concerne la recherche des impulsions centrales et des vitesses de groupe principales).

3.7.3 Bilan : modélisation *ttt* champ fort généralisée

Fort de cette approximation sur $\Delta_{op}(t, t_1)$, on peut reprendre les résultats démontrés dans le cas libre et généraliser la *modélisation ttt champ fort* établie dans ce cas. En effet, à l'aide du *schéma ttt* détaillé au paragraphe 3.5.3 et de la modélisation du paragraphe précédent, on obtient l'un des résultats majeurs de ce mémoire : la **modélisation *ttt* champ fort généralisée**, appelée aussi **modélisation *ttt* champs forts** pour souligner que tous les champs (inertiels, gravitationnels et laser) sont traités en champ fort (hormis lors de la résolution de l'équation fondamentale 3.107).

Ce *schéma ttt*, comme nous l'avons déjà exposé aux paragraphes 3.5.3 et 3.6.4, consiste à décrire les effets d'une séparatrice sous la forme d'une *interaction effective instantanée* (au temps t_1 , qui est égal au temps $t_{1/2}$ ici). Dans la représentation initiale, nous avons montré en effet que le ket solution pouvait s'écrire :

$$|\Psi_{sol}(t)\rangle = U_1(t, t_1) S_1(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t, t_0, t_1) U_1(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

à l'aide d'une *matrice de diffusion* S_1 (au temps t_1) :

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1,bb} & S_{1,ba} \\ S_{1,ab} & S_{1,aa} \end{pmatrix}$$

dont les éléments s'expriment sous la forme :

$$S_{1,uv} := \exp[i\Phi_{uv}] \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{uv}\right] \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{uv}\right] \cdot S_{uv}\left(\vec{p}_{op} \mp \frac{\hbar \vec{k}}{2}\right)$$

avec $u, v = a, b$.

L'étude du cas libre nous a alors permis de modéliser les éléments $S_{uv}\left(\vec{p}_{op} \mp \frac{\hbar \vec{k}}{2}\right)$ en représentation impulsion. Ces derniers, appliqués au paquet d'ondes atomique incident, conduisent à ce que l'on a appelé les deux *paquets d'ondes principaux* $wp_{1,2}(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm})$.

Enfin, l'action de $e^{i\Phi_{uv}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{uv}}$ consiste à traduire les centres (en position et en impulsion) $\vec{r}_{c\pm}$ et $\vec{p}_{c\pm}$, et à ajouter une phase laser effective Φ_{uv} :

$$e^{i\Phi_{uv}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}_{op} \cdot \vec{p}_{uv}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{op} \cdot \vec{r}_{uv}} wp_i(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm}) \longrightarrow \exp\left[i\Phi_{uv} + \frac{i}{\hbar} (\vec{r}_{c\pm} + \vec{r}_{uv}) \cdot \vec{p}_{uv}\right] \cdot wp_i(\vec{r}_{c\pm} + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_{c\pm} + \vec{p}_{uv})$$

De plus, il est bon de souligner que ce que l'on entend par "*paquet d'ondes incident*" est le paquet d'ondes atomique initial pris à l'instant t_1 (et non à l'instant t_0). Pris sous forme Gaussienne, il s'écrit alors :

$$a(\vec{p}, t_1) = a(\vec{p}, t_1; r_1, p_1, X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(mY_1)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_1) X_1 Y_1^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_1}$$

avec des paramètres - au temps t_1 - que l'on peut relier à ceux au temps t_0 par la loi *ABCD* :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= A(t_1, t_0) \vec{r}_0 + B(t_1, t_0) \vec{p}_0/m + \vec{\xi}(t_1, t_0) \\ \vec{p}_1/m &= C(t_1, t_0) \vec{r}_0 + D(t_1, t_0) \vec{p}_0/m + \vec{\phi}(t_1, t_0) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} X_1 &= A(t_1, t_0) X_0 + B(t_1, t_0) Y_0 \\ Y_1 &= C(t_1, t_0) X_0 + D(t_1, t_0) Y_0 \end{aligned}$$

(les matrices $ABCD$ sont définies au paragraphe 2.2.1 et sont détaillées au paragraphe 2.2.3 et dans les appendices C et D).

Finalemt, les deux seules différences avec le cas libre étudié dans la partie précédente résident

1. dans l'expression des quantités \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} (détaillées au paragraphe 3.5.3),
2. et dans l'expression du paquet d'ondes incident effectif (égal au paquet d'ondes incident initial (ie celui au temps t_0) mais évalué au temps milieu t_1 grâce au *théorème ABCD*).

C'est dans ces quantités qu'apparaît en fait l'influence, sur la séparation atomique, des champs inertiels et gravitationnels détaillés au chapitre 2.

On obtient ainsi la "modélisation ttt champ fort généralisée" :

Soit un paquet d'ondes atomique initialement Gaussien au temps t_0 , et soit une séparatrice laser temporelle constituée d'une impulsion de forme créneau (de t_0 à $t = t_0 + \tau$), alors on peut modéliser l'effet de cette séparatrice sur ce paquet d'ondes atomique sous la forme d'une interaction laser instantanée effective (au temps central $t_1 = t_{1/2}$) :

si à $t = t_1^-$ (ie juste avant l'instant t_1) le paquet d'ondes atomique initial s'écrit :

$$wp(\vec{p}, t_1) = wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1}, m_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(m_0 Y_1)}} e^{-\frac{i}{2m_0 \hbar} (\vec{p} - \vec{p}_1) X_1 Y_1^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_1}$$

(en étant dans un des états internes a ou b),

alors à $t = t_1^+$ (ie juste après l'instant t_1) il y a quatre paquets d'ondes solutions - deux pour chaque transition $u \mapsto v$ ($u, v = a, b$) - qui s'écrivent sous la forme :

$$M_1 \cdot e^{i\theta_1} wp(\vec{p}, t_1^+; \vec{r}_1^+, \vec{p}_1^+, (X_1 Y_1^{-1})^+, m_1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1^+ &= \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \\ \vec{p}_1^+ &= \vec{p}_1 + \vec{b}_1 \\ (X_1 Y_1^{-1})^+ &= X_1 Y_1^{-1} + F_1 \end{aligned}$$

et où M_1 , θ_1 , \vec{a}_1 , \vec{b}_1 et F_1 s'expriment à l'aide des coefficients $(M_{1\pm}, \theta_{1\pm}, \vec{a}_{1\pm}, \vec{b}_{1\pm}, F_{1\pm})$, issus de la modélisation de la partie précédente 3.6 (donnés respectivement en 3.106, 3.105, 3.102, 3.103 et 3.104), et des termes \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} du schéma ttt (donnés au paragraphe 3.5.3 par les expressions 3.79, 3.83, 3.81 et 3.85 selon le type de transition considéré) :

$$\begin{aligned} M_1 &: = M_{1\pm} \\ \theta_1 &: = \Phi_{uv} + \vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}) / \hbar + \theta_{1\pm} \\ \vec{a}_1 &: = \vec{r}_{uv} + \vec{a}_{1\pm} \\ \vec{b}_1 &: = \vec{p}_{uv} + \vec{b}_{1\pm} \\ F_1 &: = F_{1\pm} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Remarque : effet Borrmann généralisé

Les trajectoires des centres des paquets d'ondes atomiques sont identiques lorsque :

$$\vec{a}_{1\pm} = \vec{v}_{gc\pm} \tau = \pm \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} = \vec{0}$$

ie lorsque le paramètre d'inélasticité *utile* y_c est nul, ou de façon équivalente, lorsque le désaccord *utile* est nul :

$$\frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_c / m - \delta}{2\Omega_0} = 0$$

Dans ce cas, on retrouve bien les résultats de la partie 3.5.1 concernant l'effet Borrmann généralisé, ie en présence de champs inertiels et gravitationnels : lorsque $y_c = 0$, les atomes suivent une unique trajectoire donnée par l'expression suivante :

$$\vec{r}_c(t, t_0) = A(t, t_0) \cdot \vec{r}_0 + B(t, t_0) \cdot \left(\vec{p}_c + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m + \vec{\xi}(t, t_0)$$

(où l'on a remplacé \vec{p}_0 par l'impulsion centrale utile \vec{p}_c).

3.7.4 Lien avec les modélisations antérieures et conclusion

Comme on l'a dit au début de ce chapitre, les modélisations antérieures (modélisation infiniment fine, théorème *ttt champ faible* ou autres [52]) négligent beaucoup d'effets importants, dont les effets *dispersifs* que peut engendrer une séparatrice (en dehors de l'étalement naturel)⁸. Ces effets dispersifs supplémentaires viennent du fait que la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$$

dépend d'une façon non-triviale de l'impulsion \vec{p} , et les modélisations précédentes reposent essentiellement sur l'approximation consistant à négliger l'aspect opératoire de \vec{p}_{op} lors de la résolution de cette équation (approximation semi-classique).

Une autre façon, communément utilisée, d'interpréter ces modélisations est de considérer que les paquets d'ondes entrant dans une séparatrice ont une largeur en impulsion infiniment fine, ou en tous cas beaucoup plus fine que celle du filtre en impulsion de la séparatrice :

$$\begin{aligned} \sigma_{p_{\parallel}} &\ll \sqrt{3} \frac{2m\Omega_0}{k} && \text{pour une lame } \pi \\ \sigma_{p_{\parallel}} &\ll \sqrt{15} \frac{2m\Omega_0}{k} && \text{pour une lame } \pi/2 \end{aligned}$$

ie :

$$\sigma_{p_{\parallel}} \ll \frac{2m\Omega_0}{k}$$

et par conséquent que les distributions en impulsion de ces paquets d'ondes incidents ne sont pas beaucoup perturbées par ce filtre.

On a vu néanmoins qu'en champ fort (cas libre ou cas général), il y avait structuration du paquet d'ondes incident en plusieurs paquets d'ondes, et que les effets dispersifs étaient principalement de deux types :

⁸Ces deux modélisations simplifiées seront plus détaillées au paragraphe 4.1.2.

- une structuration complexe de la distribution en impulsion
- et l'apparition de plusieurs vitesses de groupe distinctes.

On a vu également que ces vitesses de groupe :

$$\vec{v}_{gc\pm} = \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y_{\pm}(\vec{p}_{c\pm})}{\sqrt{1 + y_{\pm}(\vec{p}_{c\pm})^2}} \quad (3.109)$$

(où les impulsions $p_{c\parallel\pm}$ sont les impulsions centrales des deux paquets d'ondes principaux, et où :

$$y_{\pm}(\vec{p}) = \left[\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p} / m \mp \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} \right] / 2\Omega_0$$

sont les paramètres d'inélasticité correspondant aux différents types de transition : y_+ pour les transitions $a \longrightarrow b$ ou $a \longrightarrow a$, et y_- pour les transitions $b \longrightarrow b$ ou $b \longrightarrow a$ ne dépendaient qu'assez peu de la largeur du paquet d'ondes incident (seulement à travers les impulsions centrales $\vec{p}_{c\pm}$). Ainsi, même pour des paquets d'ondes ayant une largeur en impulsion très fine, il y a bien structuration en deux paquet d'ondes principaux et apparition de deux vitesses de groupe différentes :

$$\sigma_{p\parallel} \ll \frac{2m\Omega_0}{k} \quad \Longrightarrow \quad p_{c\parallel\pm} = p_{1\parallel} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} y_{\pm}(\vec{p}_{c\pm}) \neq 0 \\ \text{si } y_{\pm}(\vec{p}_1) \neq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{gc-} = -\vec{v}_{gc+} \neq \vec{0}$$

Ce n'est seulement

$$\text{lorsque : } \sigma_{p\parallel} \ll \frac{2m\Omega_0}{k} \quad \text{et} \quad y_{\pm}(\vec{p}_1) = 0$$

(résonance parfaite pour la composante centrale, ie la porteuse), que le paquet d'ondes incident ne se scinde pas en deux paquets d'ondes principaux ayant des vitesses de groupe distinctes :

$$\sigma_{p\parallel} \ll \frac{2m\Omega_0}{k} \quad \text{et} \quad y_{\pm}(\vec{p}_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{gc-} = \vec{v}_{gc+} = \vec{0}$$

Il est donc **insuffisant** de supposer que la largeur du paquet d'ondes incident est faible pour appliquer les modélisations précédentes (par exemple celle infiniment fine ou le théorème *ttt* champ faible).

On peut en outre se demander si ces conditions :

$$\sigma_{p\parallel} \ll \frac{2m\Omega_0}{k} \quad \text{et} \quad y_{\pm}(\vec{p}_1) = 0$$

sont *suffisantes pour négliger tous les effets dispersifs* dus aux séparatrices.

La réponse est bien sûr négative comme on a pu le voir au paragraphe 3.6.3. En effet, pour un paquet d'ondes extrêmement fin et lorsque $y_{\pm}(\vec{p}_1) = 0$, il y a quand même structuration en deux paquets d'ondes distincts. Ils ont alors la même vitesse de groupe mais pas la même largeur en impulsion :

$$X_1 Y_1^{-1} + \left(1 \mp \frac{\vec{\delta}}{2\Omega_0} \right) \tau$$

L'un des deux paquets s'étale ainsi plus rapidement que l'étalement naturel, et l'autre moins. Utiliser les modélisations "antérieures" implique donc de négliger *également* cet étalement anormal, ou alors de considérer des ondes planes.

Une autre question importante est de savoir **comment** la modélisation *ttt champs forts* obtenue ci-avant redonne ces modélisations simplifiées, et, dans le cas contraire, de savoir quels sont les autres effets importants négligés par celles-ci.

Plaçons nous donc dans un **cas idéal** où le paquet d'ondes incident :

$$a(\vec{p}, t_1) = a(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1)$$

(centré en \vec{r}_1 et \vec{p}_1) possède une **très faible largeur en impulsion** suivant la direction \vec{k} :

$$\sigma_{p_{||}} := \sqrt{\frac{2m\hbar}{\text{Im}[(X_1 Y_1^{-1})_{||}]}} \ll \frac{2m\Omega_0}{k}$$

$$\text{avec : } (X_1 Y_1^{-1})_{||} := \vec{k} \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot \vec{k} / k^2$$

ou de façon équivalente (en unités "y") :

$$\sigma_y := \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im}(X_1 Y_1^{-1}))_{||}}} \ll 1$$

(il n'y a alors qu'une seule impulsion centrale $\vec{p}_{c\pm} = \vec{p}_1$ pour les deux paquets d'ondes principaux prenant naissance dans la séparatrice), et qu'il soit **à résonance parfaite pour son impulsion centrale** :

$$y_+(\vec{p}_1 = \vec{p}_{c\pm}) = 0$$

(ie pour la porteuse), et examinons ce que deviennent les résultats du paragraphe précédent pour les deux transitions $a \mapsto b$ et $a \mapsto a$.

Nous allons voir en fait que l'on ne retrouve les résultats usuels des modélisations antérieures qu'à la condition de négliger les champs inertiels et gravitationnels, et de façon équivalente :

- de faire tendre la durée d'interaction τ vers 0,
- ou de négliger tous les effets dispersifs de la séparatrice (autres que l'étalement naturel).

Dans ce cas idéal, les relations 3.109, 3.102, 3.103, 3.105, 3.104 et 3.106 s'écrivent en effet :

$$\vec{v}_{gc\pm} \longrightarrow \vec{0}$$

$$\vec{a}_{1\pm} = \vec{v}_{gc\pm} \tau \longrightarrow \vec{0}$$

$$\vec{b}_{1\pm} = \frac{\vec{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \longrightarrow \vec{0}$$

$$\theta_{1\pm} = \frac{\vec{p}_{uv} \cdot \vec{a}_{1\pm}}{\hbar} + \Theta_{\pm} + \text{fonction}(\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \longrightarrow \Theta_{\pm} \longrightarrow \pm \Omega_0 \tau$$

$$F_{1\pm} \longrightarrow -(i b_c \pm \text{coef} * \Omega_0 \tau) \vec{\delta} / \Omega_0^2$$

communément pour les deux types de transition, et :

$$\begin{aligned}
 &coef = 1 \\
 \text{transition } a \longmapsto b : \quad &b_c = \begin{cases} b_c \sim 1. & : \text{lame } \pi \\ b_c \sim 0.32 & : \text{lame } \pi/2 \end{cases} \\
 &M_{1\pm} = \pm \frac{1}{2} \\
 &coef = \frac{1}{2} \\
 \text{transition } a \longmapsto a : \quad &b_c = \begin{cases} b_c \sim 1.4 & : \text{lame } \pi \\ b_c \sim 2.5 & : \text{lame } \pi/2 \end{cases} \\
 &M_{1\pm} = +\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

pour les quantités dépendant du type de transition.

A l'aide des relations 4.7, on obtient ainsi les deux paquets d'ondes solutions (pour chaque transition) :

– transition $a \longmapsto b$:

$$+\frac{1}{2}e^{i[\Phi_{ba}+\vec{p}_{ba}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{ba})/\hbar]+i\Omega_0\tau} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{ba}, \vec{p}_1+\vec{p}_{ba}, X_1Y_1^{-1}-[i b_c+coef*\Omega_0\tau] \vec{\delta}/\Omega_0^2\right)$$

et :

$$-\frac{1}{2}e^{i[\Phi_{ba}+\vec{p}_{ba}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{ba})/\hbar]-i\Omega_0\tau} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{ba}, \vec{p}_1+\vec{p}_{ba}, X_1Y_1^{-1}-[i b_c-coef*\Omega_0\tau] \vec{\delta}/\Omega_0^2\right)$$

dont la somme vaut :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 &e^{i[\Phi_{ba}+\vec{p}_{ba}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{ba})/\hbar]} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{ba}, \vec{p}_1+\vec{p}_{ba}, X_1Y_1^{-1}-i b_c \vec{\delta}/\Omega_0^2\right) \\
 &\cdot i \sin \left[\Omega_0\tau \left(1 + coef \left(\frac{\vec{k}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_1-\vec{p}_{ba})}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]
 \end{aligned}
 }$$

– transition $a \longmapsto a$:

$$+\frac{1}{2}e^{i[\Phi_{aa}+\vec{p}_{aa}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{aa})/\hbar]+i\Omega_0\tau} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{aa}, \vec{p}_1+\vec{p}_{aa}, X_1Y_1^{-1}-[i b_c+coef*\Omega_0\tau] \vec{\delta}/\Omega_0^2\right)$$

et :

$$+\frac{1}{2}e^{i[\Phi_{aa}+\vec{p}_{aa}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{aa})/\hbar]-i\Omega_0\tau} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{aa}, \vec{p}_1+\vec{p}_{aa}, X_1Y_1^{-1}-[i b_c-coef*\Omega_0\tau] \vec{\delta}/\Omega_0^2\right)$$

dont la somme vaut :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 &e^{i[\Phi_{aa}+\vec{p}_{aa}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_{aa})/\hbar]} a\left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1+\vec{r}_{aa}, \vec{p}_1+\vec{p}_{aa}, X_1Y_1^{-1}-i b_c \vec{\delta}/\Omega_0^2\right) \\
 &\cdot \cos \left[\Omega_0\tau \left(1 + coef \left(\frac{\vec{k}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_1-\vec{p}_{aa})}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]
 \end{aligned}
 }$$

On remarque alors que la somme des paquets d'ondes redonne bien les **sinus et cosinus habituels**, mais cette fois-ci avec des **corrections quadratiques en l'impulsion** (ce qui empêche de considérer ces sommes comme des paquets d'ondes purement Gaussiens, ie ayant la même forme que le paquet d'ondes initial).

Même en négligeant ces termes quadratiques, nous ne reconnaissons pas encore la forme habituelle des modélisations antérieures car les champs inertiels et gravitationnels ne sont pas négligés ici (les coefficients indicés par ba ou aa sont exprimés en 3.83 et 3.85). Dans le cas libre, ces coefficients sont donnés par les relations 3.89 et 3.93, et les paquets d'ondes précédents deviennent égaux à :

– *transition* $a \mapsto b$:

$$e^{-i(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \phi)} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1 + \hbar \vec{k}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right) \\ \cdot i \sin \left[\Omega_0 \tau \left(1 + \text{coef} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1 - \hbar \vec{k})}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]$$

– *transition* $a \mapsto a$:

$$e^{\frac{i}{2}(\omega - \omega_0 - \delta)\tau} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right) \\ \cdot \cos \left[\Omega_0 \tau \left(1 + \text{coef} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1)}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]$$

Si l'on pouvait négliger les modifications quadratiques (qui dépendent des quantités coef et b_c), on retrouverait alors bien le résultat usuel des modélisations antérieures pour l'amplitude de transition $a \mapsto b$ (ie avec changement d'état interne), à savoir que l'effet principal d'une séparatrice se réduit à :

– un changement d'amplitude :

$$\sin(\Omega_0 \tau)$$

– l'ajout d'une phase effective :

$$i e^{-i(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \phi)}$$

– et un changement de l'impulsion centrale initiale :

$$\vec{p}_1 \longrightarrow \vec{p}_1 + \hbar \vec{k}$$

Ce serait cependant faux pour l'autre amplitude de transition $a \mapsto a$, où deux changements importants apparaissent par rapport aux modélisations antérieures (qui ne tenaient compte que du changement d'amplitude en cosinus) :

– une **phase supplémentaire** :

$$e^{\frac{i}{2}(\omega - \omega_0 - \delta)\tau}$$

– et une **translation de la position centrale** :

$$\vec{r}_1 \longrightarrow \vec{r}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau$$

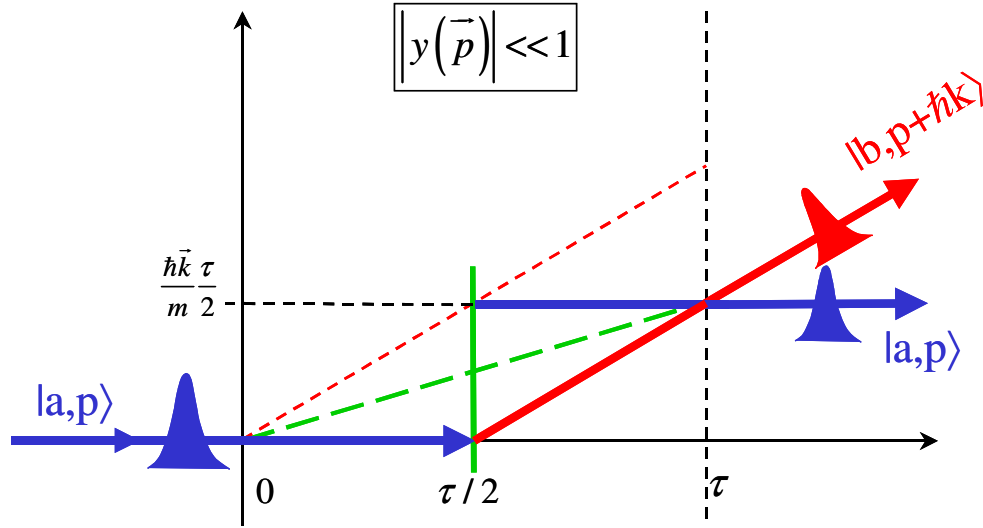


FIG. 3.33: Trajectoires atomiques dans une séparatrice laser lorsque le paramètre d'inélasticité est quasi-nul : mise en évidence du décalage spatial en fin d'interaction pour les atomes sortant dans le même état interne que celui initial (représenté ici pour l'état fondamental a).

Ce changement de position apparaît clairement sur la figure 3.33.

Il résulte simplement du fait que, dans le cas libre et pour $y_+(\vec{p}_1) = 0$, le centre des paquets d'ondes solutions évolue selon la direction médiane :

$$\vec{r}_0 + \left[\vec{p}_0 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right] (t - t_0)$$

et qu'il est donc décallé de :

$$\vec{r}_0 + \vec{p}_0 \tau + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau = \vec{r}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau$$

au bout du temps τ .

Par conséquent, **il ne suffit pas** de

1. négliger les autres champs extérieurs (gravito-inertiels)

et de supposer que :

2. le paquet d'ondes incident a une très faible largeur en impulsion,
3. et qu'il est à résonance parfaite pour sa porteuse,

pour retrouver les modélisations simplifiées antérieures du type modélisation *infinitement fine* ou *ttt champ faible*.

Pour ce faire, il est en effet **nécessaire de faire également l'une des approximation suivante** :

- 4.a. **soit la durée d'interaction laser est supposée infiniment courte** :

$$\tau \longrightarrow 0 \quad \text{en gardant le produit } \Omega_0 \tau \text{ constant}$$

- 4.b. **soit tous les effets dispersifs propres à la séparatrice sont négligés.**

Dans ces deux cas, on observe alors bien que les quantités $(\omega - \omega_0 - \delta) \tau$, $\frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau$, $coef$ et b_c tendent vers 0, et l'on retrouve bien la forme des modélisations antérieures, où le déphasage supplémentaire $(\omega - \omega_0 - \delta) \tau/2$, le décalage spatial en fin d'interaction $\frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau$, et les modifications de largeur $[i b_c \pm coef * \Omega_0 \tau] \vec{\delta} / \Omega_0^2$ sont négligés.

Conclusion :

L'étude de la triple interaction "laser - matière - champs inertiels et gravitationnels" exposée dans ce chapitre aboutit finalement à une modélisation performante des séparatrices laser temporelles en présence de tels champs extérieurs.

Dans la suite logique de la *modélisation ttt champ faible*, qui a permis de justifier et d'améliorer les modélisations antérieures du type "*amplitude + phase + changement d'impulsion*" (comme celle infiniment fine par exemple), cette "*modélisation ttt champ fort généralisée*" permet en effet de rendre compte de quasiment tous les effets majeurs d'une séparatrice temporelle sur un paquet d'ondes atomique incident :

- la structuration en plusieurs paquets d'ondes, dont deux principaux,
- le changement global d'amplitude (oscillations de Rabi),
- la sélectivité (complexe) en vitesse transverse,
- les changements de phase et d'impulsion,
- l'apparition de deux vitesses de groupe distinctes, symétriques par rapport à la vitesse médiane $\vec{p}_0/m + \hbar \vec{k}/2m$

Ce résultat, qui est issu d'un traitement *en champ fort* :

- de l'impulsion laser
- des *champs inertiels et gravitationnels* (ceux du chapitre précédent, pour H_{ext} au plus quadratique en position et impulsion),

rend également compte d'effets nouveaux ou très peu connus, comme :

- le *décalage spatial* en fin d'interaction pour les paquets d'ondes n'effectuant pas de transition interne du type $a \mapsto a$ ou $b \mapsto b$ (dû à la présence des vitesses de groupe précédentes),
- le fait que l'*étalement* d'un des deux paquets d'ondes principaux soit *moins rapide* que l'étalement naturel (et qu'il soit plus rapide pour l'autre).

De plus, grâce à la propriété très importante sur la fonction génératrice des modes Hermito-Gaussiens, ce résultat ne s'applique pas uniquement aux paquets d'ondes atomiques Gaussiens, mais à tout mode Hermito-Gaussiens, et par conséquent à *tout type de paquet d'ondes* atomique.

Cette modélisation est néanmoins **loin d'être exhaustive**. Pour cela, il faudrait qu'elle tienne compte de **modulations temporelles et spatiales plus complexes** de l'amplitude du champ laser (profils Gaussiens par exemple). De plus, il faudrait qu'elle rende compte des lobes secondaires, ie de la **structuration plus fine** du paquet d'ondes incident (lobes secondaires du sinus cardinal par exemple). Si ce phénomène est facile à intégrer dans la modélisation - en ajoutant des polynômes d'Hermite - dans le cas des transitions avec changement d'état interne (du type $a \mapsto b$ ou $b \mapsto a$), ce n'est pas le cas pour les autres transitions ($a \mapsto a$ ou $b \mapsto b$), pour lesquelles il faut remettre en cause la *méthode* de modélisation.

Par ailleurs, nous n'avons pas tenu compte du **changement de masse effective** qui a lieu quand on change de niveau interne (et qui entraîne l'apparition de **corrections relativistes** comme l'effet Doppler du second ordre). Il faudrait donc, en toute rigueur, reprendre les précédents calculs (et modélisations) en faisant apparaître explicitement les deux masses effectives m_a et m_b (voir la partie 3.2 de ce chapitre). Par chance, les vitesses atomiques considérées sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière, et l'effet Doppler du second ordre reste par conséquent très faible. Il peut donc être négligé en première approximation. Ces corrections relativistes seront toutefois prises en compte dans l'évolution

des paquets d'ondes entre les séparatrices (zones sombres), et par conséquent dans la modélisation globale des interféromètres atomiques (voir le chapitre suivant).

Enfin, cette *modélisation ttt champs forts* suppose que les **termes quadratiques de H_{ext}** (ie principalement les rotations et les gradients d'accélération et de gravité) sont **suffisamment faibles** pour pouvoir résoudre facilement l'équation fondamentale $\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t) |\varphi(t)\rangle$. Ceci est vrai pour les données usuelles (rotations et gradients terrestres ou artificiels), mais peut être mis en défaut pour des rotations artificielles importantes ou pour de forts gradients d'accélération (lors de chocs violents).

Chapitre 4

Modélisation des interféromètres atomiques

Un interféromètre atomique est constitué de quatre zones spatio-temporelles distinctes : la **zone source**, d'où sont issus les atomes qui vont être lâchés ou lancés dans l'interféromètre ; les **séparatrices** (miroirs et lames semi-réfléchissantes) servant à diviser, défléchir et recombiner les paquets d'ondes atomiques dans l'interféromètre ; les **zones sombres** entre les séparatrices ; et la **zone de détection**, qui fournit le signal de franges (amplitude, contraste et déphasage).

Jusqu'à récemment, le calcul du déphasage global consistait alors à identifier deux bras interférométriques, à calculer la phase totale (directement reliée à la modélisation des zones précédentes) accumulée par chacun des bras, et à en évaluer la différence (en un point particulier ou après intégration sur un certain volume d'espace-temps). Les possibilités d'améliorer ce calcul de déphasage - et par la même la modélisation des interféromètres atomiques - sont ainsi de deux types :

- par l'amélioration de la **modélisation de chacune des zones** de l'interféromètre,
- et par l'amélioration de la **méthode de calcul du signal de franges**.

C'est précisément l'objet de ce chapitre.

On commence ainsi par détailler les modélisations que l'on considère pour chaque élément constitutif d'un interféromètre à ondes de matière. Concernant les sources atomiques, on examine entre autres la possibilité de les décrire de façon unifiée, quelque soit leur température cinétique et les mécanismes de piégeage et de refroidissement qui leur sont associées (sources thermiques, froides ou ultra-froides). La modélisation des séparatrices établie au chapitre précédent, ainsi que son domaine de validité, sont alors rappelés en détail. On introduit en outre deux autres modélisations, plus simples à utiliser et de complexité décroissante, l'objectif étant de faire le lien avec les modélisations antérieures des séparatrices, du type infiniment fine et ttt champ faible, et de les comparer. Quelques résultats du chapitre 2 sont ensuite rappelés (théorème ABCD sur l'évolution d'ondes matérielles en présence de champs inertiels et gravitationnels), et l'on finit cette partie en examinant l'effet, sur le signal de franges, de la prise en compte de plusieurs processus de détection.

Dans un deuxième temps, on propose une nouvelle approche des interféromètres ainsi qu'une nouvelle méthode de calcul du signal de franges, valable pour tout type d'interféromètre et de séparatrice atomiques. L'interféromètre n'est alors plus vu comme l'évolution indépendante de deux bras dont on prend la différence de phase en sortie, mais comme l'évolution d'une seule entité (à plusieurs bras) caractérisée par les déphasages instantanés entre chaque paire de bras. L'interféromètre est alors découpé en tranches temporelles et en paires de "chemins homologues", pour lesquelles on montre comment l'utilisation de certains invariants symplectiques permet de grandement simplifier l'expression du déphasage instantané ("théorème des quatre points finaux").

Enfin, dans une troisième partie, on montre comment utiliser tous ces outils pour obtenir l'expression du signal de franges complet (amplitude, contraste et déphasage) pour deux types de modélisation

des séparatrices : d'abord avec les modélisations infiniment fine et ttt champ faible, puis avec les modélisations ttt champs forts de la partie 4.1.2. Le signal de sortie est donné *avant et après* prise en compte d'un processus de détection, ainsi qu'*avant et après* intégration sur les distributions statistiques décrivant le nuage atomique initial. Plusieurs points sont plus particulièrement détaillés :

1. l'origine symplectique de la compensation essentielle entre le *déphasage* dit *de propagation* et le *déphasage* dit *de séparation*,
2. l'équivalence de tout interféromètre atomique avec une ligne de points milieux (classiques) soumise à des interactions effectives,
3. la nature des modifications du déphasage liées à la prise en compte des modélisations ttt champs forts.

4.1 Modélisation des différents éléments d'un interféromètre atomique

4.1.1 Modélisation de la source atomique

En interférométrie atomique, une "source atomique" est un ensemble de particules de matière (par exemple des atomes, des molécules...) ¹ ayant des caractéristiques (internes et externes) semblables et bien contrôlées, et dont on utilise les propriétés ondulatoires pour mesurer l'effet de potentiels extérieurs (champs inertiels, gravitationnels, électromagnétiques...). Seuls certains des paramètres caractéristiques de ce *nuage atomique* sont accessibles à la mesure, comme par exemple les distributions en position (par imagerie) et en impulsion (par temps de vol - TOF en anglais - ou par mesure directe de la fonction de cohérence spatiale (égale à la transformée de Fourier de la distribution en impulsion) pour les sources très froides, sub-recoil ou condensées). On peut alors définir une température fictive T_c à partir de la largeur σ_v de la distribution en vitesse mesurée ², et ainsi classer les types de sources selon leur *temperature cinétique* T_c :

$$T_c := \frac{m\sigma_v^2}{k_B}$$

Typiquement, les sources utilisées actuellement se classent en trois catégories : les sources chaudes (thermiques), les sources froides (issues de pièges magnéto-optiques (MOT), de mélasses optiques, de pièges dipolaires...), et les sources ultra-froides (condensats de Bose-Einstein (BEC), quasi-condensats, lasers à atomes...).

La zone "source atomique" est alors presque toujours constituée de quatre phases (dans cet ordre ou non) :

- préparation (dont production des atomes, puis piégeage et refroidissement),
- coupure du potentiel piégeant (adiabatiquement ou non) ³,
- sélection finale (excitation, avec refroidissement supplémentaire ou non),
- lancement (ou lâcher) dans l'interféromètre.

Dans cette partie, nous cherchons précisément à modéliser cette zone "source atomique", de la façon la plus *simple* et néanmoins la plus *fidèle* possible, en essayant d'obtenir une description *unifiée* des différentes sources précédentes qui soit *compatible* avec le formalisme mis en place dans les chapitres précédents (théorème *ABCD* et modélisations *ttt*).

¹Dans la suite, on parlera essentiellement des sources d'atomes.

²Les densités atomiques typiques des sources froides sont généralement trop faibles pour que les collisions conduisent à un équilibre thermodynamique, et que l'on puisse alors définir une véritable température thermodynamique.

³On ne peut pas véritablement parler de "potentiel piégeant" dans le cas, par exemple, des mélasses optiques. Il vaut mieux parler de force de pression de radiation.

Fonction d'onde et mélange statistique d'états

Lorsque l'on cherche à décrire les sources atomiques précédentes, il est souvent très utile d'introduire leur cohérence spatiale :

$$\mathcal{L} \sim \frac{\hbar}{2m\sigma_v}$$

où \mathcal{L} est la *longueur de cohérence du nuage* (à trois dimensions, il y a en toute rigueur trois longueurs de cohérence⁴ associées à chaque direction propre de l'espace des vitesses - après diagonalisation de la matrice de largeur en vitesse). Cette taille caractéristique définit alors une échelle spatiale au-dessus de laquelle les corrélations inter-atomiques disparaissent (par exemple, deux atomes de la source séparés d'une distance inférieure à \mathcal{L} donnent naissance à des interférences, dont le contraste s'annule pour des distances supérieures à \mathcal{L} . La mesure du contraste permet ainsi d'avoir directement accès à cette longueur de cohérence).

De façon plus précise, la longueur de cohérence \mathcal{L} peut être définie comme la largeur de la transformée de Fourier de la distribution en impulsion du nuage atomique (qui n'est, attention, pas égale à la distribution en position), connue également sous le nom de fonction de cohérence spatiale.

On peut ainsi classer les sources atomiques en fonction du rapport \mathcal{L}/D , où D est la taille caractéristique du nuage. Cela permet de distinguer les *sources cohérentes* (condensats par exemple), pour lesquelles $\mathcal{L} \sim D$, des *sources incohérentes* ($\mathcal{L} \ll D$), et plus généralement des *sources partiellement cohérentes* (pour $\mathcal{L} < D$).

Selon le type de source atomique, la modélisation sera alors a priori très différente. En effet, si les sources cohérentes peuvent être décrites par une *unique fonction d'onde* (ou plus généralement par une superposition linéaire de fonctions d'onde), on ne peut toutefois pas se contenter d'une seule fonction d'onde dès lors que $\mathcal{L} < D$, et l'on doit dans ce cas considérer en toute généralité un *mélange statistique d'états*. Par exemple, on peut décrire un nuage thermique (haute température T_c ou très faible rapport \mathcal{L}/D) par un ensemble de paquets d'ondes, dont les centres - en position et en vitesse - obéissent à des distributions statistiques, que l'on peut relier facilement aux distributions effectivement mesurées (par imagerie CCD et TOF par exemple).

Dans les cas intermédiaires (sources froides non condensées), les éléments non-diagonaux de l'opérateur densité (les cohérences) deviennent importants, mais il n'est pas non plus possible de se contenter d'une description par une unique fonction d'onde, et il faut alors considérer un mélange statistique d'états. En fait, il n'existe pas de modélisation universelle de ces diverses sources froides, et il faut à chaque fois revenir à leur méthode d'obtention. Nous allons voir en particulier que la modélisation de ces sources dépend fortement de la présence d'un réseau (sous-jacent) de puits de potentiels microscopiques, dans lesquels les atomes peuvent être piégés ou non.

En toute généralité, on doit donc considérer un mélange statistique d'états, caractérisé - comme son nom l'indique - par un ensemble d'états dépendant de paramètres $param_1, param_2, \dots$, dont certains obéissent à une distribution statistique (par exemple, distributions en position et vitesse centrales de paquets d'ondes). Les "états atomiques" peuvent alors être décrits par des *vecteurs d'états* ou par un *opérateur densité*.

Néanmoins, on n'a pas accès expérimentalement à ces fonctions d'onde typiques (associées aux états du mélange), mais seulement à certaines distributions de ces états. De plus, d'un point de vue théorique, les études concernant ces sources froides ne portent pas sur l'évolution de fonctions d'onde, mais essentiellement sur l'évolution de l'opérateur densité ou des distributions en vitesse et position (équation de Fokker-Planck). L'opérateur densité est en effet un outil souvent plus complet et plus adapté à l'étude des processus mis en jeu dans ce type de source (prise en compte de l'émission spontanée, des collisions...).

⁴L'usage veut que l'on parle de *longueur de cohérence* si l'on se place selon la direction de propagation du nuage atomique, et de *largeurs de cohérence* (ou longueurs de cohérence transverse) pour les autres directions (transverses).

Pour être en accord avec le formalisme développé dans les chapitres précédents (théorème ABCD sur l'évolution de paquets d'ondes atomiques, modélisation ttt des séparatrices), il nous est pourtant nécessaire d'utiliser la première approche, en termes de fonctions d'onde.

Comme on l'a dit, il est plus juste de considérer l'évolution de l'opérateur densité, afin de rendre compte, entre autres, des phénomènes de relaxation. Ce type de phénomène étant généralement négligeable dans les expériences d'interférométrie atomique, nous pouvons nous restreindre à l'étude de simples fonctions d'onde (dont on maîtrise bien l'évolution en présence de champs inertiels, gravitationnels et électromagnétiques). Néanmoins, dans une deuxième phase de modélisation des interféromètres atomiques, il sera nécessaire de considérer l'évolution d'un opérateur densité. Signalons qu'un tel travail a déjà été entrepris par Bordé dans [106].

Pour décrire les sources précédentes à l'instant initial t_0 , il nous faut donc finalement considérer un mélange statistique d'états, exprimé à l'aide de *fonctions d'ondes élémentaires* :

$$\psi_0(\text{param}_1, \text{param}_2, \dots) \quad (= \psi_0(\vec{r}_0, \vec{p}_0 \dots))$$

(dont il faut préciser la forme et les paramètres) et d'une ou plusieurs *distributions statistiques* :

$$\mathcal{D}_{\text{param}_i}, \mathcal{D}_{\text{param}_j} \dots$$

portant sur certains paramètres pertinents (densités de probabilité $\mathcal{D}_{\vec{r}_0}$ et $\mathcal{D}_{\vec{p}_0}$ sur les positions et vitesses centrales pour un nuage thermique par exemple). Dans un tel cas, le signal de sortie s'exprimera alors comme la somme pondérée (discrète ou continue) des signaux de sortie élémentaires :

$$S^* = \int \mathcal{D}_{\text{param}_i} \int \mathcal{D}_{\text{param}_j} \dots |\psi_S(\text{param}_1, \text{param}_2, \dots)|^2$$

(avant intégration sur le volume de détection, voir partie 4.3.2).

Signalons que cette recherche (des fonctions d'ondes élémentaires et des distributions statistiques les plus pertinentes) n'est pas simple. Nous allons voir qu'elle dépend fortement de la méthode utilisée pour refroidir les atomes. En particulier, la présence d'un réseau optique sous-jacent sera essentielle.

Premier bilan :

Soit d la taille typique d'un piège microscopique du réseau (voir ci-après pour l'interprétation du potentiel de déplacement lumineux comme un réseau de pièges élémentaires de taille comparable à la longueur d'onde laser), il est alors possible d'affiner le classement précédent des sources atomiques en définissant quatre catégories selon la valeur des rapports \mathcal{L}/D et \mathcal{L}/d :

- $\mathcal{L}/D \sim 1$: sources cohérentes (BEC, lasers à atomes...) pouvant être décrites par une unique fonction d'onde ⁵ :

$$S^* = |\psi_S(\text{param}_1, \text{param}_2, \dots)|^2$$

- $\mathcal{L}/D < 1$ et $\mathcal{L}/d \gtrsim 1$: sources froides partiellement cohérentes (quasi-condensats...) dont nous dirons quelques mots plus loin

⁵Cette fonction d'onde est réelle avant coupure du potentiel piégeant et explosion ballistique due aux interactions atomiques.

- $\mathcal{L}/d < 1$ (mais pas $\ll 1$) : sources froides incohérentes⁶ (MOT, mélasses optiques...), dont la modélisation en terme de distributions statistiques n'est pas unique, comme nous allons le voir ci-après
- $\mathcal{L}/d \ll 1$: sources chaudes (nuages thermiques...) décrites par un mélange statistique de fonctions d'ondes typiques associées à chaque atome, avec comme distributions principales les distributions en position et vitesse issues des mesures évoquées précédemment (imagerie CCD et TOF) :

$$S^* = \int \mathcal{D}_{\vec{r}_0} \int \mathcal{D}_{\vec{v}_0} \dots |\psi_S(\vec{r}_0, \vec{v}_0 \dots)|^2$$

En ce qui concerne les fonctions d'onde atomiques typiques, on a le choix entre plusieurs bases de fonctions. On pourrait considérer des distributions d'ondes planes, mais ce choix serait très éloigné des réalités expérimentales (les ondes planes ne sont bien sûr pas physiques), et il faudrait définir ce que l'on entend par position **et** impulsion centrales dans ce cas (on peut néanmoins effectuer les calculs avec une telle pseudo-base et reconstruire après coup des paquets d'ondes physiques). Les paquets d'ondes élémentaires *physiques* les plus simples sont alors les *paquets d'ondes Gaussiens*. C'est donc ceux que nous choisirons par la suite :

$$\text{nuage thermique : } \psi_0 = \text{Gaussienne}$$

d'autant plus que le formalisme développé dans les chapitres précédents est particulièrement bien adapté au traitement de telles fonctions d'ondes.

Il nous faut maintenant modéliser les "sources froides incohérentes".

Modélisation des sources froides

Recherche des fonctions d'ondes élémentaires ψ_0 :

Il n'est pas facile de déterminer ces fonctions d'onde élémentaires ψ_0 , et on peut même se demander à quel point ce concept de fonction d'onde (associé à une ou plusieurs distributions statistiques) rend compte d'une réalité expérimentale. Expérimentalement, en effet, nous pouvons avoir accès à certaines distributions (en position, en vitesse...), mais pas à des fonctions d'onde. De même, d'un point de vue théorique, les études des sources froides portent sur l'évolution de matrices densités ρ dont il est souvent difficile - voire impossible - d'extraire des fonctions d'onde (pour deux niveaux a et b , le lien entre ρ et (ψ_a, ψ_b) est univoque (à une phase près), mais ce n'est pas le cas à plus de deux niveaux).

Ainsi, pour les sources atomiques issues de MOT ou de mélasses optiques, Drewsen et al. [208] ont montré que l'on pouvait qualitativement se restreindre à l'étude d'un atome à $3 + 5$ niveaux (du type $j = 1, j = 2$) soumis à plusieurs champs lasers et champs magnétiques. Les calculs effectués dans [209] montrent alors que les états stationnaires sont proches de fonctions Lorentziennes :

$$\begin{array}{|c|} \hline b : \quad \bar{-2} \quad \bar{-1} \quad \bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{2} \\ \hline a : \quad \quad \bar{-1} \quad \bar{0} \quad \bar{1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{champs lasers} \\ \text{et magnétiques} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \rho_{b0,st} \text{ et } \rho_{a0,st} \sim \text{Lorentziennes} \\ \hline \end{array}$$

mais il n'est pas possible d'avoir accès à deux fonctions d'ondes effectives ψ_{b0} et ψ_{a0} , même si on peut supposer qu'elles sont également de forme Lorentzienne.

⁶Les sources froides issues de MOT ou de mélasses optiques sont qualifiée d'incohérentes du fait de l'émission spontanée, essentielle dans ce type de processus. Cela ne signifie pas pour autant que $\mathcal{L} = 0$.

Une autre approche de ce problème - qui semble plus adaptée, car elle traite de fonctions d'onde - est la méthode des fonctions d'onde stochastiques [210, 211, 212]. Hélas, cette méthode puissante (surtout pour effectuer des simulations numériques par méthode Monte-Carlo) ne permet en fait d'avoir accès qu'aux distributions atomiques (après moyennage temporel), et non à des fonctions d'onde initiales typiques.

Face à cette impossibilité, il est intéressant de revenir sur la méthode d'obtention de ces sources d'atomes froids, et plus particulièrement sur la pertinence de considérer les atomes évoluant dans un réseau tridimensionnel de pièges microscopiques. Les sources froides dont on parle ici font référence aux nuages atomiques issus d'un refroidissement Doppler (mélasses optiques simples [213, 214, 215]) ou sub-Doppler (MOT [216, 217, 218], mélasse optique $\sigma^+ - \sigma^-$ [219, 220, 221], refroidissement Sisyphé avec configuration $lin \perp lin$ [219, 222, 223] ou assisté magnétiquement [219, 224, 225]...).

Comme on le verra au paragraphe suivant, la dynamique des sources atomiques froides utilisées en interférométrie atomique est souvent décrite à l'aide d'une approche semi-classique en négligeant la quantification du mouvement externe des atomes. L'équation de Fokker-Planck obtenue suppose alors que les atomes sont suffisamment rapides pour ne pas sentir les modulations spatiales du potentiel de déplacement lumineux (ce potentiel reflète le déplacement des niveaux d'énergie des atomes dû au couplage avec les champs laser, appelé aussi effet Stark dynamique). Dit autrement, les atomes sont supposés avoir une énergie cinétique plus élevée que le potentiel créé par les déplacements lumineux⁷, et les coefficients de friction et de diffusion de l'équation de Fokker-Planck (voir ci-après) peuvent alors être considérés comme constants (après moyennage spatial). Dans ce cas, on obtient une description similaire à celle des atomes chauds (nuage thermique), avec des distributions Gaussiennes en vitesse et en position.

Inversement, si le potentiel de déplacement lumineux est comparable à l'énergie cinétique des atomes, ceux-ci en ressentent beaucoup plus les modulations spatiales, et ils peuvent rester piégés dans ses minima microscopiques⁸. On ne peut plus alors négliger la quantification de l'état externe des atomes, et l'on doit changer de description en considérant non pas un ensemble d'atomes globalement piégé, mais plutôt un ensemble de pièges élémentaires fortement ou faiblement occupés, ie un réseau.

Bien sûr, cette modélisation n'est valable que pour les méthodes de refroidissement faisant apparaître des modulations spatiales du potentiel de déplacement lumineux. C'est le cas du *refroidissement Sisyphé* (direct avec une configuration $lin \perp lin$, ou indirect avec un champ magnétique faible), mais pas des refroidissements sous forme de *mélasses optiques* (Doppler simple ou sub-Doppler avec mélasse optique $\sigma^+ - \sigma^-$) ou de MOT.

Dans ces derniers cas, il n'y a pas de réseau optique bien défini, et la modélisation la plus simple consiste à continuer à négliger la quantification de l'état externe des atomes. On peut alors considérer des fonctions d'ondes Lorentziennes, comme les études théoriques semblent l'indiquer, ou changer de point de vue en considérant des paquets d'ondes Gaussiens minimaux (ie cohérents) dont la largeur en position est égale à la longueur de cohérence \mathcal{L} du nuage (interprétation du nuage comme un ensemble de paquets d'atomes cohérents) :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{mélasse Doppler} \\ \text{MOT} \\ \text{mélasse optique } \sigma^+ - \sigma^- \end{array}} \implies \psi_0 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Lorentziennes} \\ \text{ou} \\ \text{Gaussiennes minimales de largeur } \mathcal{L} \end{array} \right.$$

⁷La vitesse des atomes est considérée comme constante sur des distances de l'ordre de plusieurs longueurs d'onde laser. Cela revient en fait à négliger le recul dû aux phénomènes d'absorption et d'émission de photons par rapport à la vitesse des atomes.

⁸Même si l'on néglige le piégeage possible des atomes dans ce réseau optique, nous verrons au paragraphe suivant que leurs distributions en position et en vitesse ne sont plus de simples Gaussiennes. Cela vient du fait que l'on ne peut plus considérer la vitesse des atomes comme constante sur plusieurs longueurs d'onde laser.

Quant aux autres sources atomiques (*avec effet Sisyphe*), elles peuvent être vues comme des *réseaux de pièges élémentaires* (périodiques, isotropiques et à trois dimensions) dont la taille caractéristique est de l'ordre d'une longueur d'onde laser.

Du fait des données expérimentales usuelles, on obtient alors :

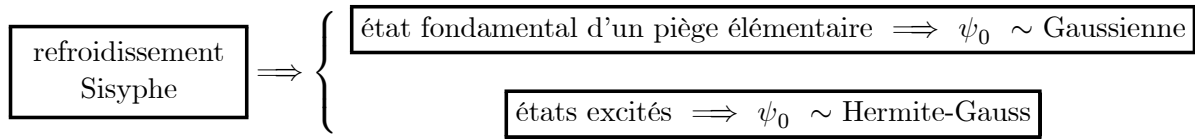
$$\left. \begin{array}{l} \text{volume du nuage atomique} \sim 1 \text{ mm}^3 \\ \lambda_{\text{laser}} \text{ typique} \sim 1 \mu\text{m} \end{array} \right\} \implies \sim 10^9 \text{ pièges élémentaires}$$

qui montre qu'en moyenne les pièges élémentaires sont *faiblement occupés* pour les densités atomiques utilisées :

$$N_{\text{at}} \lesssim 10^8 \implies 0.1 \text{ atome par piège en moyenne}$$

et que l'on peut considérer en moyenne un seul atome par piège.

Cet atome évolue alors dans un puits de *potentiel quasi-harmonique* dont on connaît bien les fonctions propres, même en présence d'autres potentiels liés à des effets inertiels et gravitationnels (formalisme ABCD pour Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion) : ce sont les modes Hermite-Gaussiens détaillés dans la partie 2.3. Les fonctions d'ondes recherchées sont donc égales à des Gaussiennes lorsque les atomes correspondant sont dans l'état fondamental du piège élémentaire, et égales à des fonctions d'Hermite-Gauss lorsqu'ils sont dans les états excités :



Par exemple, pour T_c tendant vers zéro, tous les atomes sont dans l'état fondamental Gaussien, et lorsque T_c augmente, les niveaux excités (discrets) Hermite-Gaussiens se peuplent progressivement (suivant une statistique de Boltzmann par exemple). Enfin, lorsque T_c est suffisamment élevée, les niveaux excités s'étalent de façon quasi-continue, et on retrouve le mélange statistique usuel des nuages atomiques thermiques.

Soulignons ici la puissance du formalisme ABCD, qui permet de s'affranchir de l'hypothèse d'un arrêt instantané du potentiel de piégeage (gradient de champ magnétique pour les MOT, ou champs lasers pour les refroidissements Sisyphe) et de rendre compte d'une coupure adiabatique du piège. En effet, pour un potentiel harmonique dépendant du temps (décroissance linéaire par exemple entre t_0 et $t_0 + T_0$), on peut encore calculer les matrices ABCD régissant l'évolution des paquets d'ondes atomiques, et ainsi approcher au mieux l'état atomique au temps $t_0 + T_0$ après coupure adiabatique du piège (voir la figure 4.1).

Recherche des distributions pertinentes :

Contrairement à la recherche précédente, nous disposons - tant d'un point de vue théorique qu'expérimental - de plusieurs études sur les distributions principales (ie en position et en vitesse) des sources atomiques froides, du type de celles issues d'un MOT ou d'une mélasse optique (avec refroidissement sub-Doppler ou non).

Comme on l'a dit précédemment, les modélisations théoriques usuelles s'appuient sur l'équation de Fokker-Planck [226, 209] :

$$\partial_t w + \vec{v} \cdot \partial_{\vec{r}} w = -\partial_{\vec{p}} \cdot \left(\vec{F} \cdot w \right) + \partial_{p_i} \partial_{p_j} (D_{ij} \cdot w) \quad (4.1)$$

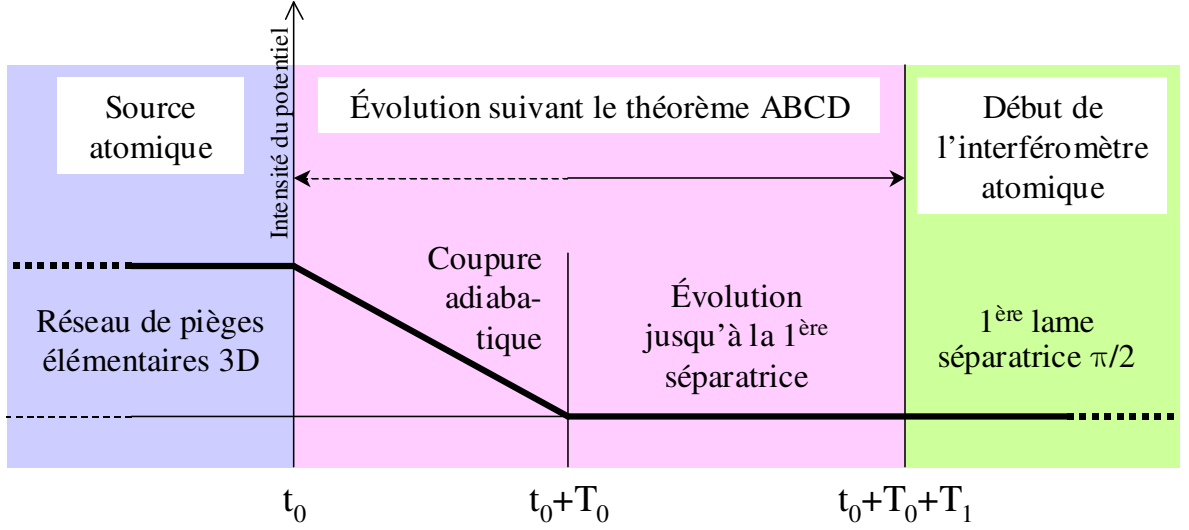


FIG. 4.1: Schéma typique d'évolution du nuage atomique incident avant la première séparatrice d'un interféromètre atomique.

où $w(\vec{r}, \vec{p}, t)$ est la fonction de Wigner d'où l'on extrait les distributions en position $R(\vec{r})$ et en impulsion $P(\vec{p})$, et où les deux sources d'évolution sont respectivement la force de radiation dipolaire (friction) et la diffusion d'impulsion. Une étude de cette équation dans le cas général (ie à 3D et entre les niveaux atomiques j et $j+1$) est détaillée dans la référence [209].

Lorsque l'on considère le modèle le plus simple :

$$\vec{F} = -\vec{A} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{D} : \text{indépendant de } \vec{v}$$

(valable pour les faibles vitesses), l'état stationnaire de l'équation 4.1 est alors une fonction Gaussienne :

$$P(\vec{p}) = w_0 e^{-\frac{1}{2m} \vec{p} \cdot D^{-1} A \cdot \vec{p}}$$

mais dans le cas général $\vec{F}(\vec{v})$ et $\vec{D}(\vec{v})$ dépendent de la vitesse d'une façon moins triviale, et $P(\vec{p})$ n'est plus une Gaussienne.

En outre, pour les MOT, la présence de gradients de champ magnétique implique que la force dissipative dépend également du vecteur position : $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$, ce qui rend encore plus complexe la résolution de 4.1.

Remarquons alors que - pour aller au-delà du régime linéaire précédent - Castin et al. [227, 228] ont montré qu'il fallait considérer (refroidissement Sisyphes pour des atomes à deux niveaux seulement) :

$$\vec{F}(\vec{v}) = -\frac{\alpha \vec{v}}{1 + (\vec{v}/\vec{v}_c)^2} \quad \text{et} \quad \vec{D}(\vec{v}) = D_1 + \frac{D_2}{1 + (\vec{v}/\vec{v}_c)^2}$$

où \vec{v}_c est une vitesse atomique typique au-dessus de laquelle le mécanisme de refroidissement Sisyphes s'arrête. Dans ce cas, on obtient comme distribution en vitesse la fonction de Tsallis [227, 229] :

$$P_{st}(\vec{p}) = w_0 (1 + \beta (1 - q) \vec{p}^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

avec :

$$\begin{cases} q := 1 + \frac{2mD_1}{\alpha \vec{v}_c^2} \\ \beta := \frac{\alpha/2m}{D_1 + D_2} \end{cases}$$

qui permet - selon la valeur de q et de D_1 - de couvrir une large gamme de fonctions allant de la fonction Lorentzienne (pour $q = 2$) à la fonction Gaussienne (pour q tendant vers 1). Récemment

Jersblad et al. [230] ont testé ce modèle en comparant les distributions expérimentales aux courbes théoriques (Lorentzienne, Tsallis, somme de plusieurs Gaussiennes...) pour mettre en évidence leur écart à une distribution Gaussienne.

D'un point de vue expérimental, les distributions en position et vitesse des nuages d'atomes froids (MOT ou mélasses optiques) ont jusqu'à récemment été approchées au mieux par des fonctions *Gaussiennes* [208, 230]. Mais des différences notables ont été observées, tant sur la *forme des fonctions* servant à approcher les courbes (Lorentzienne, Tsallis...) que sur le *nombre de fonctions* nécessaires (régime à deux composantes par exemple).

Ainsi, en 1995, Townsend et al. [218] ont montré que les nuages atomiques issus d'un MOT étaient constitués - selon la valeur de la densité atomique - d'une ou deux composantes Gaussiennes pour les deux distributions (en position et en vitesse) :

$$R(\vec{r}) \text{ et } P(\vec{p}) = \sum \text{ de 2 Gaussiennes}$$

En effet, lorsque la densité augmente, le nuage atomique grossit, et les atomes au bord du nuage ne ressentent plus le gradient de champ magnétique; ils subissent alors simplement un refroidissement Doppler. Il en résulte deux composantes superposées : une sub-Doppler (piégée) et une Doppler (au-dessus du piège). On retrouve également cette *structure bi-modale* dans le cas du refroidissement Sisyphes [230, 231], où une partie des atomes est piégée dans le réseau formé par la modulation spatiale du déplacement lumineux (atomes de faible énergie), et où l'autre partie évolue plus ou moins librement au-dessus de ce réseau (atomes plus "chauds"). Signalons pour finir que ce type de structure bimodale est courant pour les sources ultra-froides dont une partie seulement des atomes est condensée.

De plus, des différences de *forme* de fonction ont été observées. Ainsi, Sortais et al. [232] ont obtenu une fonction Lorentzienne comme fonction approchant au mieux la courbe de distribution en vitesse de leur MOT 3D de Rubidium. De même, Jersblad et al. [230] ont étudié quelles étaient les meilleures approximations de la distribution en vitesse d'un nuage d'atomes froids de Césium issu d'un réseau optique (important dans notre cas, pour des sources issues d'un refroidissement Sisyphes 3D par exemple [voir paragraphe précédent]). Leur conclusion est que les fonctions conduisant aux meilleures approximations sont :

$$\begin{aligned} &\text{une Lorentzienne} \\ &\text{ou} \\ &\text{une somme de 2 Gaussiennes.} \end{aligned}$$

Il semble donc - au vu des études théoriques et expérimentales - que les distributions en position et en vitesse sont approchées au mieux par des fonctions Lorentziennes ou par une somme de deux Gaussiennes. Dans le cadre de notre formalisme, et comme nous l'avons déjà souligné, le plus pratique est finalement de considérer des sommes de fonctions Gaussiennes :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\vec{r}0} \text{ et } \mathcal{D}_{\vec{p}0} = \sum \text{ de 2 Gaussiennes}}$$

Avant d'aller plus loin, il faut souligner le fait que ces études présentent l'inconvénient majeur de ne pas chercher à *modéliser* les sources atomiques froides, mais seulement à en mesurer les principales caractéristiques. On peut alors se demander si les deux distributions précédentes (sur les positions et impulsions centrales des paquets d'ondes associés à chaque atome du nuage) sont les plus pertinentes pour modéliser une source froide issue d'un MOT ou d'une mélasse optique.

Comme au paragraphe précédent, revenons donc à la méthode de refroidissement considérée. On a en effet déjà souligné le fait que certaines de ces méthodes - lorsque le potentiel de déplacement lumineux était comparable à l'énergie cinétique des atomes - étaient équivalentes à piéger une partie des atomes dans un réseau optique (pièges élémentaires quasi-harmoniques à 3 dimensions, où il y a

moins d'un atome par piège (ie occupation des pièges ~ 0 ou 1). On a vu également que les modes propres de chacun des pièges élémentaires constituant ce réseau étaient des fonctions d'Hermite-Gauss (Gaussienne pour l'état fondamental et modes Hermite-Gaussiens pour les états excités).

Pour T_c proche de 0 K , tous les atomes sont dans l'état fondamental, ie qu'ils sont décrits par une fonction d'onde Gaussienne. Pour une source très froide, la partie des atomes non-condensée (qui augmente lorsque T_c augmente) peut donc être modélisée par un ensemble de paquets d'ondes Gaussiens, centrés sur les pièges, ayant une vitesse moyenne nulle (dans le référentiel du piège), et distribués spatialement (sur le volume du nuage). Lorsque T_c augmente, la largeur de la distribution en vitesse du nuage augmente, non pas à cause d'une diminution de la taille des pièges élémentaires (qui reste de l'ordre de la longueur d'onde laser), mais du fait que certains atomes passent du niveau fondamental aux premiers états excités. On peut ainsi interpréter l'élargissement de la distribution en vitesse du nuage comme une conséquence du peuplement progressif des niveaux excités des pièges individuels. Il semble donc plus rigoureux de considérer une *distribution de ces niveaux vibrationnels* plutôt qu'une distribution en vitesse.

Cette distribution des taux d'occupation est alors une distribution discrète (qui devient quasi-continue pour T_c élevée) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_0.N_{at} & \text{dans le mode 0 (Gaussien)} \\ \alpha_1.N_{at} & \text{dans le mode 1} \\ \alpha_2 & 2 \\ \dots & \end{array} \right.$$

avec : $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 1$

et où les coefficients α_i vérifient une statistique de Boltzmann ($\alpha_0 = 1$ quand $T_c \rightarrow 0\text{ K}$).

Remarquons également qu'il n'est pas juste de considérer un mélange de paquets d'ondes distribués *à la fois spatialement et impulsionnellement*.

En effet, si la distribution des positions centrales de ces paquets est justifiée, celles des impulsions centrales l'est beaucoup moins. La distribution en impulsion mesurée expérimentalement concerne en effet le nuage entier, et non les paquets d'ondes constituant le nuage. L'impulsion centrale de chaque paquet d'ondes est en fait bien déterminée, et sa distribution ne doit refléter simplement que son imprécision (par exemple celle causée par les lasers servant à piéger et à pousser les atomes). C'est finalement la largeur en impulsion de chaque paquet d'ondes qui doit rendre compte de la distribution en impulsion du nuage. Il en résulte que la seule distribution pertinente s'avère être celle sur les positions centrales de ces paquets d'ondes, paquets dont la largeur en position est égale à la longueur de cohérence $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m\sigma_v}$.

une seule distribution pertinente : $\mathcal{D}_{\vec{p}_0}$ avec Gaussiennes de largeur $= \mathcal{L}$

Nous verrons en fait au paragraphe 4.1.4 que le fait de choisir \mathcal{L} comme largeur des paquets d'ondes élémentaires revient bien à transformer la distribution $\mathcal{D}_{\vec{p}_0}$ en une distribution de Dirac piquée en \vec{p}_0 .

Signalons que cette démarche s'applique également au cas des nuages thermiques, pour lesquels la longueur de cohérence s'exprime en fonction de la température thermodynamique T de la façon suivante :

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\pi \hbar^2}{2mk_B T}}$$

Remarquons pour finir que le lien avec les sources cohérentes (ou partiellement cohérentes comme les quasi-condensats) peut être réalisé simplement, en considérant non pas un nuage d'atomes en partie

condensé, mais un ensemble de paquets d'atomes cohérents (la taille des paquets étant donnée par la longueur de cohérence \mathcal{L} du nuage), comme nous l'avons fait pour les sources froides sans effet Sisyphé. Par exemple, à $T_c \sim 0$ K, il y a un seul paquet de la sorte : le nuage entier ($\mathcal{L} \sim D =$ la largeur du nuage); et pour T_c suffisamment grand, un paquet est égal à un atome ($\mathcal{L} < d \sim \lambda_{laser} =$ la largeur d'un piège).

Bilan

On obtient finalement un schéma du type :

- $\mathcal{L} \sim D$: une seule fonction d'onde Gaussienne (réelle)
- $\mathcal{L} < D$ et $\mathcal{L} \gtrsim d$: ensemble de fonctions d'ondes Gaussiennes de largeur \mathcal{L} distribuées spatialement
- $\mathcal{L} < d$ avec refroidissement Sisyphé : ensemble de modes Hermite-Gaussiens avec distribution des positions centrales et des niveaux vibrationnels de chaque piège élémentaire
- $\mathcal{L} \ll d$ ou $\mathcal{L} < d$ sans refroidissement Sisyphé (MOT, mélasses Doppler simple, mélasses optique $\sigma^+ - \sigma^-$) : ensemble de fonctions d'ondes Gaussiennes de largeur \mathcal{L} distribuées spatialement

où les distributions sont égales à la somme de deux fonctions Gaussiennes (distributions à deux composantes en accord avec les résultats expérimentaux détaillés ci-avant).

Par souci de simplicité, on peut bien sûr - en première approximation - traiter de la même manière les sources thermiques et les sources froides (avec ou sans effet Sisyphé), en ne considérant que des *fonctions d'ondes Gaussiennes de largeur \mathcal{L} , avec une distribution statistique de leur position centrale (distribution à deux composantes Gaussiennes)*. Selon ce schéma simplifié, il suffit alors d'intégrer le signal de sortie sur la *densité de probabilité $\mathcal{D}_{\vec{r}_0}$* associée à cette distribution :

$$S^* = \int \mathcal{D}_{\vec{r}_0} |\psi_S(\vec{r}_0, \vec{v}_0 \dots)|^2$$

en ayant auparavant établi le lien entre les données expérimentales (distributions mesurées par imagerie et TOF par exemple).

Pour chacune des deux composantes Gaussiennes, ce lien peut être obtenu simplement [59]. En effet, considérons à t_0 un ensemble de paquets d'ondes Gaussiens du type :

$$\psi_0(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, t_0) = wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0}$$

dont on suppose qu'ils n'ont pas encore eu le temps de s'étaler (ie que t_0 est l'instant de coupure des champs piégeant et refroidissant) :

$$\boxed{\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)Z_0(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0}} \quad (4.2)$$

et où Z_0 est la matrice de largeur en position de ψ_0 (pour l'instant, on ne suppose pas que les valeurs propres de Z_0 sont égales à l'inverse du carré des 3 longueurs de cohérence \mathcal{L}_i). Nous considérons donc une double distribution, sur les positions centrales $\mathcal{D}_{\vec{r}_0}$ et sur les impulsions centrales $\mathcal{D}_{\vec{p}_0}$.

Les distributions en position et impulsion sont alors définies par les relations :

$$\begin{aligned} R(\vec{r}) &: = \langle \vec{r} | \rho_{op}(t_0) | \vec{r} \rangle \\ P(\vec{p}) &: = \langle \vec{p} | \rho_{op}(t_0) | \vec{p} \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $\rho_{op}(t_0)$ est l'opérateur densité (au temps t_0) correspondant au mélange statistique sensé décrire le nuage atomique :

$$\rho_{op}(t) := \int \frac{d\vec{r}_0}{N_r} \cdot \Delta_r(\vec{r}_0) \int \frac{d\vec{p}_0}{N_p} \cdot \Delta_p(\vec{p}_0) \cdot |\psi_0\rangle \langle \psi_0| \quad (4.4)$$

et où les fonctions $\Delta_r(\vec{r}_0)/N_r$ et $\Delta_p(\vec{p}_0)/N_p$ sont les *densités de probabilité* associées respectivement aux distributions en position et impulsion :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\vec{r}_0} &= \frac{d\vec{r}_0}{N_r} \cdot \Delta_r(\vec{r}_0) \\ \mathcal{D}_{\vec{p}_0} &= \frac{d\vec{p}_0}{N_p} \cdot \Delta_p(\vec{p}_0) \end{aligned}$$

(c'est sur ces densités de probabilité qu'il faut intégrer le signal de sortie d'un interféromètre par exemple).

Supposons donc que les distributions (mesurées) aient une forme Gaussienne du type :

$$\begin{aligned} R(\vec{r}) &= \sqrt{\det(U_0/2\pi)} \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{r} U_0 \vec{r} \right] \\ P(\vec{p}) &= \sqrt{\det(V_0/2\pi)} \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{p} V_0 \vec{p} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

où les matrices de largeur U_0 et V_0 sont définies à partir des dimensions du nuage et des températures cinétiques selon trois axes propres (selon une direction propre, on a par exemple : $U_0 = 1/l^2$ et $V_0 = (mk_B T_c)^{-1}$ avec l et T_c la taille et la température du nuage selon cette direction). Par simplicité, le nuage est supposé centré en $\vec{r} = \vec{0}$ et $\vec{p} = \vec{0}$.

En reportant 4.2 dans 4.4, et en comparant 4.3 avec les distributions mesurées 4.5, on obtient alors les densités de probabilité recherchées :

$$\begin{aligned} \Delta_r(\vec{r}_0) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{r}_0 \cdot \left[Z_0 \cdot (Z_0 - U_0/2)^{-1} \cdot U_0 \right] \cdot \vec{r}_0 \right\} \\ \Delta_p(\vec{p}_0) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{p}_0 \cdot \left[(1 - \hbar^2 V_0 Z_0/2)^{-1} \cdot V_0 \right] \cdot \vec{p}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

A une dimension, on obtient simplement :

$$\begin{aligned} \Delta_r(r_0) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{l^2 - w^2} \right\} \\ \Delta_p(p_0) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{p_0^2}{mk_B T_c - (\hbar/2w)^2} \right\} \end{aligned}$$

où w est la largeur commune des paquets d'ondes (waist) suivant cette dimension :

$$Z_0 = \frac{1}{2w^2}$$

Le lien avec la discussion concernant la pertinence de considérer des distributions statistiques à la fois sur les positions *et* sur les impulsions centrales est alors immédiat. En effet, $\Delta_p(\vec{p}_0)$ peut se réécrire avec la longueur de cohérence

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m\sigma_v} = \sqrt{\frac{\hbar}{4mk_B T_c}}$$

comme :

$$\Delta_p(\vec{p}_0) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{p_0^2}{m k_B T_c [1 - (\mathcal{L}/w)^2]} \right\}$$

On en déduit que la densité de probabilité en impulsion est une distribution de Dirac lorsque la largeur focale w des paquets d'ondes du mélange statistique est choisie égale à la longueur de cohérence \mathcal{L} du nuage. Autrement dit, pour :

$$w = \mathcal{L}$$

nous n'avons pas besoin d'intégrer les signaux atomiques (celui observé en sortie d'un interféromètre par exemple) sur la distribution en impulsion du nuage. Cette distribution est en effet déjà présente à travers la largeur focale des paquets d'ondes du mélange statistique. La seule distribution sur laquelle il nous reste à intégrer est alors la distribution de la position centrale des paquets d'ondes (dans le cas où l'on choisirait $w > \mathcal{L}$, il serait cependant nécessaire d'utiliser les deux distributions). Bien sûr, si l'on veut tenir compte de l'imprécision de l'impulsion centrale des atomes à l'instant t_0 (due à l'imperfection des lasers pousseurs par exemple), il est nécessaire de considérer une distribution de l'impulsion centrale (dont la largeur ne dépend pas de la température cinétique).

4.1.2 Modélisation des séparatrices laser

Dans cette partie, nous allons établir une liste détaillée des différentes modélisations envisagées pour les séparatrices (dans le cadre de la modélisation des interféromètres atomiques).

Nous considérerons en fait **deux modélisations principales** :

1. la modélisation *tut champ fort généralisée*,
2. la modélisation *tut champ faible*,

la première correspondant au travail de modélisation effectué dans les parties 3.6 et 3.7, la seconde à la modélisation (simplifiée) décrite dans la référence [79], dont la *forme* est équivalente à celle de la modélisation dite *infinitement fine*, qui est usuellement utilisée en interférométrie atomique (voir la fin de cette partie).

Ces deux modélisations sont très différentes. L'objectif de la modélisation *tut champ faible* (ainsi que de celle *infinitement fine*, voir plus loin) est en effet de rendre compte, de façon simple, de l'action "typique" d'une séparatrice sur un paquet d'ondes atomique. Seuls les effets suivants sont alors pris en compte :

- la division du paquet d'ondes atomique incident wp_i en deux paquets d'ondes de même structure,
- le fait qu'un de ces paquets d'ondes est distinct de wp_i uniquement par un changement d'amplitude, alors que l'autre subit :

- un **changement d'amplitude** :

$$\mathcal{A}_i^+ = \mathcal{A}_i^- M_i \quad \text{avec : } \mathcal{A}_i^+ := \mathcal{A}(t_i^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_i^- = \mathcal{A}(t_i^-)$$

- un **changement d'état interne** (ie de masse effective) :

$$m_{i-1} \longrightarrow m_i$$

- un **changement d'impulsion centrale** :

$$\vec{p}_i^+ = \vec{p}_i^- + \vec{b}_i \quad \text{avec : } \vec{b}_i = \hbar \vec{k}_i$$

– et un **changement de phase globale** :

$$\phi_i^+ = \phi_i^- + \varphi_i$$

tous ces effets étant instantanés, au temps central t_i de la séparatrice n° i considérée ⁹.

Ainsi, quasiment ¹⁰ tous les effets additionnels (dûs à d'autres potentiels agissant pendant la phase de séparation atomique) et les effets liés à un traitement en champ fort des séparatrices sont négligés ¹¹. C'est en particulier le cas de la "structuration dispersive" du paquet d'ondes incident en plusieurs paquets d'ondes ayant des caractéristiques très différentes.

Un schéma spatio-temporel de cette *action effective instantanée* est donné sur la figure 4.2. Plusieurs *chemins atomiques* (correspondant aux trajectoires des centres de paquets d'ondes, voir partie 4.2.1) sont représentés, *avant* et *après* l'instant effectif d'interaction t_i . Les modifications des deux chemins atomiques α et β sont ensuite détaillées sur les figures 4.3 et 4.4.

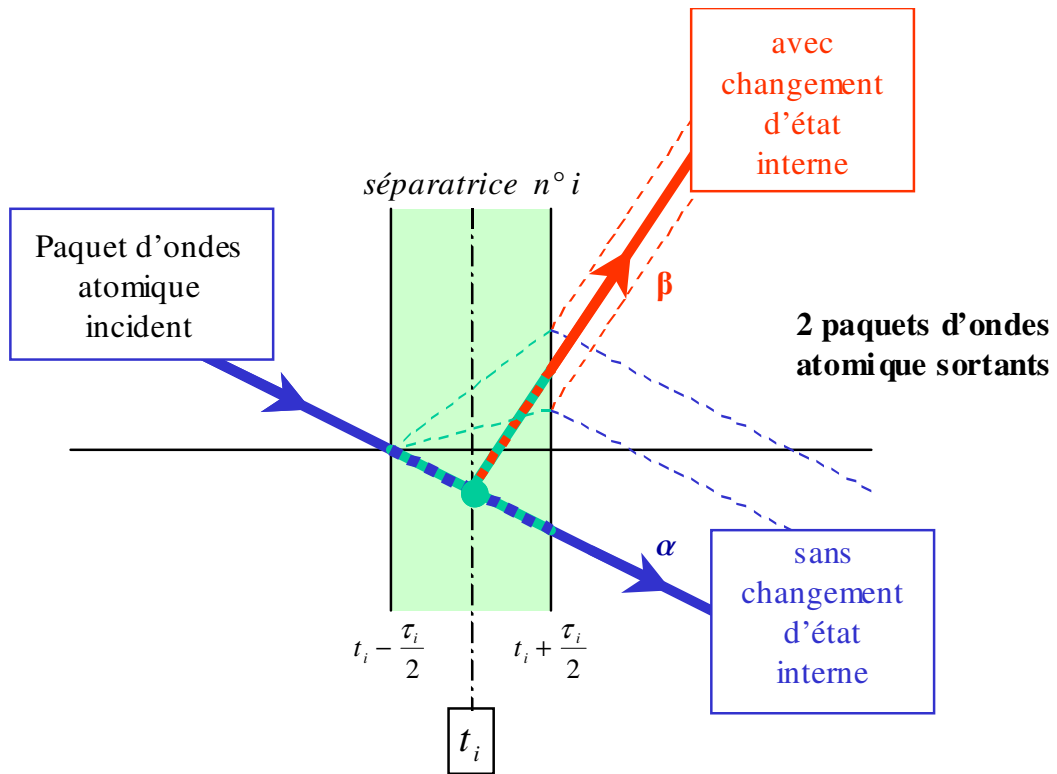


FIG. 4.2: Diagramme spatio-temporel d'une séparatrice atomique selon les modélisations *ttt* champ faible et infiniment fine.

Inversement, comme on a pu le voir dans la partie 3.7, la modélisation *ttt* *champ fort généralisée* cherche précisément à rendre compte de la majeure partie de ces effets. Les champs extérieurs additionnels (inertie, gravitation...) sont alors traités en champ fort, de même que le champ laser servant de séparatrice atomique (temporelle).

Le résultat principal des parties 3.6 et 3.7 est alors que l'action d'une séparatrice sur un paquet d'ondes atomique incident peut être modélisée par une **interaction effective instantanée** (au temps

⁹Cette modélisation simplifiée est valable pour les séparatrices temporelles et spatiales (ce qui en fait son intérêt). On verra alors plus loin ce que vaut ce *temps central* pour une séparatrice spatiale.

¹⁰Nous avons au chapitre 3 que l'étude de la séparation laser en présence d'un champ de gravité uniforme et constant a été réalisée en 1995 [53, 54]. Ce calcul a alors été repris en 1999 dans [101] (dans le cas spatial) pour déterminer l'effet d'un champ de gravité sur un interféromètre, séparatrices comprises.

¹¹Plusieurs traitements en champ fort ont néanmoins été réalisés [30, 52], mais de façon partielle, ie en négligeant généralement l'effet du laser - *en champ fort* - sur l'état externe des atomes.

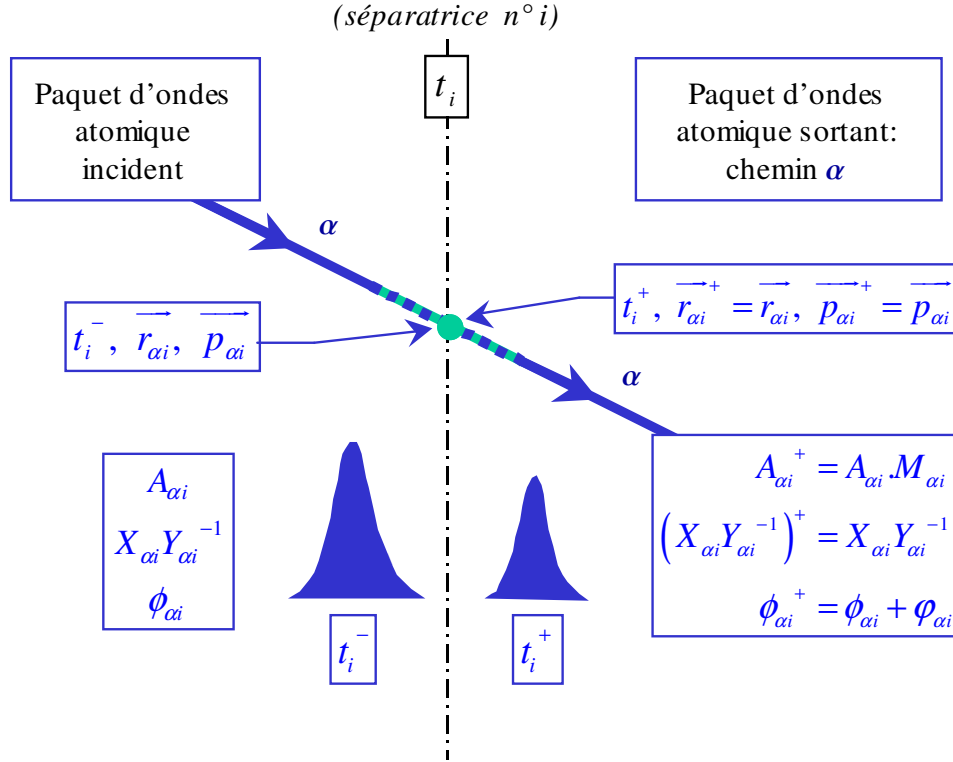


FIG. 4.3: Modifications du chemin α du diagramme spatio-temporel précédent (séparatrice atomique selon la modélisation *ttt champ faible* ou *infiniment fine*).

central de la séparatrice), où le paquet d'ondes initial *Gaussien* est divisé en **quatre paquets d'ondes de même structure**, dont deux sont dans le même état interne et deux sont dans l'état interne complémentaire (atomes à deux niveaux effectifs).

Le principal point commun avec la modélisation simplifiée précédente est que l'on cherche à *préserver la structure (Gaussienne)* du paquet d'ondes incident. Néanmoins, il y a cette fois-ci quatre paquets d'ondes sortants et non deux, et les *paramètres* de ces paquets d'ondes (centres en position et impulsion, largeurs en position et impulsion...) peuvent être très différents de ceux caractérisant le paquet d'ondes initial. Ainsi, les quatre paquets d'ondes sortants subissent (par rapport au paquet d'ondes initial) :

- non seulement un changement d'état interne, d'amplitude, d'impulsion centrale et de phase,
- mais également un **changement** :
 - **de position centrale** :

$$\vec{r}_i^+ = \vec{r}_i^- + \vec{a}_i$$

- **et de largeurs complexes** :

$$(X_i Y_i^{-1})^+ = X_i Y_i^{-1} + E_i \quad \text{avec } E_i \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ complexe}$$

La figure 4.5 représente un schéma (spatio-temporel) typique d'évolution atomique dans une séparatrice temporelle. On y voit un paquet d'ondes initial se scinder en deux paquets d'ondes intermédiaires, qui à leur tour se scindent en deux paquets d'ondes distincts (passage d'un seul chemin atomique à quatre chemins atomiques α , β , γ et δ). Lorsque l'on décrit cette interaction structurante par une action effective instantanée, on obtient le schéma de la figure 4.6, où les changements de position centrale sont évidents. Afin de comparer la modélisation *ttt champ fort généralisée* avec la modélisation

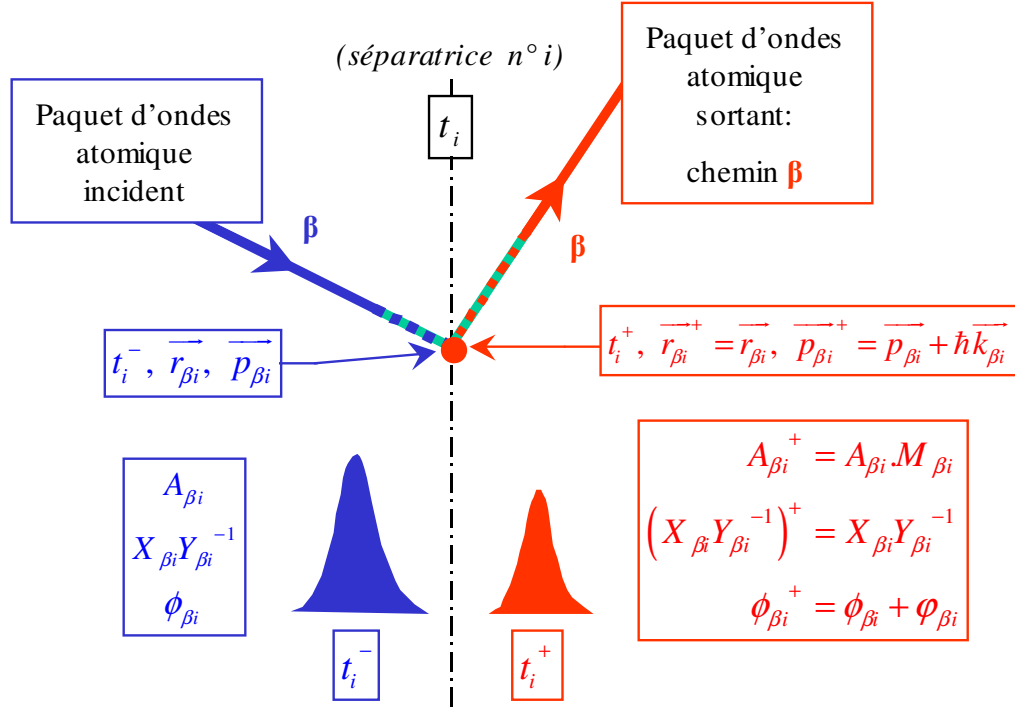


FIG. 4.4: Modifications du chemin β du diagramme spatio-temporel précédent (séparatrice atomique selon la modélisation *ttt champ faible* ou *infiniment fine*).

ttt champ faible ou *infiniment fine*, on a détaillé, sur les figures 4.3, 4.4, 4.7 et 4.8, les modifications subies par le paquet d'ondes incident pour les deux modélisations et pour deux chemins atomiques typiques.

Il est alors intéressant de considérer d'autres modélisations dont le degré de finesse est intermédiaire à celui des deux modélisations précédentes. Nous pouvons ainsi envisager les modélisations suivantes :

- la modélisation *ttt champ fort idéalisée*, où l'on considère un paquet d'ondes incident ayant une très faible largeur en impulsion, et dont la composante centrale (ie la porteuse) est à résonance,
- la modélisation *ttt champ fort idéalisée libre*, version simplifiée de la précédente où l'on néglige l'effet des champs inertiels et gravitationnels pendant l'interaction laser.

Finalement, nous serons amenés à considérer les quatre modélisations suivantes :

1. la modélisation *ttt champ fort généralisée*,
2. la modélisation *ttt champ fort idéalisée*, qui n'est rien d'autre qu'une version simplifiée de la modélisation précédente,
3. la modélisation *ttt champ fort idéalisée libre*, version encore plus simplifiée des précédentes, et qui correspond à la version champ fort de la modélisation *ttt champ faible*,
4. la modélisation *ttt champ faible* (équivalente de forme à la modélisation *infiniment fine*).

La raison pour laquelle nous considérons de telles modélisations simplifiées est double.

Premièrement, la modélisation *ttt champ fort généralisée* est assez difficile d'accès, car elle nécessite de nombreux calculs intermédiaires (calcul des impulsions centrales, présence de nombreux

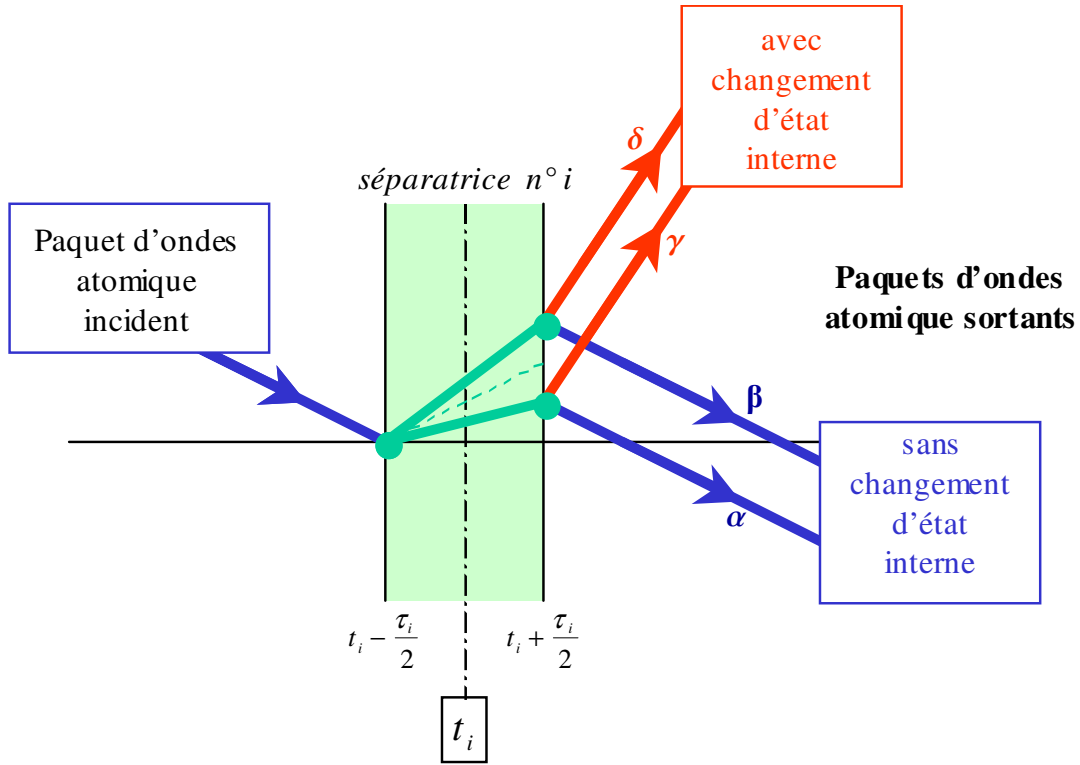


FIG. 4.5: Schéma spatio-temporel typique d'évolution atomique dans une séparatrice temporelle.

coefficients...). Il est donc intéressant d'en obtenir des versions simplifiées pour montrer *de façon graduelle* comment un traitement en champ fort des séparatrices modifie les modélisations antérieures des interféromètres atomiques.

Deuxièmement, cette modélisation très générale ne s'applique qu'aux séparatrices laser temporelles, alors qu'on peut définir des versions simplifiées valables pour les deux types de séparatrices - *spatiales et temporelles* - comme c'est notamment le cas pour les modélisations *ttt champ faible* et *infiniment fine*.

Précisons à présent les **caractéristiques essentielles** et le **domaine de validité** de ces modélisations.

Modélisation *ttt* champ fort généralisée

Des quatre modélisations précédentes, la modélisation *ttt champ fort généralisée* est, comme son nom l'indique, la plus générale. Elle a été établie en détail au chapitre 3, et nous avons plus spécifiquement vu quel était son domaine de validité dans la partie 3.7.

C'est une modélisation issue d'un **traitement en champ fort** :

- **du champ laser** (avec une structure temporelle de son amplitude)
- **des champs inertiels et gravitationnels** décrits par H_{ext} (au plus quadratique en position et impulsion, voir partie 2.1)

qui permet de rendre compte de presque tous les effets majeurs d'une séparatrice laser temporelle sur un paquet d'ondes atomique incident, notamment :

- le **changement global d'amplitude** (oscillations de Rabi),

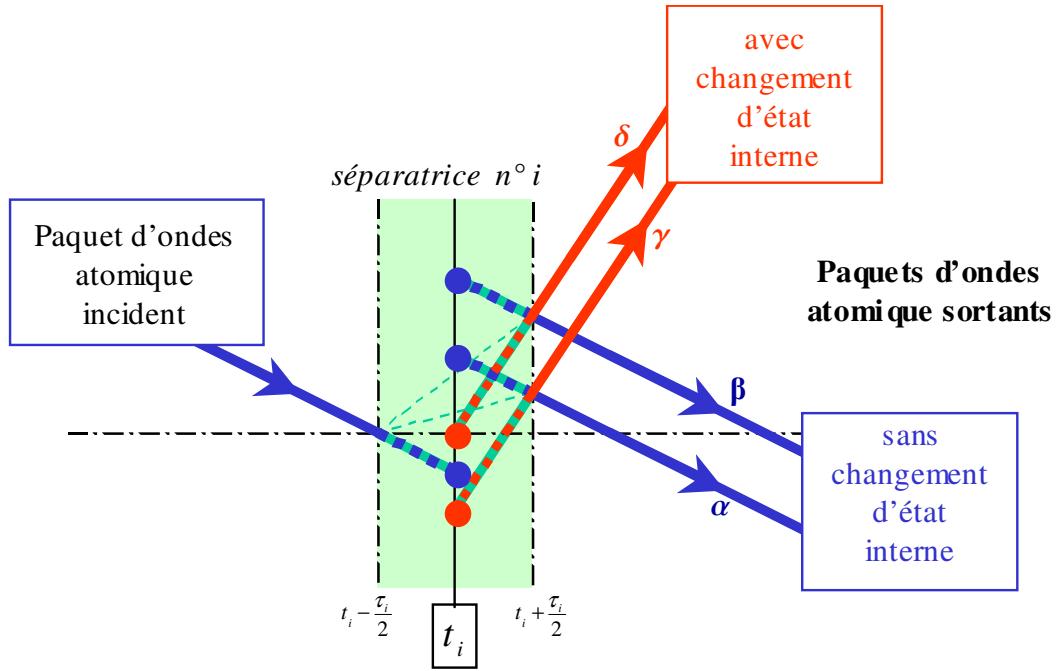


FIG. 4.6: Diagramme spatio-temporel d'une séparatrice atomique selon la modélisation *ttt champ fort généralisée*.

- la **sélectivité (complexe) en vitesse transverse**,
- le **changement de phase et d'impulsion centrale**,
- la **structuration en plusieurs paquets d'ondes**, dont deux principaux,
- l'apparition de **deux vitesses de groupe distinctes**, symétriques par rapport à la vitesse médiane $\vec{p}_0/m + \hbar \vec{k}/2m$,
- le **décalage spatial** en fin d'interaction pour les paquets d'ondes n'effectuant pas de transition interne du type $a \mapsto a$ ou $b \mapsto b$,
- la **dispersion anormale**, ie le fait que l'étalement d'un des deux paquets d'ondes principaux soit *moins rapide* que l'étalement naturel (et que l'étalement du second soit, au contraire, plus rapide que ce dernier).

L'approximation principale conduisant à cette modélisation est une **approximation Gaussienne**. On cherche en effet, dans cette modélisation *ttt champ fort généralisée*, à décrire sous forme Gaussienne les paquets d'ondes principaux qui prennent naissance dans une telle séparatrice laser temporelle, en d'autres termes, à les approximer par une fonction Gaussienne.

Le choix d'approcher ces paquets d'ondes par des Gaussiennes résulte du fait que l'on considère des *paquets d'ondes atomiques incidents Gaussiens*. En effet, comme on l'a détaillé dans la partie 2.3.2, une fonction Gaussienne est la *fonction génératrice* d'une base de fonctions : les *modes Hermite-Gaussiens* (voir partie 2.3.2). Il suffit donc de considérer un paquet d'ondes incident Gaussien, pour finalement connaître l'effet d'une séparatrice sur tout mode Hermite-Gaussien, et donc - par combinaisons linéaires - sur toute fonction d'onde. Lors de l'interaction laser, il est donc intéressant de conserver la forme Gaussienne incidente, d'autant plus que les résultats concernant l'*évolution de paquets d'ondes en dehors des séparatrices* (théorème ABCD) s'expriment simplement dans le cas Gaussien. Comme on l'a déjà souligné (voir l'appendice F par exemple), on peut néanmoins améliorer cette modélisation en approchant les paquets d'ondes créés par la séparatrice par des sommes d'Hermite-Gauss (quitte à les ré-exprimer ensuite comme les coefficients du développement d'une fonction génératrice Gaussienne).

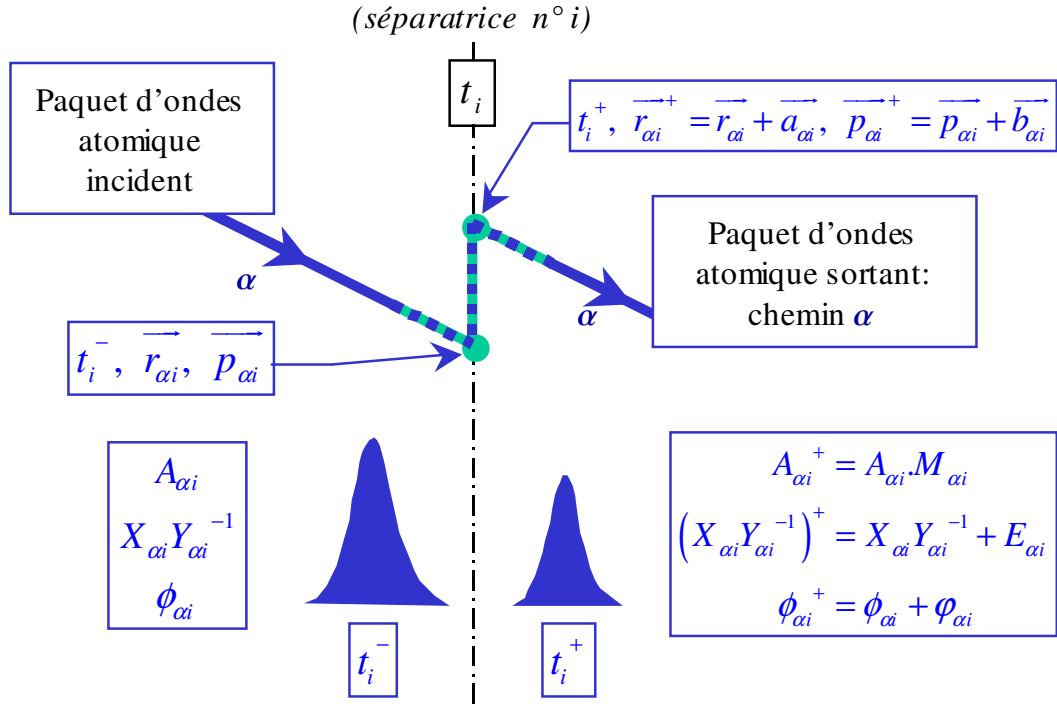


FIG. 4.7: Modifications du chemin α du diagramme spatio-temporel précédent (séparatrice atomique selon la modélisation *ttt champ fort généralisée*). Le décalage spatial $\vec{a}_{\alpha i}$ est clairement mis en évidence.

L'autre approximation principale de cette modélisation consiste, **lors de la résolution** de l'équation (détaillée dans le chapitre 3)

$$\frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta_{op} & \Omega_0 F_{op} \\ \Omega_0 F_{op} & -\frac{1}{2} \Delta_{op} \end{pmatrix} |\varphi(t)\rangle$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{op} = \Delta_{op}(t, t_1) := \omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \dot{A}(t, t_1) \vec{r}_{op} - \vec{k} \cdot \dot{B}(t, t_1) \frac{\vec{p}_{op}}{m} - \vec{k} \cdot \dot{\xi}(t, t_1) \\ F_{op} = F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \\ t_1 = t_{1/2} \end{cases}$$

à **négliger**, dans $\Delta_{op}(t, t_1)$, les **termes dépendant des éléments quadratiques de H_{ext}** . Cette approximation suppose que les grandeurs en question (rotations, gradients de gravité et d'accélération...) sont suffisamment faibles par rapport aux grandeurs caractéristiques de la séparatrice, ie en pratique :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{k} \cdot \left(\vec{\Omega}_{rot} \times \vec{p}_0 / m \right) \right\| \tau^2 &\ll 1 && \text{pour une rotation } \vec{\Omega}_{rot} \\ \left\| \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \right\| \sigma_r \tau &\ll 1 && \text{pour un gradient } \gamma \end{aligned}$$

(où \vec{k} , \vec{p}_0 , σ_r et τ sont respectivement le vecteur d'onde laser, l'impulsion atomique centrale incidente, la largeur en position du paquet d'ondes incident, et le temps d'interaction laser). Dans les expériences d'interférométrie atomique actuelles, ces conditions sont respectées (on rappelle que $\|\vec{\Omega}_{rot}\| \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et $\|\vec{\gamma}\| \sim 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ pour les données terrestres), mais elles pourraient être mises en défaut, par exemple dans les cas :

- d'une rotation artificielle, pour un temps d'interaction laser suffisamment long,
- d'un gradient d'accélération, lors d'un choc ou d'une vibration trop forte subis par l'interféromètre.

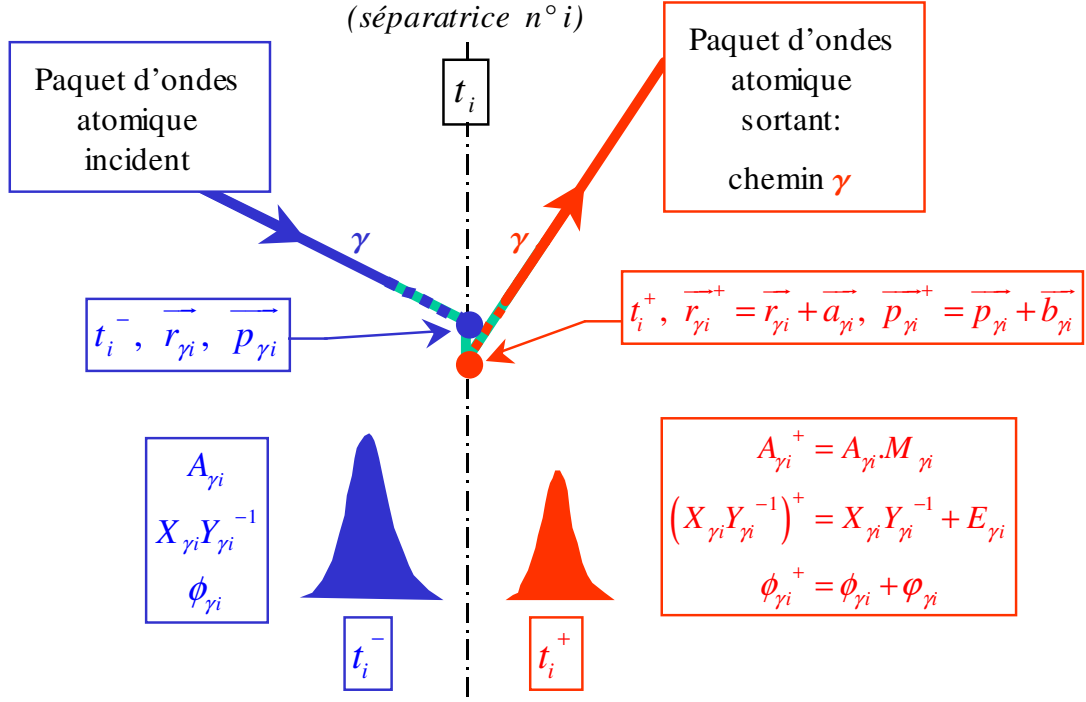


FIG. 4.8: Modifications du chemin γ du diagramme spatio-temporel précédent (séparatrice atomique selon la modélisation *ttt champ fort généralisée*). Comme précédemment, le décalage spatial $\vec{a}_{\gamma i}$ est clairement apparent.

On a alors montré qu'on pouvait utiliser *une des méthodes d'approximation* détaillées dans la partie 3.4.4, pour finalement retrouver une équation similaire à celle qu'on obtient par l'approximation précédente. On a également vu que le terme $\vec{k} \cdot \vec{\xi}(t, t_1)$ pouvait être, lui aussi, souvent négligé, et qu'il était possible, dans le cas contraire, d'approcher son effet par une des méthodes de la partie 3.4.4.

Signalons également que, du fait de la faible variation du mouvement atomique externe pendant l'interaction laser, on **approxime le terme** $F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t)$, lié à l'amplitude $F(\vec{r}, t)$ du champ laser (utilisé comme séparatrice), par sa valeur *semi-classique* prise en un instant particulier, l'instant central $t_{1/2} = t_1$:

$$F_{op} = F(\vec{R}_{op}(t, t_1), t) \approx F(\vec{R}_{op}(t_1, t_1), t) = F(\vec{r}_1, t)$$

où \vec{r}_1 est la position centrale du paquet d'ondes incident au temps t_1 . Cette approximation est justifiée dans la plupart des cas de séparatrices laser temporelles, à condition de se placer dans une zone spatiale à *faible speckle* (voir partie 3.3.2).

Remarquons enfin que la modélisation est réalisée pour une **amplitude laser en forme de créneau temporel** (forme aujourd'hui bien maîtrisée expérimentalement), la modélisation d'une dépendance temporelle plus complexe restant à effectuer. Dans la partie 3.4, nous avons volontairement détaillé les principales et plus efficaces méthodes de résolution pour une dépendance temporelle quelconque de l'amplitude laser. On a d'ailleurs rappelé quelles étaient les différentes classes d'impulsions laser qui conduisent à des cas exactement résolubles, et nous avons notamment insisté sur le cas très pratique, mais difficile à modéliser malgré les apparences, des impulsions sécantes hyperboliques.

Rappelons maintenant la forme explicite de la **modélisation ttt champ fort généralisée** (cf partie 3.7).

Soit un paquet d'ondes atomique initialement Gaussien au temps t_0 , et une séparatrice laser temporelle constituée d'une impulsion de forme créneau (de t_0 à $t = t_0 + \tau$), alors on peut modéliser l'effet

de cette séparatrice sur ce paquet d'ondes atomique sous la forme d'une interaction laser instantanée effective (au temps central $t_1 = t_{1/2}$) :

si à $t = t_1^-$ (ie juste avant l'instant t_1) le paquet d'ondes atomique initial s'écrit :

$$wp(\vec{p}, t_1) = wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1}, m_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(m_0 Y_1)}} e^{-\frac{i}{2m_0\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_1) \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_1}$$

alors à $t = t_1^+$ (ie juste après l'instant t_1) il y a quatre paquets d'ondes solutions - deux pour chaque transition $u \mapsto v$ (avec $u, v = a, b$) - qui s'écrivent sous la forme :

$$M_1 \cdot e^{i\theta_1} wp\left(\vec{p}, t_1^+; \vec{r}_1^+, \vec{p}_1^+, (X_1 Y_1^{-1})^+, m_1\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1^+ &= \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \\ \vec{p}_1^+ &= \vec{p}_1 + \vec{b}_1 \\ (X_1 Y_1^{-1})^+ &= X_1 Y_1^{-1} + F_1 \end{aligned}$$

et où M_1 , θ_1 , \vec{a}_1 , \vec{b}_1 et F_1 s'expriment à l'aide des coefficients $(M_{1\pm}, \theta_{1\pm}, \vec{a}_{1\pm}, \vec{b}_{1\pm}$ et $F_{1\pm})$, issus de la modélisation des parties 3.6 et 3.7 (rappelées ci-dessous), et des termes \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} du schéma ttt (donnés au paragraphe 3.5.3 et rappelés également ci-dessous) :

$$\begin{aligned} M_1 &: = M_{1\pm} \\ \theta_1 &: = \Phi_{uv} + \vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}) / \hbar + \theta_{1\pm} \\ \vec{a}_1 &: = \vec{r}_{uv} + \vec{a}_{1\pm} \\ \vec{b}_1 &: = \vec{p}_{uv} + \vec{b}_{1\pm} \\ F_1 &: = F_{1\pm} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Les signes $+$ et $-$ font alors référence aux deux paquets d'ondes associés à une transition $u \mapsto v$ particulière ($u, v = a, b$). Par exemple, si le paquet d'ondes initial est dans l'état fondamental a, il y a en sortie deux fois deux paires de paquets d'ondes : une paire dans l'état a, et une paire dans l'état b. Pour différencier les deux paquets de chacune de ces paires, on emploie alors les signes $+$ et $-$. Ces termes indicés par $+$ et $-$ peuvent s'exprimer à l'aide des coefficients $p_{c\parallel\pm}$, Θ_{\pm} , $coef_{\pm}$ et $b_{c\pm}$, établis dans la partie 3.6. Par exemple, on a :

$$\vec{b}_{1\pm} = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta} \cdot (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1)$$

sachant que :

$$\vec{p}_{c\pm} := p_{c\parallel\pm} * \vec{k} / k, \quad \overrightarrow{\delta} := \frac{\hbar}{2m_0} \left(\vec{k} \cdot \widetilde{\vec{k}} \right)$$

et :

$$\begin{aligned} F_{1\pm} &= -(coef_{\pm} * \Omega_0 \tau + ib_{c\pm}) \cdot \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta} / \Omega_0^2 \\ \theta_{1\pm} &= \frac{\vec{p}_{uv} \cdot \vec{a}_{1\pm}}{\hbar} + \Theta_{\pm} - \frac{(\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta} \cdot \vec{r}_1}{\hbar \delta} - \frac{1}{2m_0 \hbar \delta^2} (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta} X_1 Y_1^{-1} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta} (\vec{p}_{c\pm} - \vec{p}_1) \end{aligned}$$

Au vu de la complexité des autres termes, et pour une interprétation physique plus claire, on procède en deux étapes, en introduisant plusieurs données intermédiaires importantes (comme les impulsions centrales $\vec{p}_{c\pm}$, les vitesses de groupes $\vec{v}_{gc\pm}$, le paramètre d'inélasticité y et la largeur adimensionnée σ_y des paquets d'ondes). Comme on l'a déjà vu, le **paramètre "y"** est particulièrement important car il intervient directement dans l'expression des vitesses de groupe $\vec{v}_{gc\pm}$, et par conséquent dans l'expression du décalage spatial $\vec{a}_{1\pm}$:

$$\vec{a}_{1\pm} = \vec{v}_{gc\pm} \tau$$

Ce paramètre y a une expression différente selon que l'on considère des transitions atomiques à partir de l'état fondamental (du type $a \mapsto a$ ou $a \mapsto b$) ou à partir de l'état excité (du type $b \mapsto a$ ou $b \mapsto b$) :

$$\begin{aligned} \text{transitions } a \mapsto a \text{ ou } a \mapsto b : \quad y &:= y_a(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p} / m_0 \boxed{-\delta}}{2\Omega_0} = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{\parallel})}{2m_0\Omega_0} \\ \text{transitions } b \mapsto a \text{ ou } b \mapsto b : \quad y &:= y_b(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p} / m_0 \boxed{+\delta}}{2\Omega_0} = \frac{k(\widetilde{p_{s\parallel}} - p_{\parallel})}{2m_0\Omega_0} \end{aligned}$$

Dans les expressions qui suivent, nous nous plaçons implicitement dans le cas des transitions du type $a \mapsto a$ ou $a \mapsto b$:

$$\boxed{y(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p} / m - \delta}{2\Omega_0} = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{\parallel})}{2m\Omega_0}}$$

Les expressions correspondant au cas du type $b \mapsto a$ et $b \mapsto b$ s'obtiennent alors en remplaçant simplement $y(p_{\parallel})$ par $y_b(p_{\parallel})$ (à une exception près, signalée plus loin).

L'autre paramètre très important est l'**impulsion centrale $\vec{p}_{c\pm}$ des paquets d'ondes sortants**. Cette impulsion, qui est unique dans le cas des transitions avec changement d'état interne (du type $a \mapsto b$), est double dans le cas des transitions sans changement d'état interne (du type $a \mapsto a$). Il est donc nécessaire de distinguer ces deux cas.

Cas des transitions $a \mapsto b$:

Il y a **une seule impulsion centrale** $\vec{p}_c = \vec{p}_{c+} = \vec{p}_{c-}$, telle que :

$$y_c := y(p_{c\parallel})$$

vérifie l'équation :

$$y_c + (y_c - y_1)(1 + y_c^2)/\sigma_y^2 = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{avec : } \sigma_y := \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im}(X_1 Y_1^{-1}))_{\parallel\parallel\parallel}}}$$

$$\text{et : } y_1 := y(p_{1\parallel})$$

$$\text{ainsi que : } (X_1 Y_1^{-1})_{\parallel\parallel\parallel} := \vec{k} \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot \vec{k} / k^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{les vitesses de groupe : } \quad \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \\ \text{les facteurs d'amplitudes : } \quad M_{1\pm} &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y_c^2}} \\ \text{et les facteurs de phase : } \quad \Theta_{\pm} &= \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2} \end{aligned}$$

Quant aux paramètres $b_{c\pm}$ et $coef_{\pm}$ intervenant dans

$$E_{1\pm} = -(\text{coef}_{\pm} * \Omega_0 \tau + i b_{c\pm}) \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0^2}$$

ils dépendent fortement de la modélisation considérée. Suivant les résultats de la partie 3.6, ils ont pour expression :

$$b_{c+} = b_{c-} \sim 16 / \left(1 + 3 \frac{\pi/2}{\Omega_0 \tau} \right)^2$$

et :

$$\text{coef}_+ = \text{coef}_- \sim \frac{\text{coef}_{+1} + \text{coef}_{-1}}{2}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{coef}_{+1} = \frac{3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} - \sqrt{1+y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} (y_{\min} - y_c)}{(y_{\min} - y_c)^2} \\ \text{coef}_{-1} = \frac{3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} - \sqrt{1+y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} (-y_{\min} - y_c)}{(-y_{\min} - y_c)^2} \\ y_{\min} = \sqrt{\left(3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} \right)^2 - 1} \end{array} \right.$$

Cas des transitions $a \mapsto a$:

Il y a dans ce cas **deux impulsions centrales** $\vec{p}_{c\pm}$, telles que :

$$y_{c\pm} := y(p_{c\parallel\pm})$$

vérifie l'équation :

$$y_{c\pm} + (y_{c\pm} - y_1) (1 + y_{c\pm}^2) / \sigma_y^2 = 0 \quad (4.9)$$

$$\text{avec} : \sigma_y := \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im}(X_1 Y_1^{-1}))_{\parallel\parallel\parallel}}}$$

$$\text{et} : y_1 := y(p_{1\parallel})$$

$$\text{ainsi que} : (X_1 Y_1^{-1})_{\parallel\parallel\parallel} := \vec{k} \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot \vec{k} / k^2$$

Comme précédemment, on en déduit les vitesses de groupe $\vec{v}_{gc\pm}$, les facteurs d'amplitudes $M_{1\pm}$ ¹² et les facteurs de phase Θ_{\pm} :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \\ M_{1\pm} &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_{c\pm}}{\sqrt{1 + y_{c\pm}^2}} \right) \\ \Theta_{\pm} &= \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_{c\pm}^2} \end{aligned}$$

¹²On a dit que le passage des transitions du type $a \mapsto a$ ou $a \mapsto b$ aux transitions du type $b \mapsto a$ ou $b \mapsto b$ s'effectuait uniquement en changeant $y = y_a(p_{c\parallel})$ en $y_b(p_{c\parallel})$. Il y a une exception cependant, concernant les facteurs d'amplitude $M_{1\pm}$, mais seulement pour les transitions du type $b \mapsto b$. En effet, dans ce cas, il est également nécessaire de changer $y_b(p_{c\parallel})$ en $-y_b(p_{c\parallel})$ dans l'expression de $M_{1\pm}$.

Quant aux paramètres $b_{c\pm}$ et $coef_{\pm}$, ils ont pour expression :

$$\begin{cases} b_{c+} = b_{c-} \sim \frac{1.4}{1+\sigma_y} & : \text{ pour une lame } \pi \\ b_{c+} = b_{c-} \sim \frac{2}{0.8+\sigma_y} & : \text{ pour une lame } \pi/2 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} coef_+ = \left(1 - \sqrt{1 + y_{c+}^2} + \frac{y}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \right) / y_{c+}^2 \\ coef_- = \left(1 - \sqrt{1 + y_{c-}^2} + \frac{y_{c-}^2}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \right) / y_{c-}^2 \end{cases}$$

L'expression des termes \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv} est donnée au paragraphe 3.5.3 concernant le schéma ttt (formules 3.79, 3.81, 3.83 et 3.85 pour $t_1 = t_{1/2} = (t + t_0)/2$). Ces termes s'expriment en fonction des matrices $ABCD$ obtenues au chapitre 2 et détaillées dans les appendices C et D, et diffèrent selon le type de transition considéré :

– dans le cas des transitions $a \mapsto a$:

$$\begin{cases} \vec{p}_{aa} := -\frac{\tilde{A}(t, t_1) - \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{aa} := +\frac{\tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{aa} := +\frac{1}{2} \left[(\omega - \omega_0) (t - t_0) - \vec{k} \cdot \left(\vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1) \right) \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) - 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{cases} \quad (4.10)$$

– dans le cas des transitions $a \mapsto b$:

$$\begin{cases} \vec{p}_{ba} := +\frac{\tilde{A}(t, t_1) + \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ba} := -\frac{\tilde{B}(t, t_1) + \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ba} := -\left[\omega t_1 + \phi - \vec{k} \cdot \frac{\vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1)}{2} \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) + 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{cases} \quad (4.11)$$

– dans le cas des transitions $b \mapsto a$:

$$\begin{cases} \vec{p}_{ab} := -\frac{\tilde{A}(t, t_1) + \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{ab} := +\frac{\tilde{B}(t, t_1) + \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{ab} := +\left[\omega t_1 + \phi - \vec{k} \cdot \frac{\vec{\xi}(t, t_1) + \vec{\xi}(t_0, t_1)}{2} \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) + 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{cases} \quad (4.12)$$

– dans le cas des transitions $b \mapsto b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{bb} := + \frac{\tilde{A}(t, t_1) - \tilde{A}(t_0, t_1)}{2} \hbar \vec{k} \\ \vec{r}_{bb} := - \frac{\tilde{B}(t, t_1) - \tilde{B}(t_0, t_1)}{2} \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Phi_{bb} := -\frac{1}{2} \left[(\omega - \omega_0) (t - t_0) - \vec{k} \cdot \left(\vec{\xi}(t, t_1) - \vec{\xi}(t_0, t_1) \right) \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}}{8m} \left[A(t, t_1) \tilde{B}(t, t_1) + A(t_0, t_1) \tilde{B}(t_0, t_1) - 2A(t_0, t_1) \tilde{B}(t, t_1) \right] \vec{k} - \int_{t_0}^t \frac{\delta(t', t_1)}{4} dt' \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Modélisation *ttt* champ fort idéalisée

La modélisation *ttt* champ fort généralisée précédente utilise deux types de données :

- celles qui sont issues du *schéma ttt* (cf partie 3.5.3) et qui traduisent l'action des diverses transformations unitaires de la partie 3.3.1 (passage dans le référentiel de moindre mouvement), et qui sont indicées par uv ,
- celles qui sont issues de la modélisation établie dans la partie 3.7, dépendant principalement :
 - des *impulsions centrales* $p_{c||+}$ et $p_{c||-}$, ou de façon équivalente des termes $y_{c\pm} = y(p_{c||\pm})$
 - de la *largeur en impulsion* suivant la direction \vec{k} :

$$\sigma_{p_{||}} := \sqrt{\frac{2m\hbar}{\text{Im} \left[(X_1 Y_1^{-1})_{||} \right]}}$$

avec : $(X_1 Y_1^{-1})_{||} := \vec{k} \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot \vec{k} / k^2$

ou de façon équivalente de la largeur en "y" :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im} (X_1 Y_1^{-1}))_{||}}}$$

Par ailleurs, on a vu que lorsque $\sigma_y \ll 1$ (**très faible largeur en impulsion**), il n'y avait qu'une seule impulsion centrale $p_{c||} = p_{1||}$ pour les deux paquets d'ondes principaux prenant naissance dans la séparatrice (pour les deux formés lors de la transition $a \mapsto b$ par exemple). Les données précédentes se simplifient donc beaucoup si l'on considère en plus que l'on est à **résonance parfaite** pour cette impulsion centrale, ie : $y_c = y(p_{1||}) = 0$. Dans ce cas particulier, les seules données restantes sont celles qui sont issues du schéma *ttt* (celles dépendant des indices uv).

Ce cas idéal est très intéressant car il permet de faire le lien entre la modélisation généralisée et les modélisations du type *ttt* champ faible ou infiment fine. On peut le voir comme une étape intermédiaire, plus simple dans sa formulation que la modélisation précédente, et cependant plus rigoureuse que les modélisations antérieures, du type *infiment fine* ou *ttt* champ faible.

Considérons donc ce cas extrême :

$\sigma_y \ll 1 \quad \left(\implies p_{c +} = p_{c -} = p_{c } = p_{1 } \right)$ et : $y_c = y(p_{1 }) = 0$

d'un paquet d'ondes incident (à l'instant $t_1 = t_{1/2}$) très fin en impulsion et étant à résonance parfaite pour son impulsion centrale. On obtient ainsi la modélisation *ttt champ fort idéalisée* :

si à $t = t_1^-$ (ie juste avant l'instant t_1) le paquet d'ondes atomique initial s'écrit :

$$wp(\vec{p}, t_1) = wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(m_0 Y_1)}} e^{-\frac{i}{2m_0\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_1)X_1 Y_1^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_1) - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}_1}$$

alors à $t = t_1^+$ (ie juste après l'instant t_1) - et pour chaque transition $u \mapsto v$ ($u, v = a, b$) - il y a deux paquets d'ondes solutions qui s'écrivent :

$$M_{1+} e^{i\varphi_+} wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_1 + \vec{p}_{uv}, X_1 Y_1^{-1} + E_{1+})$$

et :

$$M_{1-} e^{i\varphi_-} wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_1 + \vec{p}_{uv}, X_1 Y_1^{-1} + E_{1-})$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm} &= \Phi_{uv} + \frac{\vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv})}{\hbar} \pm \Omega_0 \tau \\ E_{1\pm} &= -(i b_c \pm \text{coef} * \Omega_0 \tau) \vec{\delta} / \Omega_0^2 \end{aligned}$$

où les données indicées par uv sont précisées ci-dessus, et où les autres ont pour valeur :

- dans le cas des transitions $a \mapsto b$ et $b \mapsto a$:

$$\begin{aligned} M_{1\pm} &= \pm \frac{1}{2} \\ \text{coef} &= 1 \\ b_c &= \begin{cases} b_c \sim 1. & : \text{lame } \pi \\ b_c \sim 0.32 & : \text{lame } \pi/2 \end{cases} \end{aligned}$$

- et dans le cas des transitions $a \mapsto a$ et $b \mapsto b$:

$$\begin{aligned} M_{1\pm} &= \frac{1}{2} \\ \text{coef} &= \frac{1}{2} \\ b_c &= \begin{cases} b_c \sim 1.4 & : \text{lame } \pi \\ b_c \sim 2.5 & : \text{lame } \pi/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que la somme de ces deux paquets d'ondes redonne bien les sinus et cosinus habituels (mais cette fois-ci avec une *dépendance quadratique en impulsion*, qui empêche de considérer cette somme comme un unique paquet d'ondes Gaussien) :

– dans le cas des transitions $a \mapsto b$ et $b \mapsto a$:

$$e^{i[\Phi_{uv} + \vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv})/\hbar]} wp \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_1 + \vec{p}_{uv}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right) \\ \cdot i \sin \left[\Omega_0 \tau \left(1 + \text{coef} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1 - \vec{p}_{uv})}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]$$

– et dans le cas des transitions $a \mapsto a$ et $b \mapsto b$:

$$e^{i[\Phi_{uv} + \vec{p}_{uv} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{uv})/\hbar]} wp \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \vec{r}_{uv}, \vec{p}_1 + \vec{p}_{uv}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right) \\ \cdot \cos \left[\Omega_0 \tau \left(1 + \text{coef} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1 - \vec{p}_{uv})}{2m\Omega_0} \right)^2 \right) \right]$$

Modélisation ttt champ fort idéalisée libre

Dans le prolongement de la démarche précédente, on peut simplifier d'avantage les données qui définissent la modélisation, en **négligeant l'effet des champs inertiels et gravitationnels pendant l'interaction laser**. Dans ce cas, on obtient alors des décalages spatiaux \vec{r}_{uv} et des transferts d'impulsion \vec{p}_{uv} très simples ($\tau = t - t_0$ et $t_1 = t_{1/2} = (t + t_0)/2$) :

– dans le cas des transitions $a \mapsto a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{aa} = \vec{0} \\ \vec{r}_{aa} = + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \\ \Phi_{aa} = \frac{1}{2} (\omega - \omega_0 - \delta) \tau \end{array} \right.$$

d'où les deux paquets d'ondes :

$$\frac{1}{2} e^{+i\Omega_0 \tau} e^{+\frac{i}{2}(\omega - \omega_0 - \delta)\tau} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 - \text{coef} * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

et :

$$+ \frac{1}{2} e^{-i\Omega_0 \tau} e^{+\frac{i}{2}(\omega - \omega_0 - \delta)\tau} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 + \text{coef} * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

– dans le cas des transitions $a \mapsto b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{ba}} = \hbar \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{r_{ba}} = \overrightarrow{0} \\ \Phi_{ba} = -(\omega t_1 + \phi) \end{array} \right.$$

d'où les deux paquets d'ondes :

$$\frac{1}{2} e^{+i\Omega_0 \tau} e^{-i(\omega t_1 - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r_1} + \phi)} a \left(\overrightarrow{p}, t_1; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1} + \hbar \overrightarrow{k}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \overrightarrow{\delta} / \Omega_0^2 - \text{coef} * \overrightarrow{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

et :

$$-\frac{1}{2} e^{-i\Omega_0 \tau} e^{-i(\omega t_1 - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r_1} + \phi)} a \left(\overrightarrow{p}, t_1; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1} + \hbar \overrightarrow{k}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \overrightarrow{\delta} / \Omega_0^2 + \text{coef} * \overrightarrow{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

– dans le cas des transitions $b \mapsto a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{ab}} = -\hbar \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{r_{ab}} = \overrightarrow{0} \\ \Phi_{ab} = \omega t_1 + \phi \end{array} \right.$$

d'où les deux paquets d'ondes :

$$\frac{1}{2} e^{+i\Omega_0 \tau} e^{+i(\omega t_1 - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r_1} + \phi)} a \left(\overrightarrow{p}, t_1; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1} - \hbar \overrightarrow{k}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \overrightarrow{\delta} / \Omega_0^2 - \text{coef} * \overrightarrow{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

et :

$$-\frac{1}{2} e^{-i\Omega_0 \tau} e^{+i(\omega t_1 - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r_1} + \phi)} a \left(\overrightarrow{p}, t_1; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1} - \hbar \overrightarrow{k}, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \overrightarrow{\delta} / \Omega_0^2 + \text{coef} * \overrightarrow{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

– dans le cas des transitions $b \mapsto b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{bb}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{r_{bb}} = -\frac{\hbar \overrightarrow{k}}{2m} \tau \\ \Phi_{bb} = -\frac{1}{2} (\omega - \omega_0 + \delta) \tau \end{array} \right.$$

d'où les deux paquets d'ondes :

$$\frac{1}{2}e^{+i\Omega_0\tau} e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0+\delta)\tau} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 - \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 - \text{coef} * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

et :

$$+\frac{1}{2}e^{-i\Omega_0\tau} e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0+\delta)\tau} a \left(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1 - \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1} - i b_c \vec{\delta} / \Omega_0^2 + \text{coef} * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right)$$

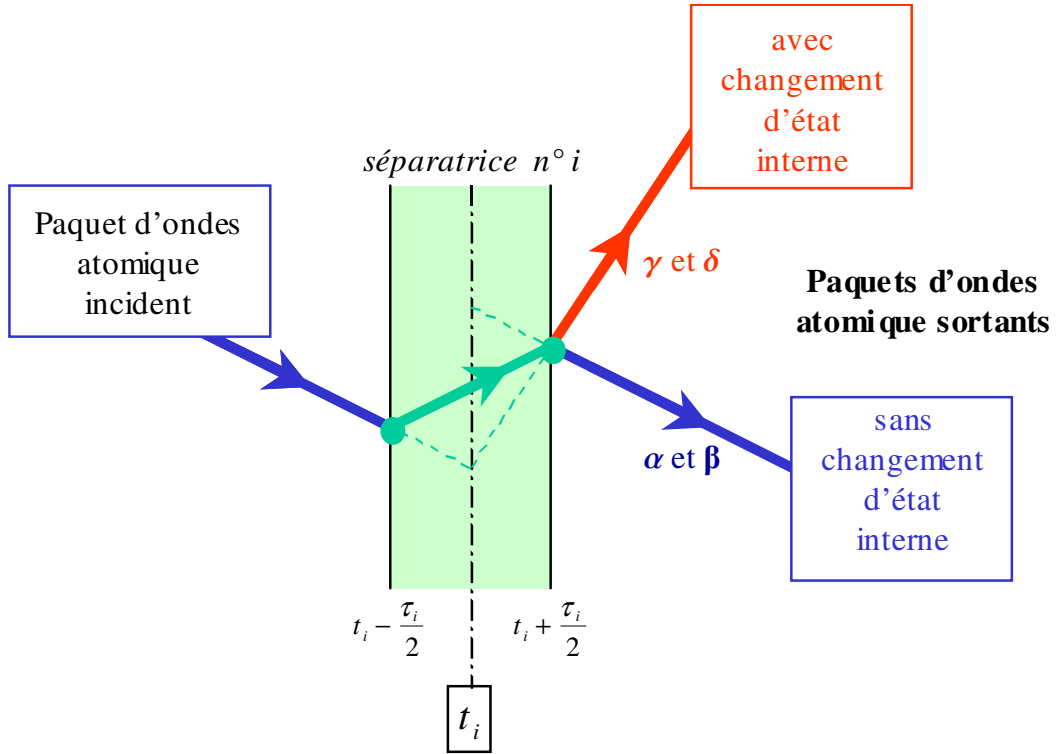


FIG. 4.9: Schéma spatio-temporel représentant l'évolution des chemins atomiques principaux dans une séparatrice. Les approximations sous-jacentes sont celles de la modélisation *ttt champ fort idéalisée libre*.

Un schéma (spatio-temporel) correspondant à une paire de ces transitions (par exemple, celles $a \mapsto a$ et $a \mapsto b$) est représenté sur la figure 4.9. On y voit clairement le décalage spatial en fin d'impulsion laser pour le chemin atomique où les atomes ne changent pas d'état interne (d'une valeur $\left\| \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right\|$). Le diagramme spatio-temporel associé à la modélisation *ttt champ fort idéalisée libre* est alors donné sur la figure 4.10.

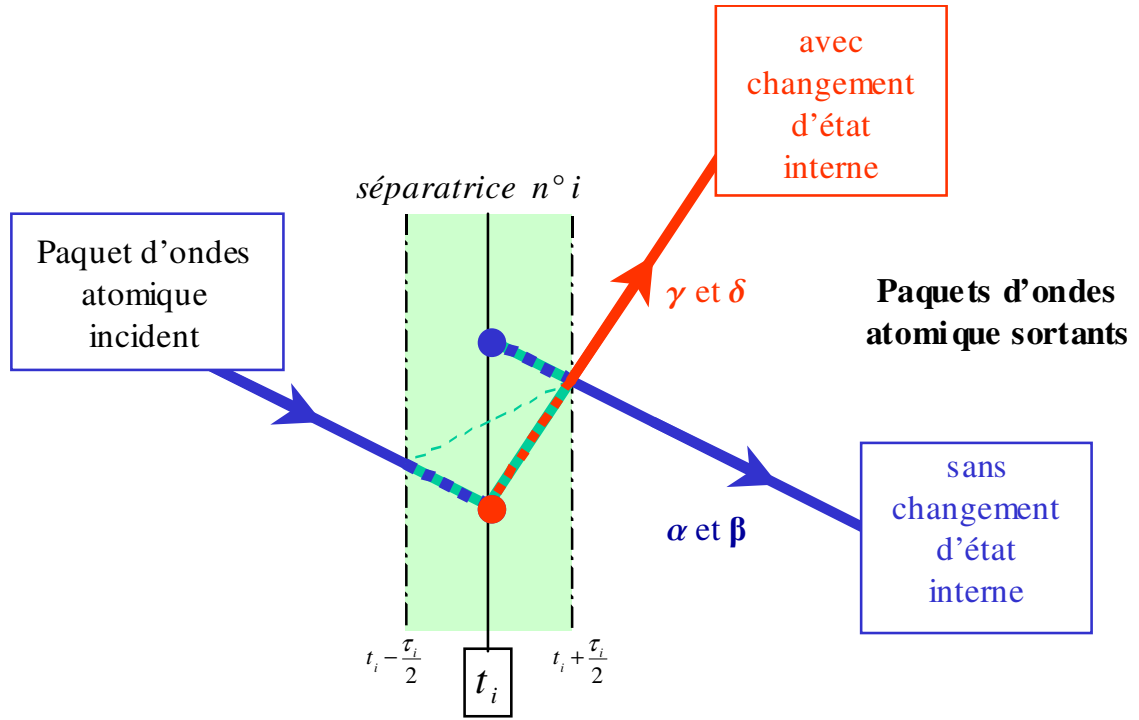


FIG. 4.10: Diagramme spatio-temporel d'une séparatrice atomique dans le cadre de la modélisation *ttt* champ fort idéalisée libre.

Modélisations *ttt* champ faible et infiniment fine

Nous voulons rappeler ici les caractéristiques de la modélisation *ttt champ faible* établie en détail dans [79]. Nous verrons en particulier son équivalence de forme avec la modélisation dite *infiniment fine*, qui est couramment utilisée en interférométrie atomique.

Bien que cette modélisation *ttt champ faible* soit obtenue en *champ laser faible*, et qu'elle ne puisse donc pas rendre compte de façon rigoureuse de l'action réelle des séparatrices (utilisation en champ fort dans les interféromètres atomiques, ie pour " $\Omega_{Rabi} * \tau_{interaction} \geq 1$ "), elle est très utile car elle permet :

1. de justifier la forme usuelle des modélisation antérieures (du type "changements d'amplitude, de phase et d'impulsion centrale du paquet d'ondes initial"),
2. de fournir une modélisation valable à la fois pour des *séparatrices temporelles et spatiales* (elle montre par exemple comment - dans le cas spatial - une impulsion longitudinale doit être ajoutée aux atomes qui sont hors résonance).

C'est essentiellement le deuxième point qui nous intéresse ici.

Lorsque l'on ne tient compte :

- ni des champs inertiels et gravitationnels pendant l'interaction,
- ni des propriétés dispersives de la séparatrice (ie que l'on néglige toute déformation du paquet d'ondes incident pendant l'interaction),

on peut en effet montrer que l'action en champ faible d'une séparatrice laser se résume ainsi :

- à la division du paquet d'ondes atomique incident wp_0 en deux paquets d'ondes ayant la même structure,

- au fait qu'un de ces paquets d'ondes est distinct de wp_0 uniquement par un changement d'amplitude, alors que l'autre subit :

- un **changement d'amplitude** :

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}.M_{uv}$$

- un **changement d'état interne** (ie de masse effective) :

$$m_0 \longrightarrow m_1$$

- un **changement d'impulsion centrale** :

$$\vec{p}_c \longrightarrow \vec{p}_c + \hbar \vec{k}^*$$

- un **changement de phase globale** :

$$\phi \longrightarrow \phi - \left(\omega^* t^* - \vec{k}^* \cdot \vec{r}^* + \varphi^* \right)$$

tous ces effets étant instantanés (l'instant effectif d'interaction est précisé ci-dessous).

En fait, t^* et \vec{r}^* dépendent de t_A et \vec{r}_A , l'instant central et la position centrale de l'impulsion laser utilisée comme séparatrice atomique (dans le cas temporel, $t_A = t_1 = t_{1/2}$).

Les données intervenant dans l'expression de l'impulsion \vec{k}^* et de la phase φ^* s'expriment alors différemment selon que l'on se place dans le cas temporel ou le cas spatial. En effet, dans le cas spatial, il faut tenir compte du supplément d'impulsion communiquée aux atomes lorsque ceux-ci sont hors résonance (cette *impulsion additionnelle longitudinale* $\vec{\delta k}$ est alors proportionnelle au désaccord $\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_c / m_0 - \delta$).

On obtient ainsi le schéma suivant :

Séparatrices temporelles :

$$\begin{aligned} t^* &= t_A \\ \vec{r}^* &= \vec{r}_{cl}(t_A) \quad \text{ie } \vec{r}_I \\ \vec{k}^* &= \vec{k} \\ \omega^* &= \omega \\ \varphi^* &= \varphi \end{aligned}$$

Séparatrices spatiales :

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= \vec{r}_A \\ t^* \quad \text{tel que : } \vec{r}_{cl}(t^*) &= \vec{r}_A \\ \vec{k}^* &= \vec{k} + \vec{\delta k} \\ \omega^* &= \omega \\ \varphi^* &= \varphi + \delta\varphi \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\delta k} = \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_c / m_0 - \delta \right) \vec{v}_{c\perp} / v_{c\perp}^2 \\ \text{où : } \vec{v}_{c\perp} := \vec{v}_c - \vec{v}_c \cdot \vec{k} / k \\ \delta\varphi = -\vec{\delta k} \cdot \vec{r}_A \end{array} \right.$$

Quant aux facteurs d'amplitude M_{uv} , ils sont donnés par (au premier ordre en $\Omega_0\tau$) [79] :

Séparatrices temporelles :

$$\begin{aligned} M_{aa} &= M_{bb} = 1 \\ M_{ba} &= i\Omega_0\tau.F_0.\frac{\sin\left[\left(\omega - \omega_0 - \vec{k}.\vec{p}_c/m_0 - \delta\right)\tau/2\right]}{\left(\omega - \omega_0 - \vec{k}.\vec{p}_c/m_0 - \delta\right)\tau/2} \\ M_{ab} &= M_{ba}(\delta \longrightarrow -\delta) \end{aligned}$$

où F_0 désigne le profil spatial de l'onde laser (Gaussien par exemple).

Séparatrices spatiales :

$$\begin{aligned} M_{aa} &= M_{bb} = 1 \\ M_{ba} &= M_{ab} = i\Omega_0\tau^*.G_0 \end{aligned}$$

où G_0 désigne le profil spatial *transverse* de l'onde laser (Gaussien par exemple), et où τ^* est défini par :

$$\frac{\vec{p}_c}{m_0}\tau^* = w_0$$

avec w_0 le waist du faisceau laser.

En fait, il est facile de voir que cette modélisation *ttt champ faible* donne le même type de résultats que la modélisation dite *infiniment fine*. Cette modélisation, couramment utilisée en interférométrie atomique, consiste à faire tendre la durée d'interaction τ vers 0 et à ne garder que les termes restant (dans le cas spatial, on envisage bien sûr une largeur *spatiale* (waist) infiniment fine). Ce genre d'approximation revient en fait à **négliger tous les effets de structuration dus à la durée finie des séparatrices**, entre autres, toutes les modifications de largeurs complexes, de position centrale (décalage spatial en fin de séparatrice) et d'impulsion centrale (le fait d'avoir une impulsion centrale en sortie différente de celle d'entrée, même pour les transitions sans changement d'état interne) mises en évidence dans la partie 3.6, et rappelées dans les paragraphes précédents.

Par exemple, dans le cas temporel, on obtient cette modélisation simplifiée en prenant simplement la limite $\tau \longrightarrow 0$ dans les expressions caractérisant la modélisation *ttt champ fort généralisée* (tout en conservant, attention, une valeur finie non-nulle pour $\Omega_0\tau$, ce qui implique $\Omega_0 \longrightarrow +\infty$). Les équations de définition des impulsions centrales 4.8 et 4.9 conduisent alors à l'existence d'une seule impulsion centrale \vec{p}_c égale à l'impulsion centrale initiale \vec{p}_1 :

$$\vec{p}_{c+} = \vec{p}_{c-} = \vec{p}_c = \vec{p}_1$$

ce qui simplifie énormément l'expression de $\vec{b}_{1\pm}$ et $\varphi_{1\pm}$:

$$\begin{aligned} \vec{b}_{1\pm} &= \vec{0} \\ \varphi_{1\pm} &= \Theta_{\pm} \end{aligned}$$

sachant que :

$$\vec{a}_{1\pm} = \vec{0}$$

du fait que $\tau \longrightarrow 0$.

De plus, comme $\Omega_0 \longrightarrow +\infty$, les paramètres matriciels $E_{1\pm}$ tendent également vers 0 :

$$E_{1\pm} = 0$$

Concernant les données indicées par uv (ie \vec{r}_{uv} , \vec{p}_{uv} et Φ_{uv}), la nullité de τ conduit à :

$$\vec{r}_{uv} = \vec{0} \quad (u, v) \in (a, b)$$

(ie que cette modélisation ne rend pas compte des décallages spatiaux en fin d'interaction), ainsi qu'à :

$$\vec{p}_{aa} = \vec{p}_{bb} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Phi_{aa} = \Phi_{bb} = 0$$

et :

$$\vec{p}_{ba} = \hbar \vec{k} = -\vec{p}_{ab} \quad \text{et} \quad \Phi_{ba} = -(\omega t_1 + \phi) = -\Phi_{ab}$$

Enfin, les phases Θ_{\pm} et les facteurs d'amplitudes $M_{1\pm}$ s'écrivent en fonction de y_c de la façon suivante :

$$\Theta_{\pm} = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}$$

et :

$$\begin{aligned} M_{1\pm} &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y_c^2}} \quad \text{pour les transitions } a \longrightarrow b \\ M_{1\pm} &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \right) \quad \text{pour les transitions } a \longrightarrow a \end{aligned}$$

où on rappelle que y_c est le Off Braggness Parameter, ou pramètre d'inélasticité, défini par :

$$y_c = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_c / m_0 - \delta}{2\Omega_0}$$

(pour être cohérent avec l'approximation infiniment fine, y_c doit être nul, mais on peut dans un premier temps le garder non nul pour rendre compte de l'écart à la résonance).

Finalement, en partant du paquet d'ondes (dans l'état a par exemple) :

$$wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1})$$

on obtient les deux paquets d'ondes suivants :

$$\left[\cos\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) - i \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \sin\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) \right] . wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1 Y_1^{-1})$$

pour celui issu de la transition $a \longrightarrow a$, et :

$$i \frac{\sin\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right)}{\sqrt{1 + y_c^2}} e^{-i(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \phi)} . wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1 + \hbar \vec{k}, X_1 Y_1^{-1})$$

pour celui issu de la transition $a \longrightarrow b$.

On retrouve par conséquent le même type de modélisation que celle *ttt champ faible*, avec néanmoins une définition légèrement différente des facteurs d'amplitude :

$$\begin{aligned} M_{aa} &= \cos\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) - i \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \sin\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) \\ M_{ba} &= M_{ab} = i \sin\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) / \sqrt{1 + y_c^2} \\ M_{bb} &= \cos\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) + i \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \sin\left(\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}\right) \end{aligned}$$

Le cas spatial se traite alors de la même façon (à partir des expressions données dans [52] ou [102]), et on obtient les mêmes formules que ci-dessus en remplaçant τ par τ^* .

La conclusion principale est que ces deux modélisations simplifiées ont la **même structure** (pour les deux types de séparatrices, spatiales et temporelles). Elles résument en effet l'action d'une séparatrice par la division d'un paquet d'ondes incident en deux paquets d'ondes distincts :

- dont l'un est égal au paquet d'ondes incident, à un facteur d'amplitude près,
- dont l'autre diffère du paquet d'ondes incident par des changements :
 - d'impulsion centrale,
 - d'amplitude,
 - d'état interne,
 - de phase.

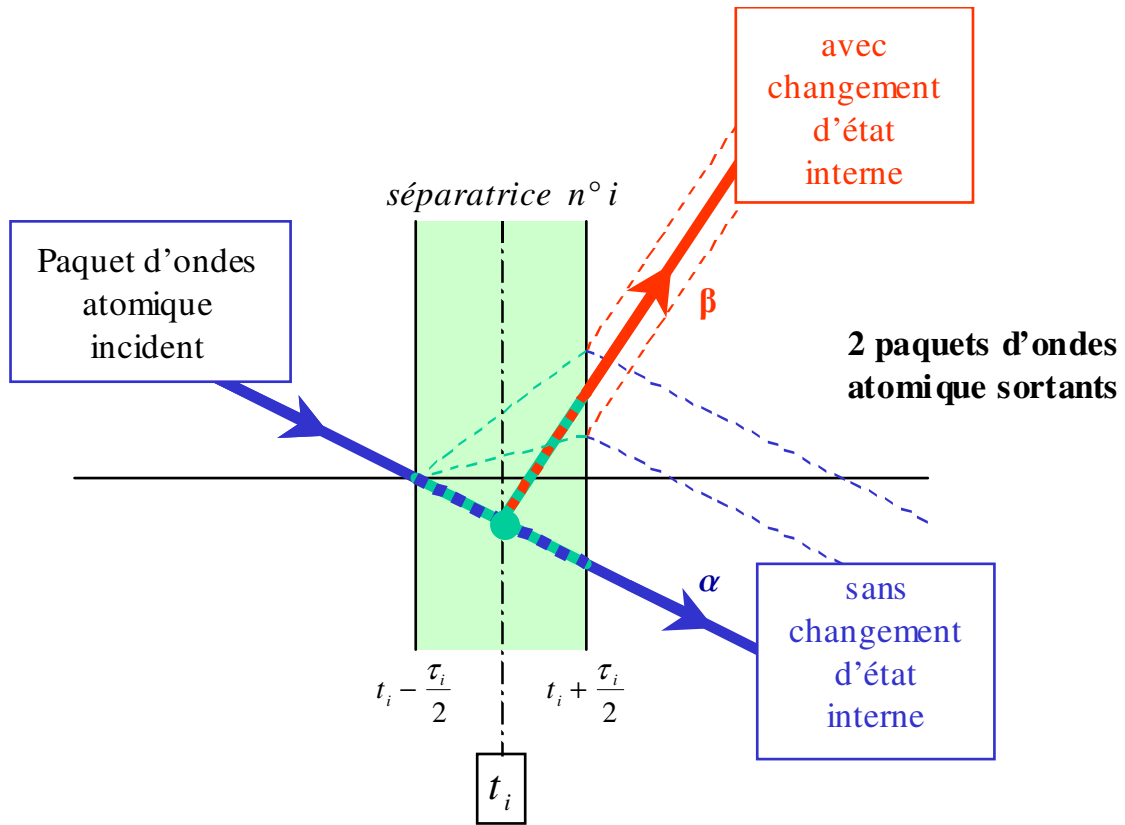


FIG. 4.11: Diagramme spatio-temporel d'une séparatrice atomique selon les modélisations *ttt champ faible* et *infiniment fine*.

Cette structure commune est résumée sur le schéma spatio-temporel 4.11, où sont également représentées en pointillé les chemins atomiques obtenus avec les modélisations *ttt champ fort* détaillées dans les paragraphes précédents.

Il y a cependant une **différence notable** entre les deux modélisations : d'un côté, la modélisation *infiniment fine* ne rend pas compte de l'impulsion additionnelle $\vec{\delta k}$ communiquée aux atomes hors résonance (dans le cas des séparatrices spatiales) ; de l'autre, la modélisation *ttt champ faible* ne rend pas compte de la modification d'amplitude réelle (oscillations de Rabi) obtenue avec de vraies séparatrices (lames π et $\pi/2$ avec fonctionnement en champ fort).

Selon l'objectif visé, on emploiera donc l'une ou l'autre de ces modélisations. Par exemple, dans l'étude des horloges atomiques avec séparatrices spatiales, il est nécessaire de rendre compte de l'impulsion additionnelle $\vec{\delta k}$ pour interpréter correctement le déphasage final. Inversement, dans l'étude des senseurs inertiels (gyromètres, gradio-gravimètres ...), il est souvent plus important de bien connaître le contraste en sortie, ce qui nécessite de rendre compte des modifications d'amplitude induites par les lames π et $\pi/2$ présentes sur chacun des deux bras atomiques.

Signalons qu'une modélisation **mixte** a été réalisée par Bordé & al. dans la référence [30] (qui rend compte de l'impulsion supplémentaire $\vec{\delta k}$ et des oscillations de Rabi).

4.1.3 Modélisation des zones sombres

Dans cette partie, nous voulons rappeler les résultats principaux du chapitre 2 concernant l'évolution de paquets d'ondes atomiques en présence de champs inertiels et gravitationnels (ceux décrits par l'Hamiltonien H_{ext} au plus quadratique en position et impulsion). Notre but est de fournir ainsi une modélisation des zones dites "sombres" d'un interféromètre atomique, ie des zones entre les séparatrices. Nous verrons dans la partie 4.2.1 que ces *zones sombres* sont des intervalles temporels (et plus précisément des "tranches temporelles" où plusieurs "chemins homologues" sont présents).

Comme nous l'avons expliqué dans la partie 2.3, nous utilisons dans ce mémoire la méthode de la *fonction génératrice*, qui permet de considérer uniquement des *paquets d'ondes atomiques Gaussiens*. L'évolution de tels paquets d'ondes en présence des champs inertiels et gravitationnels décrits par H_{ext} est alors fournie par le *théorème ABCD* qui donne le lien entre un paquet d'ondes à l'instant t_0 et le paquet d'ondes évolué à l'instant $t > t_0$ (voir partie 2.3.4).

Théorème ABCD :

Pour un paquet d'ondes initial $wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0)$ centré en (\vec{r}_0, \vec{p}_0) et ayant X_0 et Y_0 comme largeurs complexes :

$$\psi(\vec{r}, t_0) = wp(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, \vec{p}_0, X_0, Y_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\vec{r}-\vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{p}_0}$$

on obtient au temps $t_1 > t_0$ le paquet d'ondes suivant :

$$\boxed{\psi(\vec{r}, t_1) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)} wp(\vec{r}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1)} \quad (4.14)$$

ie un paquet d'ondes ayant la même structure qu'au temps t_0 , auquel on a ajouté une phase $S_{cl}(t_1, t_0, \vec{r}_0, \vec{p}_0)/\hbar$ - qui n'est rien d'autre que l'action classique entre t_0 et t_1 - et dont les nouveaux paramètres $\vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1$ sont reliés à ceux au temps t_0 par la loi ABCD classique :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t_1, t_0) & B(t_1, t_0) \\ C(t_1, t_0) & D(t_1, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t_1, t_0) \\ \vec{\phi}(t_1, t_0) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t_1, t_0) & B(t_1, t_0) \\ C(t_1, t_0) & D(t_1, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Evolution d'un paquet d'ondes modifié instantanément :

Au vu des différentes modélisations envisagées pour les séparatrices, il est également intéressant de préciser l'évolution d'un paquet d'ondes ayant été modifié par l'action d'une séparatrice. Comme

on l'a vu en détail dans la partie précédente, cette action peut être modélisée par une *action effective instantanée* (au temps milieu) qui transforme le paquet d'ondes incident en une superposition de paquets d'ondes de même forme Gaussienne, mais avec des paramètres (impulsion et position centrales, largeurs complexes, amplitude, phase...) modifiés par l'interaction :

Action effective instantanée des séparatrices :

si à $t = t_1^-$ (ie juste avant l'instant t_1) le paquet d'ondes atomique initial s'écrit :

$$wp(\vec{p}, t_1^-) = wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(mY_1)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_1)X_1Y_1^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_1)-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}_1}$$

alors à $t = t_1^+$ (ie juste après l'instant t_1), il y a plusieurs paquets d'ondes solutions qui s'écrivent sous la forme :

$$\mathcal{A} e^{i\varphi} wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_{1+}, \vec{p}_{1+}, (X_1Y_1^{-1})_+)$$

où \mathcal{A} , φ , \vec{r}_{1+} , \vec{p}_{1+} et $(X_1Y_1^{-1})_+$ s'expriment en fonction de \vec{r}_1 , \vec{p}_1 , $(X_1Y_1^{-1})$ et des paramètres de la séparatrice comme :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{1+} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_E \\ \vec{p}_{1+} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_E \\ (X_1Y_1^{-1})_+ &= X_1Y_1^{-1} + E\end{aligned}$$

Le problème est alors de savoir si on peut définir deux matrices complexes X_{1+} et Y_{1+} telles que :

$$X_{1+}Y_{1+}^{-1} = (X_1Y_1^{-1})_+$$

pour ainsi retrouver exactement la même forme que $a(\vec{p}, t_1)$, et pouvoir appliquer le théorème *ABCD* entre t_1^+ et $t_2 > t_1^+$.

En fait, cela ne présente aucune difficulté car les deux matrices X_{1+} et Y_{1+} apparaissent dans les calculs d'évolution uniquement sous la forme du *produit* $X_{1+}Y_{1+}^{-1}$, et jamais de façon isolée. Ces matrices X et Y peuvent être vues comme des artefacts qui permettent de calculer aisément l'évolution des paquets d'ondes, mais qui n'ont pas de définition univoque, comme on a pu le voir dans la partie 2.3.3 (on ne peut pas lier de façon univoque ces matrices de largeur complexes avec les largeurs réelles des distributions en position et en impulsion). Par conséquent, on peut tout à fait définir virtuellement deux matrices X_{1+} et Y_{1+} vérifiant la relation précédente, et écrire les paquets d'ondes solutions sous une forme identique à celle de $a(\vec{p}, t_1^-)$:

$$\boxed{\mathcal{A} e^{i\varphi} wp(\vec{p}, t_1; \vec{r}_{1+}, \vec{p}_{1+}, X_{1+}, Y_{1+}^{-1})}$$

Selon le théorème *ABCD*, au temps $t_2 > t_1^+$, le paquet d'ondes évolué s'écrira alors :

$$\begin{aligned}& \mathcal{A} e^{i\varphi} e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t_2, t_1^+, \vec{r}_{1+}, \vec{p}_{1+})} wp(\vec{p}, t_2; \vec{r}_2, \vec{p}_2, X_2, Y_2^{-1}) \\ &= \mathcal{A} e^{i\varphi} e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t_2, t_1^+, \vec{r}_{1+}, \vec{p}_{1+})} \frac{1}{\sqrt{\det(mY_2)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_2)X_2Y_2^{-1}(\vec{p}-\vec{p}_2)-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}_2}\end{aligned}$$

avec les lois *ABCD* suivantes :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_{21} \\ C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_{1+} \\ \vec{p}_{1+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}_{21} \\ \vec{\phi}_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_{21} \\ C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{1+} \\ Y_{1+} \end{pmatrix}$$

où on a noté par simplicité la dépendance temporelle sous forme d'indices :

notation : $A_{21} := A(t_2, t_1)$

On vérifie alors bien que $X_2 Y_2^{-1}$ ne s'exprime en fait qu'à l'aide des matrices $X_1 Y_1^{-1}$ et E :

$$\begin{aligned} X_2 Y_2^{-1} &= (A_{21} X_{1+} + B_{21} Y_{1+}) (C_{21} X_{1+} + D_{21} Y_{1+})^{-1} \\ &= (A_{21} X_{1+} + B_{21} Y_{1+}) [(C_{21} X_{1+} Y_{1+}^{-1} + D_{21}) \cdot Y_{1+}]^{-1} \\ &= (A_{21} X_{1+} + B_{21} Y_{1+}) Y_{1+}^{-1} (C_{21} X_{1+} Y_{1+}^{-1} + D_{21})^{-1} \\ &= (A_{21} X_{1+} Y_{1+}^{-1} + B_{21}) (C_{21} X_{1+} Y_{1+}^{-1} + D_{21})^{-1} \\ &= (A_{21} [X_1 Y_1^{-1} + E] + B_{21}) (C_{21} [X_1 Y_1^{-1} + E] + D_{21})^{-1} \end{aligned}$$

et l'on voit d'ailleurs que l'action effective d'une séparatrice sur les largeurs de paquets d'ondes peut être interprétée comme l'effet de champs inertiels ou gravitationnels fictifs :

$$X_2 Y_2^{-1} = (A_{21} X_1 Y_1^{-1} + [A_{21} E + B_{21}]) (C_{21} X_1 Y_1^{-1} + [C_{21} E + D_{21}])^{-1}$$

Soulignons également que l'on obtient le même type de résultat dans l'autre représentation canonique (ie la représentation position).

Dans cette représentation, le paquet d'ondes précédent s'écrit en effet sous la forme :

$$wp(\vec{r}, t_1^-) = wp(\vec{r}, t_1; \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_1)}} e^{+\frac{im}{2\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_1)Y_1X_1^{-1}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r}-\vec{r}_1) \cdot \vec{p}_1}$$

et on peut également écrire pour la matrice :

$$Y_1 X_1^{-1} = (X_1 Y_1^{-1})^{-1}$$

une loi de modification instantanée :

$$(Y_1 X_1^{-1})^+ = Y_1 X_1^{-1} + E_1$$

avec E_1 défini par :

$$Y_1 X_1^{-1} + E_1 := (X_1 Y_1^{-1} + F_1)^{-1}$$

Cette matrice E_1 se révélera très utile dans la partie 4.3.3, car c'est souvent dans la représentation position que l'on calcule le signal de sortie d'un interféromètre atomique.

4.1.4 Modélisation de la détection

Le dernier élément principal d'un interféromètre atomique est la zone de détection, où l'on interroge les atomes sortant, pour avoir accès ensuite au signal de franges. Il existe de nombreuses méthodes de détection, qui varient selon les paramètres du nuage atomique (type d'atomes, température ou degré de cohérence du nuage...) et le type de transitions utilisées pour séparer, dévier et recombiner les paquets d'ondes atomiques (changement d'état externe et/ou interne, multiples faisceaux atomiques en sortie...).

Lorsque l'on utilise des transitions Raman stimulées comme séparatrices (voir le chapitre 3), les atomes évoluant dans l'interféromètre sont indexés à la fois par leur état externe et par leur état interne, et on peut donc se contenter de mesurer l'état interne des paquets d'ondes atomiques en sortie. Le *signal de sortie* S obtenu (par fluorescence) est alors lié simplement à la fonction d'onde de sortie ψ_S :

$$S := \int_{V_D} \int_{T_D} d^3 \vec{r} \frac{dt}{T_D} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

où V_D et T_D sont respectivement le volume et la durée de la détection, où ψ_S est égale à la somme de toutes les fonctions d'onde atomiques sensibles à la méthode de détection :

$$\psi_S := \sum_i \psi_{Si}$$

et où on a volontairement mis de côté l'intégration supplémentaire sur les distributions statistiques décrivant le nuage atomique initial (voir partie 4.1.1).

Suivant le protocole employé pour interroger l'état du nuage atomique, cette double intégrale sera plus ou moins simple à effectuer (observation de la fluorescence du nuage entier à un instant donné, avec $V_D = \mathbb{R}^3$ et $T_D = 0$; ou grâce à une lame de détection avec analyse du nuage par un faisceau sonde pendant le temps T_D , avec $V_D = \mathbb{R}^2 * \delta r$ et $T_D \neq 0$).

Par exemple, pour une détection par fluorescence avec un faisceau sonde d'épaisseur δr pendant le temps T_D , on doit intégrer $|\psi_S(\vec{r}, t)|^2$ sur le temps d'arrivée t des atomes dans la lame. Or la dépendance du paquet d'ondes $\psi_S(\vec{r}, t)$ en ce temps t est généralement très complexe.

Pour un paquet d'ondes Gaussien qui évolue librement de t_0 à t , nous devons par exemple effectuer l'intégration suivante :

$$\int_{T_D} dt \frac{1}{\sqrt{\det[X_0 + Y_0 * (t - t_0)]}} e^{-\frac{m}{\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 * (t - t_0)) \cdot \text{Im}[(X_0 Y_0^{-1} + t - t_0)^{-1}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 * (t - t_0))}$$

qui devient extrêmement difficile lorsque l'on tient compte des champs inertiels et gravitationnels. Remarquons qu'il faut également définir ce que l'on entend par "temps d'arrivée" lorsque δr n'est pas infiniment petit.

De plus, d'un point de vue pratique, les domaines d'intégration V_D et T_D sont bornés, et il faut par conséquent pouvoir calculer de façon exacte une primitive de $|\psi_S(\vec{r}, t)|^2$, ou alors être capable d'estimer l'erreur commise lorsque l'on étend les bornes d'intégration à l'infini. Néanmoins, cette erreur est très faible dès que V_D englobe totalement le nuage atomique de sortie.

Dans la suite du mémoire, nous nous placerons préférentiellement dans le cas particulier où la double intégration précédente peut se ramener à une *unique intégration spatiale* sur $V_D = \mathbb{R}^3$:

$$S := \int_{V_D \simeq \mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

et nous verrons comment cette intégration peut s'effectuer simplement dans le cadre du formalisme développé dans les parties précédentes.

Le formalisme utilisé jusqu'à maintenant utilise en effet des paquets d'ondes Gaussiens comme constituants élémentaires (méthode de la fonction génératrice, théorème *ABCD*, modélisation *ttt* champ fort...). Ainsi, après évolution à l'intérieur d'un interféromètre atomique, un paquet d'ondes initialement Gaussien devient, en sortie, égal à la somme de plusieurs paquets d'ondes eux aussi Gaussiens. L'intégrale précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \left(\sum_i \psi_{Si}(\vec{r}, t) \right) \cdot \left(\sum_i \psi_{Si}^*(\vec{r}, t) \right) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} |\psi_{Si}(\vec{r}, t)|^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \psi_{Si}(\vec{r}, t) \cdot \psi_{Sj}^*(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

où chaque paquet d'ondes $\psi_{Si}(\vec{r}, t)$ est Gaussien :

$$\psi_{Si}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}_i(t) \exp \left[\frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \cdot \mathbf{A}_i(t) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \vec{\alpha}_i(t) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \right]$$

avec $\mathbf{A}_i(t)$ une matrice 3×3 symétrique complexe (dont la partie hermitienne est définie positive, voir appendice A), et $\vec{\alpha}_i(t)$ un vecteur à valeurs complexes.

Nous avons donc affaire à des intégrales Gaussiennes du type :

$$\mathcal{AB} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \, e^{\frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{a}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\vec{r}-\vec{a}) + \vec{\alpha} \cdot (\vec{r}-\vec{a})} \cdot e^{\frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{b}) \cdot \mathbf{B} \cdot (\vec{r}-\vec{b}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r}-\vec{b})}$$

qu'il est facile de calculer grâce aux formules de l'appendice A :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \, e^{\frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{a}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\vec{r}-\vec{a}) + \vec{\alpha} \cdot (\vec{r}-\vec{a})} \cdot e^{\frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{b}) \cdot \mathbf{B} \cdot (\vec{r}-\vec{b}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r}-\vec{b})} \\ &= -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\det[\mathbf{A} + \mathbf{B}]}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \mathbf{A}\vec{a} - \mathbf{B}\vec{b}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \mathbf{A}\vec{a} - \mathbf{B}\vec{b}) + \vec{a} \cdot \frac{\mathbf{A}}{2} \vec{a} + \vec{b} \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \vec{b} - \vec{\alpha} \cdot \vec{a} - \vec{\beta} \cdot \vec{b}} \end{aligned}$$

On peut alors chercher à simplifier cette expression afin de faire apparaître des combinaisons symétriques des paramètres \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$, et plus particulièrement le **point milieu** :

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

On obtient ainsi une généralisation à 3D du *théorème du point milieu* démontré à une dimension dans [35] :

Théorème du point milieu généralisé :

Le terme linéaire après intégration est égal au terme linéaire avant intégration, évalué au point milieu :

$$\exp \left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{b}) \right] \implies \exp \left[\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{a} \right) + \vec{\beta} \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{b} \right) \right]$$

ou, de façon plus complète :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \, \exp \left[(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \frac{\mathbf{A}}{2} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + (\vec{r} - \vec{b}) \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \cdot (\vec{r} - \vec{b}) + \vec{\alpha} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{b}) \right] \\ &= -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\det[\mathbf{A} + \mathbf{B}]}} e^{\left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \mathbf{A} - \frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{B} \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} \right)} \exp \left[\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{a} \right) + \vec{\beta} \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{b} \right) \right] \end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \mathbf{A}\vec{a} - \mathbf{B}\vec{b} \right) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \mathbf{A}\vec{a} - \mathbf{B}\vec{b} \right) + \vec{a} \cdot \frac{\mathbf{A}}{2} \vec{a} + \vec{b} \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \vec{b} - \vec{\alpha} \cdot \vec{a} - \vec{\beta} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \frac{\mathbf{A}}{2} \vec{a} + \vec{b} \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \vec{b} - \left(\vec{a} \mathbf{A} + \vec{b} \mathbf{B} \right) \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}}{2} \left(\mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{B}\vec{b} \right) - \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}}{2} \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \\ & \quad + \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \left(\mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{B}\vec{b} \right) - \vec{\alpha} \cdot \vec{a} - \vec{\beta} \cdot \vec{b} \\ &= \left(\vec{a} - \vec{b} \right) \mathbf{A} \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}}{2} \mathbf{B} \left(\vec{a} - \vec{b} \right) - \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}}{2} \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \\ & \quad + \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} - \mathbf{B}}{2} \right) \left(\vec{a} - \vec{b} \right) + \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{\alpha} \cdot \vec{a} - \vec{\beta} \cdot \vec{b} \\ &= \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \mathbf{A} - \frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{B} \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} \right) + \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} + \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \end{aligned}$$

qui est bien fonction du point milieu du fait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{a} \\ \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{b} \end{array} \right.$$

■

Ce résultat est très pratique car il fournit une méthode rapide d'obtention du déphasage entre deux des paquets d'ondes ψ_{Si} . En effet, on verra dans la partie suivante que les points milieux ont une grande importance dans l'expression du déphasage avant intégration spatiale sur le volume de détection. On montrera plus précisément que le déphasage après intégration spatiale est égal au déphasage avant intégration pris en un point particulier : le point milieu final (ie la demi-somme des positions centrales des paquets d'ondes au temps de détection).

Bien sûr, dans le cas d'une détection par faisceau sonde (nappe d'épaisseur δr), il faut considérer le déphasage au point d'abscisse égale à celle de la nappe supposée infiniment fine.

4.2 Une nouvelle approche des interféromètres

Dans la partie précédente, on a vu comment modéliser les différents éléments constitutifs d'un interféromètre atomique. On a donc, a priori, tous les outils pour s'attaquer au calcul du signal de franges, en particulier au calcul du déphasage global qu'un tel appareil met en évidence.

Jusqu'à très récemment, le calcul de ce déphasage interférométrique s'effectuait en **trois étapes**. Premièrement, on *identifiait les divers bras* de l'interféromètre ; ensuite, on *calculait la phase enregistrée* - et accumulée - *le long de chacun des bras* (phase due à la propagation atomique et aux séparatrices) ; enfin, on prenait la *différence de phase entre deux des bras*, à laquelle on ajoutait un déphasage supplémentaire - dit de *séparation* - dû à la *possible non-fermeture de l'interféromètre* (par exemple, on verra dans la partie 5.2 qu'il y a non-fermeture dans le cas d'un gyromètre ou d'un gradiomètre).

Le premier point dépend principalement du *type de séparatrice* envisagé (pour les séparatrices spatiales, par exemple, multiples ordres de diffraction dans le régime de Kapitza-Dirac ou deux faisceaux de sortie en régime de Bragg) et des *conditions d'interaction* (résonance ou non, présence de deux ou quatre paquets d'ondes atomiques en sortie selon le niveau de modélisation considéré), qui peuvent multiplier le nombre de bras, ou *chemins atomiques*¹³.

Le deuxième point est lié, d'une part à la *modélisation des séparatrices* (dans le cadre des *modélisations infiniment fine* ou *ttt champ faible*, l'action d'une séparatrice revient par exemple à modifier l'amplitude et l'impulsion du paquet d'ondes dévié, et à lui ajouter une phase effective), d'autre part à la *méthode de calcul de l'évolution des paquets d'ondes atomiques* entre les séparatrices.

Deux formalismes ont pour l'instant été développés : le *formalisme de Feynman* (dont on peut trouver un exposé pédagogique dans [233] et dans les cours donnés au Collège de France par Cohen-Tannoudji [47, 48]) et le *formalisme ABCD*, développé récemment par Bordé [51, 58] et détaillé dans le chapitre 2. Ils utilisent le même outil : le *propagateur* quantique, et conduisent aux mêmes résultats concernant l'évolution de paquets d'ondes (dans le cas des Hamiltoniens au plus quadratique).

Appliquées à la modélisation des interféromètres atomiques, ces deux approches ne sont cependant pas équivalentes (voir ci-dessous). Le formalisme *ABCD* étant plus adapté à la prise en compte de l'*effet réel des séparatrices* (structuration complexe du paquet d'ondes incident) - puisqu'il traite de paquets d'ondes (et non d'ondes planes) - et au calcul du signal de franges dû à *plusieurs effets inertiels et gravitationnels simultanés*, c'est lui que nous utiliserons par la suite.

Enfin, en ce qui concerne le troisième point, il est intéressant de se demander si l'on peut envisager une *méthode de calcul du déphasage* interférométrique (et du signal de franges complet) différente de celle qui est habituellement utilisée et qui consiste, comme on l'a dit, à calculer la phase totale accumulée par chaque bras et à en prendre la différence. En effet, ce genre de calcul est généralement *lourd et fastidieux*, et il *dépend fortement de la géométrie* (spatio-temporelle) de l'interféromètre considéré (il est donc non réutilisable pour d'autres géométries). De plus, il ne permet pas de mettre en évidence l'*origine véritable de simplifications finales essentielles* (par exemple, le fait que le déphasage dû à la propagation est presque entièrement compensé par le déphasage de séparation, voir partie 4.3.2).

Contrairement aux apparences, ce troisième point est extrêmement important, et il est à la base de notre modélisation des interféromètres atomiques. En effet, nous allons voir qu'il est possible de développer de *nouveaux outils de calcul du déphasage*, ainsi qu'une *nouvelle vision des interféromètres atomiques*. L'idée principale de cette approche est de ne pas simplement chercher à améliorer la modélisation des différents éléments constitutifs de l'interféromètre (voir partie précédente), mais d'*améliorer la modélisation globale* de l'interféromètre, en améliorant par exemple la *méthode* de calcul du signal de franges elle-même.

En particulier, nous allons voir qu'il est très avantageux de diviser un interféromètre en *tranches temporelles* (et plus précisément en *paires de chemins homologues*, pour lesquels il est plus facile de calculer le déphasage grâce au *théorème des quatre points finaux*), et de sommer ensuite les déphasages

¹³On emploie l'expression "chemins atomiques" pour rappeler que ce sont les trajectoires suivies par le *centre des paquets d'ondes atomiques*.

de chaque tranche. Cela nous permettra, en outre, de préciser l'*origine véritable* du déphasage global, qui est intimement liée à la présence d'une quantité invariante propre à chaque paire de chemins homologues (invariant symplectique).

Remarque : Non équivalence du formalisme de Feynman et du formalisme ABCD

En effet, dans le cadre d'une approche de type Feynman, on considère l'évolution d'*ondes pseudo-planes* (ie des ondes planes qui possèdent un centre fictif, du type $\exp \left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \right]$), et le *déphasage est calculé de façon perturbative* (intégration du Lagrangien de perturbation sur la surface d'espace-temps embrassée par les trajectoires non-perturbées).

Ce formalisme a jusqu'à maintenant été beaucoup utilisé car :

- il ne nécessite que très peu de résultats de mécanique quantique (le déphasage s'obtient par la différence des actions classiques calculées le long des trajectoires classiques ; les ondes de matières prises sous forme d'ondes pseudo-planes [définies par une position et une impulsion centrales] sont très proches des particules classiques ; les séparatrices sont considérées comme infiniment fines...)
- il permet d'obtenir rapidement le déphasage au premier ordre dans des cas simples (gravimétrie, gyrométrie et gradiométrie...)
- il donne une interprétation simple du propagateur en termes d'amplitudes spatio-temporelles : $K(\vec{r}, t, \vec{r}', t_0)$ peut être vu en effet comme l'amplitude de probabilité, pour la particule, d'arriver au point d'espace-temps (\vec{r}, t) , sachant qu'elle est partie du point (\vec{r}', t_0) .

Cette approche présente toutefois des **limites importantes** qu'il n'est plus possible d'ignorer tant le niveau de précision et de sensibilité (atteint ou espéré) des interféromètres atomiques est élevé (voir l'introduction).

En effet, si l'on veut par exemple *tenir compte de plusieurs effets* inertiels et gravitationnels sur le déphasage (gravité + gradient de gravité + rotations...), il faut, avec ce formalisme, d'abord calculer les trajectoires non-perturbées (avec, par exemple, les effets suivants : gravité + rotation), puis intégrer la perturbation (le gradient de gravité ou d'accélération par exemple) le long des trajectoires. Dans le cas d'un seul effet (gravité ou rotation), ces trajectoires sont simples à obtenir, et l'intégration précédente l'est aussi. Par contre, dans le cas de plusieurs effets (gravité et rotation par exemple), les trajectoires et l'intégration sont beaucoup plus complexes à déterminer.

Par ailleurs, se pose le *problème de la définition de la surface d'espace-temps embrassée par les trajectoires non-perturbées*. En effet, nous verrons plus loin que ces trajectoires atomiques peuvent ne pas se croiser (dans le cas d'un interféromètre soumis à une rotation par exemple), et qu'il n'est donc pas toujours possible de *fermer* l'interféromètre. Comment alors définir la surface d'espace-temps comprise entre les deux bras de l'interféromètre ? Et sur quelles trajectoires intégrer la perturbation ? (le traitement perturbatif précédent doit, en effet, être également considéré pour la "zone de non-fermeture" ...).

En outre, comment *déterminer le déphasage de séparation* dû à cette non-fermeture de l'interféromètre ? Autrement dit, en quelle position évaluer le déphasage ? Comment *prendre également en compte le processus de détection* (intégration du signal de sortie sur le volume de détection) si l'on considère des ondes planes (donc d'amplitude non-bornée) ? Dans un tel cas, comment obtenir alors le vrai signal de franges (avec termes d'*amplitude et de contraste*) ?

Enfin, outre le fait que cette base de fonctions d'onde n'est pas physique, le fait d'associer une seule onde plane à chaque bras interférométrique rend *impossible la prise en compte de l'effet réel des séparatrices atomiques* (notamment de la structuration en plusieurs paquets d'ondes du paquet d'ondes incident [voir parties 3.6 et 3.7], avec apparition de propriétés de dispersion différentes de l'étalement naturel).

Il apparaît donc nécessaire d'aller au-delà de cette approche, en développant un formalisme plus adapté aux conditions expérimentales (modélisation réaliste des séparatrices, évolution de vrais paquets

d'ondes atomiques), qui permette de calculer de façon méthodique le signal de sortie (déphasage, amplitude et contraste) pour un interféromètre soumis à plusieurs effets inertiels et gravitationnels simultanés. C'est précisément l'un des objectifs du formalisme *ABCD*, introduit par Bordé en 1990 [51] et approfondi plus récemment [58, 35, 80] (voir également le chapitre 2).

4.2.1 Chemins homologues et représentation spatio-temporelle

On a vu dans l'introduction qu'il existe de nombreux types d'interféromètre atomique :

- ayant des géométries spatio-temporelles très différentes (fermées ou non, symétriques ou non, d'aire nulle ou non...)
- avec des séparatrices atomiques diverses (spatiales ou temporelles, avec recul micro-onde ou optique, en régime de Bragg ou de diffraction pour les séparatrices spatiales...)
- sensibles à des effets différents (gravimètres, gradiomètres, gyromètres, horloges atomiques, détecteurs d'ondes gravitationnelles, appareils embarqués ou au sol, soumis à des potentiels dépendants du temps ou non...)
- ayant des fonctionnements différents (pulsé ou continu, avec sources cohérentes ou non, avec double jet...)
- visant des objectifs différents (sensibilité-exactitude-précision, long terme / court terme...).

Comme on l'a déjà dit, la méthode de calcul du signal de franges, et plus particulièrement du déphasage, observé en sortie de ces interféromètres atomiques était jusqu'à très récemment basée sur le schéma suivant :

1. identifier les bras interférométriques pertinents (ceux qui interfèrent en sortie),
2. calculer la phase accumulée le long de chaque bras (due aux séparatrices et à la propagation entre les séparatrices),
3. prendre la différence de phase entre deux des bras.

Le déphasage n'était alors calculé qu'en *sortie* de l'interféromètre, et l'aspect "boîte noire" de cette méthode ne permettait pas de mettre en évidence l'origine des simplifications essentielles observées dans l'expression finale du déphasage (notamment le fait que le déphasage dû à la propagation compense presque totalement le déphasage dû à la non fermeture éventuelle de l'interféromètre).

Ainsi, au lieu de voir l'interféromètre comme l'évolution indépendante de deux (ou plusieurs) bras dont on prend la différence de phase en sortie, il est désormais intéressant de considérer ces bras comme *une seule entité* à deux (ou plusieurs) composantes, qui évolue au cours du temps, et qui est caractérisée par le *déphasage instantané* entre chaque paire de bras.

Par exemple, dans le cas d'un interféromètre avec séparatrices temporelles comme celui de la figure 4.12, on ne cherche pas à calculer la phase accumulée pendant $t_3 - t_1$ le long de chaque bras, et à en prendre la différence, mais à calculer le déphasage entre ces bras à tout instant $t \in [t_1, t_3]$.

Cette approche permet de voir le déphasage se construire progressivement, et d'identifier ainsi précisément les diverses origines du déphasage final.

Cette vision des interféromètres comme l'évolution d'une seule entité à plusieurs composantes a également été investiguée par Bordé, sous la forme de diagrammes (similaires aux diagrammes de Feynman de l'électrodynamique quantique) représentant l'évolution des éléments de matrice densité. Basée sur l'étude perturbative de l'équation d'évolution relativiste de l'opérateur densité, cette méthode permet de montrer comment les interféromètres atomiques peuvent être décrits par de tels diagrammes. Un exposé complet de cette approche est détaillé dans [106].

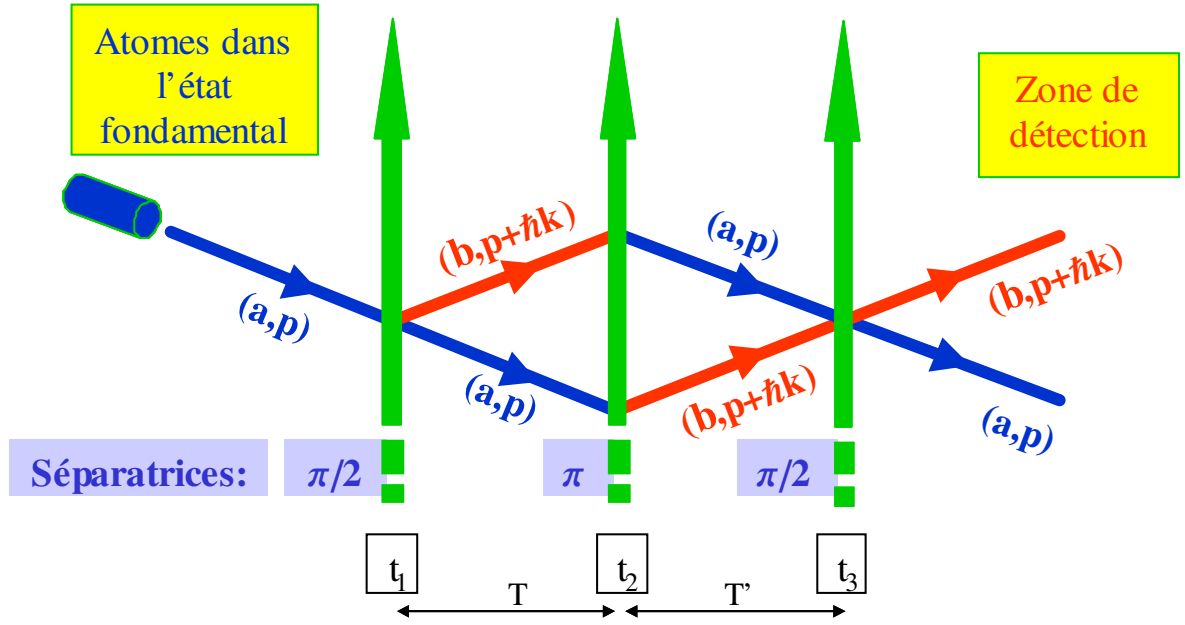


FIG. 4.12: Interféromètre atomique de Ramsey-Bordé symétrique.

Un interféromètre étant constitué de zones spatio-temporelles distinctes (séparatrices, zones sombres entre les séparatrices...), il nous faut savoir calculer le déphasage instantané entre deux bras quelconques dans chacune de ces zones.

Pour un interféromètre temporel, ces zones sont temporelles :

$$\begin{aligned} \left[t_i - \frac{\tau_i}{2}, t_i + \frac{\tau_i}{2} \right] & : \quad \text{interaction laser pendant } \tau_i \\ \left[t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_{i+1} - \frac{\tau_{i+1}}{2} \right] & : \quad \text{évolution de la sép. } i \text{ à la sép. } i + 1 \end{aligned}$$

Pour un interféromètre spatial, elles sont spatiales :

$$\begin{aligned} \left[r_i - \frac{\rho_i}{2}, r_i + \frac{\rho_i}{2} \right] & : \quad \text{interaction sur l'intervalle d'espace } \rho_i \\ \left[r_i + \frac{\rho_i}{2}, r_{i+1} - \frac{\rho_{i+1}}{2} \right] & : \quad \text{évolution de la sép. } i \text{ à la sép. } i + 1 \end{aligned}$$

Cependant, du fait que les atomes mettent un certain temps pour traverser les zones spatiales, on peut associer à chaque zone spatiale une zone temporelle équivalente (attention, la réciproque n'est pas vraie, et il s'agit là d'une dissymétrie de plus entre séparatrices spatiales et temporelles).

Il est ainsi toujours possible de diviser un interféromètre en une succession de zones temporelles distinctes, appelées par la suite "tranches temporelles".

Le **nombre de tranches temporelles** dépend du type de séparatrices utilisées. Pour un interféromètre temporel, il est égal à $2n$, où n est le nombre de séparatrices temporelles ; pour un interféromètre spatial, il est compris entre $2n$ et $2 * (\sum_{i=1}^n N_i - 1)$, où N_i est le nombre de bras distincts entrant dans la séparatrice $n^\circ i$ (s'il n'y a que deux bras, on obtient simplement $2 * (\sum_{i=1}^n 2 - 1) = 2 * (2n - 1)$). La différence vient du fait que les atomes des différents bras n'ont pas la même impulsion en sortie d'une séparatrice, et qu'ils n'entrent donc pas au même instant dans la séparatrice suivante.

Le nombre de tranches temporelles peut être considérablement réduit si l'on se place dans le cadre d'une des modélisations *ttt*, ie lorsque les séparatrices peuvent être modélisées sous la forme d'une interaction instantanée équivalente, aussi bien dans le cas temporel que dans le cas spatial (voir la partie 4.1). Dans ce cas, les zones associées aux séparatrices deviennent ponctuelles (instantanées), et le schéma spatio-temporel d'un interféromètre est extrêmement simplifié : il est simplement constitué

d'une suite d'instants (les instants effectifs d'interaction des modélisations *ttt*) séparant la durée totale de temps de vol $[t_1, t_D]$ en une succession de tranches temporelles du type de celles qui sont représentées sur la figure 4.13.

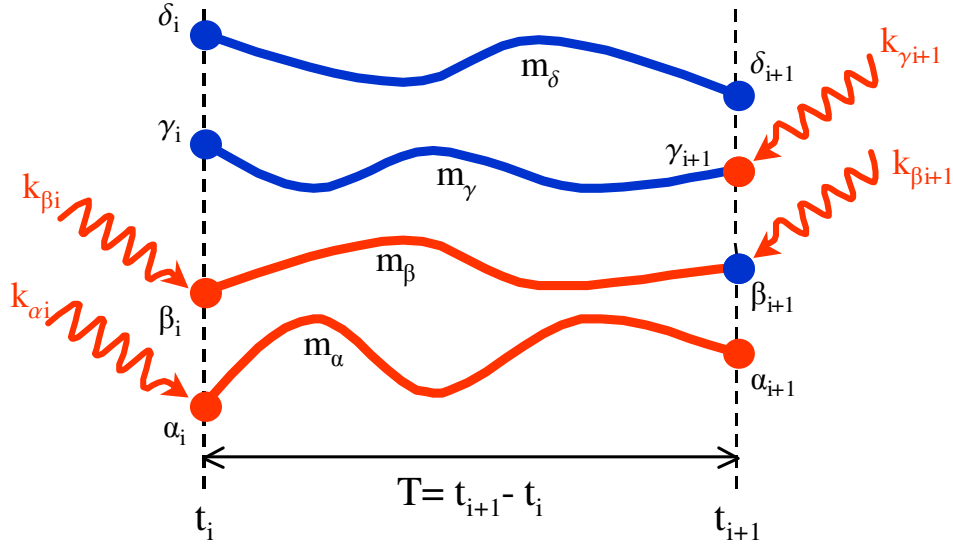


FIG. 4.13: Tranche temporelle typique d'un interféromètre atomique.

Les bras évoluant dans cette tranche $[t_i, t_{i+1}]$, ie les trajectoires des centres de paquets d'ondes atomiques entre t_i et t_{i+1} , sont appelés **chemins homologues**, en référence à leurs extrémités temporelles communes. La figure 4.13 représente donc quatre *chemins homologues*, où quatre interactions effectives instantanées sont figurées : deux au temps t_i sur les bras α et β , deux au temps t_{i+1} sur les bras β et γ .

Finalement, tout interféromètre peut être découpé en un ensemble de chemins homologues dont les extrémités (appelées aussi *vertex*) rendent compte d'une possible interaction. Sur le schéma 4.13, ces interactions effectives sont représentées par un vecteur d'onde du type $\vec{k}_{\alpha i}$, dont la notation sous-entend l'ensemble des changements dus aux séparatrices (modification de la forme du paquet d'ondes incident, de sa phase, de ses position et impulsion centrales). Si une interaction n'agit que sur un seul bras au temps t_i , les vecteurs d'ondes des autres bras sont pris nuls à cet instant.

Il convient de noter que cette distinction - entre bras subissant l'interaction et bras ne la subissant pas - dépend de la modélisation des séparatrices. En effet, dans le cadre de la modélisation *ttt champ faible*, seul un des deux paquets d'ondes sortant d'une lame $\pi/2$ "subira" une modification de ses paramètres d'évolution (changement de l'impulsion centrale et impression de la phase laser), alors qu'une modélisation plus complète (*ttt champ fort*) fait apparaître des *modifications pour tous les paquets d'ondes* principaux émergeant de la séparatrice. Bien sûr, les modifications ne sont pas les mêmes pour tous les paquets d'ondes (changement ou non de l'impulsion centrale, phase imprimée différente...), et on indiquera par la suite, si besoin est, cette différence sur les schémas spatio-temporels de la façon suivante :

- une **flèche ondulée** pour les bras subissant un changement de $+\hbar \vec{k}$ de leur impulsion centrale (changement d'état interne du type $a \mapsto b$ ou $b \mapsto a$),
- un **cercle** pour les bras subissant une séparation sans changement (important) de l'impulsion centrale (changement d'état interne du type $a \mapsto a$ ou $b \mapsto b$).

Enfin, signalons que certains vertex peuvent être superposés, comme le montrent les exemples qui suivent (pour une lame $\pi/2$, par exemple, un unique paquet d'ondes atomique incident se sépare en plusieurs paquets d'ondes). Ces exemples ne font usuellement intervenir que deux bras principaux (ie une seule paire de chemins homologues pendant toute la durée de l'interféromètre), mais nous verrons dans la partie 5.2 des exemples avec plus de deux bras (effet Borrmann atomique).

Exemple 1 : fontaine atomique avec deux séparatrices

Couramment utilisé comme horloge (micro-onde) ou dans les expériences de spectroscopie, ce type d'interféromètre atomique comporte deux séparatrices visant respectivement à diviser et à recombinaison un paquet d'ondes atomique incident (voir figure 4.14). Dans ce cas, plusieurs chemins atomiques peuvent conduire à des interférences en sortie (selon le nombre d'ordres de diffraction présents et la largeur en impulsion du nuage atomique initial [35, 59]). Le diagramme spatio-temporel correspondant à deux de ces chemins atomiques cohérents est donné sur la figure 4.15. Il y a une seule paire de chemins homologues (α et β) et 4 interactions effectives aux vertex $\alpha 1$ et $\beta 1$ (dont la position est identique), ainsi qu'aux vertex $\alpha 2$ et $\beta 2$ (dont la position est distincte). Dans le cadre de la modélisation infiniment fine ou *ttt champ faible* des séparatrices, il n'y a que 2 interactions effectives en $\beta 1$ et $\alpha 2$ (voir [81]).

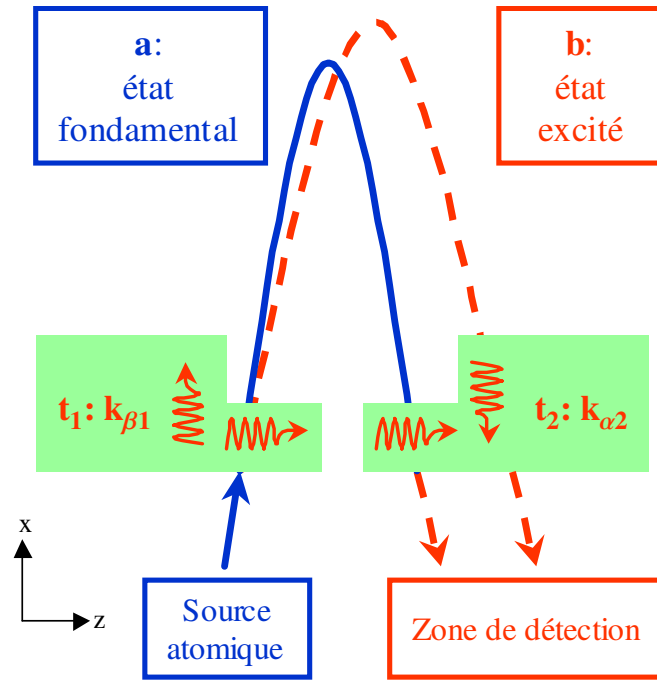


FIG. 4.14: Fontaine atomique avec deux séparatrices spatiales.

Exemple 2 : interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique (géométrie Mach-Zehnder)

Composé de trois ou quatre séparatrices, ce type d'interféromètre est le plus simple des interféromètres à *géométrie fermée* (voir figure 4.12) ; il permet donc d'utiliser des transitions optiques (ie avec forte déviation des trajectoires due au recul). Sa symétrie axiale (en forme de losange) permet notamment d'éliminer du déphasage final le terme de recul et celui d'horloge (le temps passé par chaque bras dans chacun des états internes est en effet le même). Il est utilisé en gyrométrie (il possède une aire non-nulle), en gravimétrie, en gradiométrie... Le diagramme spatio-temporel correspondant à trois séparatrices est représenté sur la figure 4.16 : il comporte une seule paire de chemins homologues et 6 interactions effectives (4 selon la modélisation infiniment fine ou *ttt champ faible* des séparatrices).

Exemple 3 : interféromètre de Ramsey-Bordé asymétrique

Contrairement au cas précédent, le déphasage principal dans ce type d'interféromètre dépend du recul et du terme d'horloge. On utilise alors généralement sa non-symétrie pour réaliser des horloges (optiques) ou pour mesurer le recul (ie mesurer \hbar), et avoir ainsi une mesure indirecte de la constante de structure fine α . La figure 4.17 représente le schéma de principe d'un tel appareil. Parmi les nombreux chemins atomiques présents dans ce type d'interféromètre, seuls les quatre chemins conduisant à des interféromètres fermés sont représentés. Le diagramme spatio-temporel de l'un de ces deux couples de chemins homologues est donné sur la figure 4.18, où 8 interactions effectives sont figurées (4 seulement selon la modélisation infiniment fine ou *ttt-champ faible* des séparatrices).

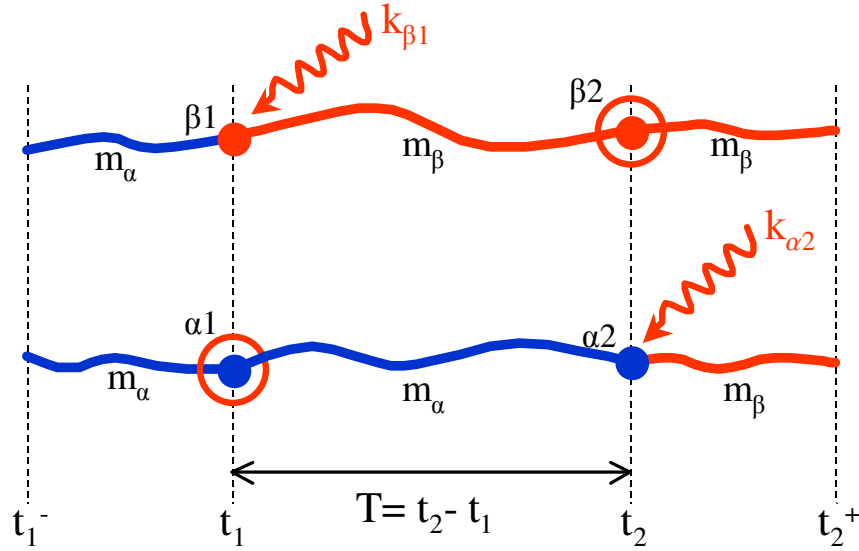


FIG. 4.15: Diagramme spatio-temporel d'une fontaine atomique.

Reste maintenant à obtenir le déphasage instantané entre les deux bras principaux d'un interféromètre atomique. Pour cela, on a essentiellement besoin de connaître le déphasage instantané d'une seule paire de chemins homologues ; c'est précisément l'objectif des paragraphes suivants.

4.2.2 Théorème des quatre points finaux

On a vu qu'une paire de chemins homologues (comme celle qui est représentée sur la figure 4.19) constituait une brique fondamentale à partir de laquelle on peut construire n'importe quel interféromètre atomique. Pour un Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion, ces chemins ne sont rien d'autres que les *trajectoires classiques* suivies par le centre des paquets d'ondes atomiques présents dans l'interféromètre (conséquence du théorème d'Erhenfest).

Ces trajectoires sont alors repérées par les *masses effectives* (m_α ou m_β) des niveaux atomiques correspondant (voir l'introduction de ce chapitre concernant la nuance entre les masses m , \tilde{m} et m^*), et complètement déterminées par l'intervalle¹⁴ de temps de vol $[t_1, t_2]$ et par les position et impulsion initiales ($\vec{r}_{\alpha 1}$, $\vec{p}_{\alpha 1}$, $\vec{r}_{\beta 1}$, $\vec{p}_{\beta 1}$) du centre des paquets d'ondes.

Au vu des résultats du chapitre 2 concernant l'évolution de paquets d'ondes atomiques en présence d'un tel Hamiltonien, il est alors simple d'obtenir le déphasage entre les deux paquets d'ondes associés à chacun des chemins homologues. Plus précisément, on va montrer que la partie principale de ce déphasage s'exprime uniquement en fonction des coordonnées des quatre points finaux (ie aux vertex $\alpha 1$, $\beta 1$, $\alpha 2$ et $\beta 2$). On montrera de plus que l'origine de ce "théorème des quatre points finaux" est intimement liée à la présence d'une *quantité invariante* (un *invariant symplectique*) propre à la paire de chemins homologues considérée.

¹⁴Pour un Hamiltonien H_{ext} indépendant du temps, on a uniquement besoin de la durée du vol $T := t_2 - t_1$.

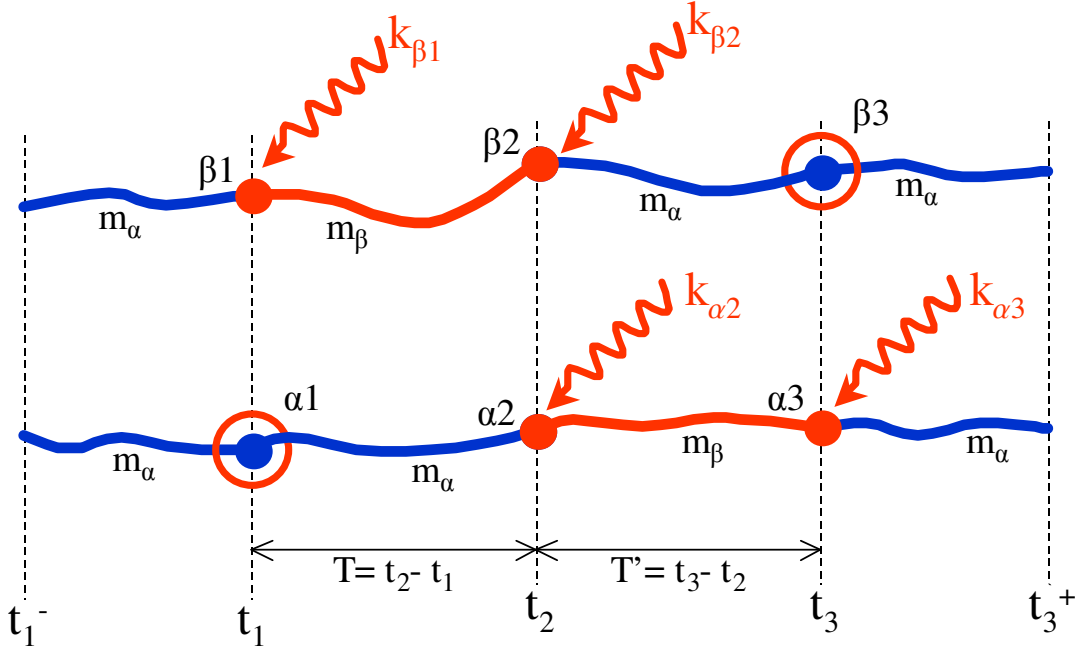


FIG. 4.16: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre atomique de Ramsey-Bordé symétrique.

Déphasage principal et déphasage de propagation

Comme dans les autres chapitres de ce mémoire, on utilise ici la méthode de la fonction génératrice (voir partie 2.3.2), qui nous permet de ne considérer que des paquets d'ondes atomiques Gaussiens du type :

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}, t_1) = wp(\vec{r}, t_1; m_{\alpha}, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, X_{\alpha 1}, Y_{\alpha 1}) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_{\alpha 1})}} e^{\frac{im_{\alpha}}{2\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1})Y_{\alpha 1}X_{\alpha 1}^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) + \frac{i}{\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) \cdot \vec{p}_{\alpha 1}}$$

(exprimé à l'instant t_1 pour le niveau interne α).

A l'instant $t_2 > t_1$, ce paquet d'ondes devient alors égal à :

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}, t_2) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})} wp(\vec{r}, t_2; m_{\alpha}, \vec{r}_{\alpha 2}, \vec{p}_{\alpha 2}, X_{\alpha 2}, Y_{\alpha 2})$$

où $S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha})$ est l'action classique entre t_1 et t_2 , et où les quantités $(\vec{r}_{\alpha 2}, \vec{p}_{\alpha 2}, X_{\alpha 2}, Y_{\alpha 2})$ à l'instant t_2 s'expriment en fonction des quantités $(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, X_{\alpha 1}, Y_{\alpha 1})$ à l'instant t_1 , grâce à une unique loi *ABCD* (théorème *ABCD*, voir partie précédente et partie 2.3.4).

L'action classique est légèrement différente des expressions établies dans la partie 2.2.4.

En effet, du fait que les atomes ont plusieurs états internes distincts (deux effectifs dans ce mémoire), il faut tenir compte de l'écart en énergie entre ces niveaux lors de la propagation des paquets d'ondes. Pour le chemin atomique α , cela se traduit simplement par l'ajout du terme :

$$-E_{\alpha} \cdot (t_2 - t_1)$$

à l'action usuelle $S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha})$:

$$S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) \longrightarrow S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) - E_{\alpha} \cdot (t_2 - t_1)$$

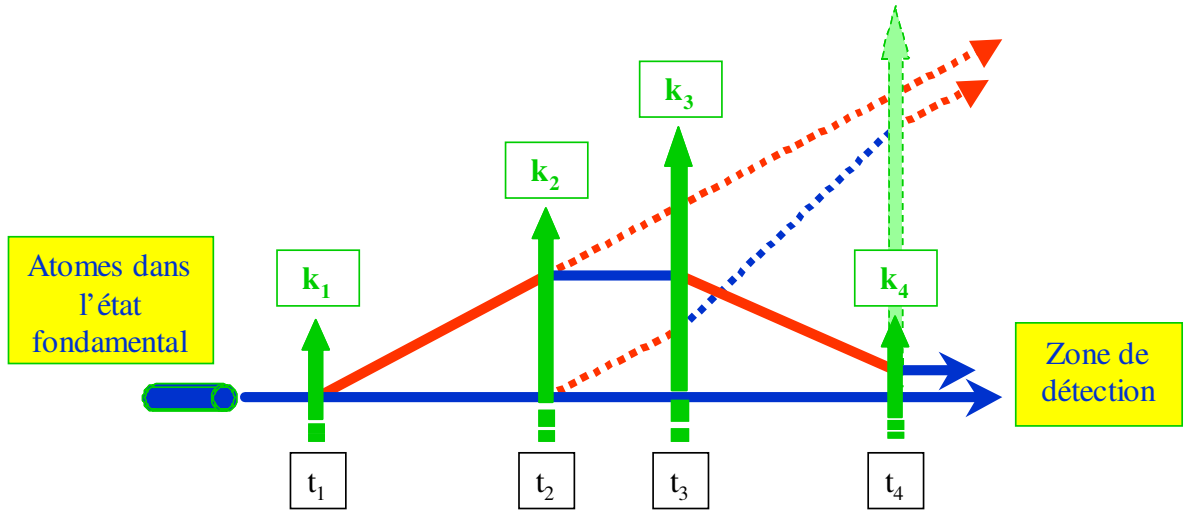


FIG. 4.17: Interféromètre atomique de Ramsey-Bordé asymétrique.

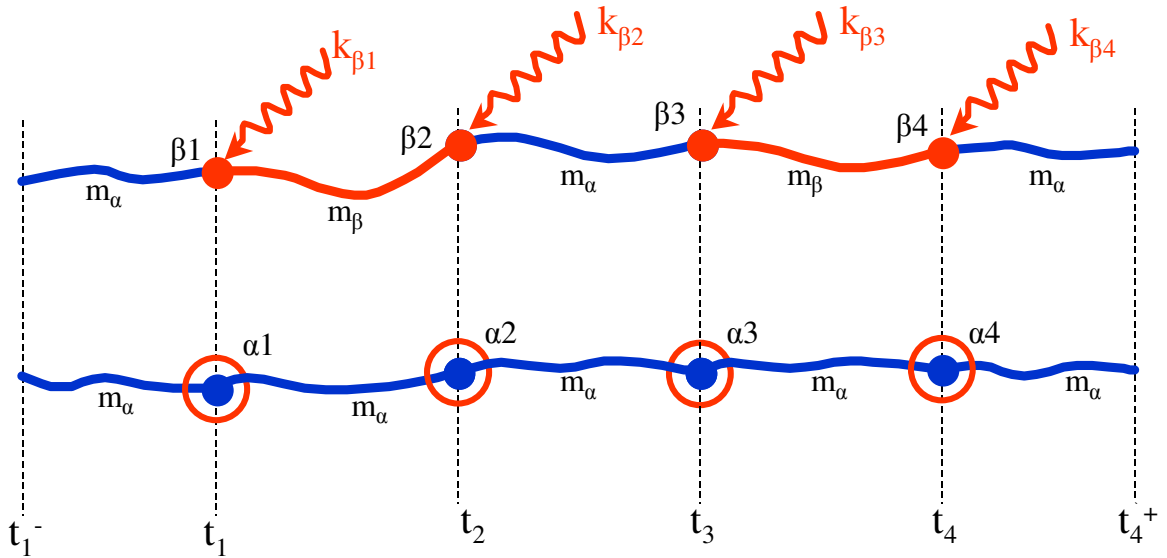


FIG. 4.18: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre de Ramsey-Bordé asymétrique.

Comme on a vu dans l'introduction, l'énergie E_α est intimement liée à la masse \widetilde{m}_α :

$$E_\alpha = \widetilde{m}_\alpha c^2$$

définie à partir de la masse au repos m lorsque l'on fait l'approximation tangente (voir partie 2.1). Dans la suite, nous utiliserons la notation (E_α, m_α) , qui nous laisse la liberté de choisir l'approximation non-relativiste habituelle :

$$\begin{aligned} E_\alpha &\longrightarrow m_\alpha c^2 \\ m_\alpha &\longrightarrow m_\alpha \end{aligned}$$

ou l'approximation tangente :

$$\begin{aligned} E_\alpha &\longrightarrow \widetilde{m}_\alpha c^2 \\ m_\alpha &\longrightarrow m_\alpha^* \end{aligned}$$

La phase locale (définie à une constante près) de ce paquet d'ondes à l'instant t_2 est donc égale à :

$$\frac{1}{\hbar} S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}) + \frac{1}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) \cdot \vec{p}_{\alpha 2} - \frac{m_\alpha}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) \cdot \text{Im} [Y_{\alpha 2} X_{\alpha 2}^{-1}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \text{Im} [\ln (\det (X_{\alpha 2}))]$$

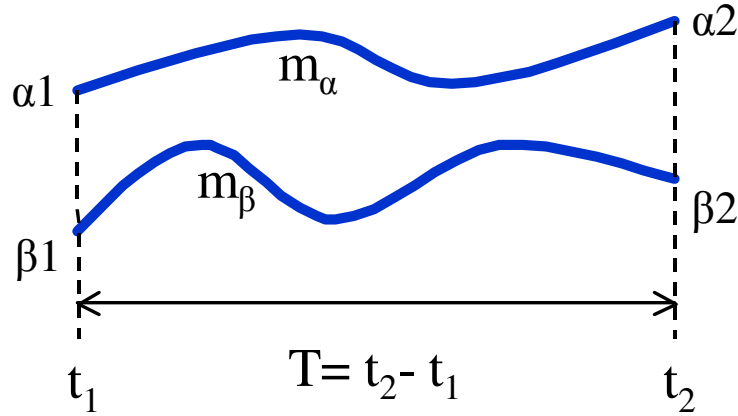


FIG. 4.19: Une paire de chemins homologues

alors qu'elle vaut :

$$\frac{1}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) \cdot \vec{p}_{\alpha 1} - \frac{m_{\alpha}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) \cdot \text{Im} [Y_{\alpha 1} X_{\alpha 1}^{-1}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) - \frac{1}{2} \text{Im} [\ln (\det (X_{\alpha 1}))]$$

à l'instant t_1 .

On peut alors se demander quelle est la phase accumulée par un tel paquet d'ondes entre deux instants t_1 et t_2 .

Du fait que la phase atomique instantanée dépend du vecteur position \vec{r} , cette question n'a de sens que si l'on précise, avant tout, en quel point on veut la mesurer. La phase dont on parle est alors une phase *locale*, dont on mesure l'évolution *en un certain point fixe* de l'espace. Néanmoins, lorsque le paquet d'ondes est en mouvement, cette phase qui varie beaucoup n'est alors plus caractéristique du paquet d'ondes. Se pose également la question du point le plus pertinent pour évaluer cette phase afin d'être ensuite capable de comparer le résultat à deux instants différents.

Ce problème disparaît lorsque l'on a affaire à des ondes planes car, dans ce cas, tous les points de l'espace sont équivalents, et on peut alors donner du sens à la différence de phase entre deux instants. On obtient ainsi que la phase accumulée entre t_1 et t_2 par l'onde plane :

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_{\alpha 1} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 1}) \right]$$

a pour valeur :

$$\frac{1}{\hbar} [S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) + \vec{p}_{\alpha 1} \cdot \vec{r}_{\alpha 1} - \vec{p}_{\alpha 2} \cdot \vec{r}_{\alpha 2}]$$

Bien sûr, nous ne nous contenterons pas d'un traitement en ondes planes, et le signal de franges établi le sera pour de vrais paquets d'ondes (Gaussiens). Néanmoins, dans l'expression du déphasage obtenu entre deux paquets d'ondes, on pourra toujours identifier un terme correspondant à la partie "onde plane" des paquets d'ondes (porteuses). Ce déphasage, appelé par la suite "*déphasage principal*" ou "*partie principale du déphasage*", est issu de l'interférence des *ondes planes centrales* associées aux paquets d'ondes, ie des ondes planes dont l'impulsion est égale à l'impulsion centrale des paquets d'ondes. Nous verrons bientôt que le *théorème des quatre points finaux* montre précisément comment déterminer ce déphasage principal et quelle est son origine véritable.

Introduisons donc pour le paquet d'ondes précédent une **phase accumulée principale** :

$$\frac{1}{\hbar} [S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) + \vec{p}_{\alpha 1} \cdot \vec{r}_{\alpha 1} - \vec{p}_{\alpha 2} \cdot \vec{r}_{\alpha 2}]$$

correspondant à la phase accumulée par sa partie "onde plane centrale" entre les instants t_1 et t_2 (ie finalement la partie indépendante de la forme du paquet d'ondes).

Une autre approche de ce problème de définition de la phase accumulée par un paquet d'ondes de t_1 à t_2 consiste à séparer la phase locale précédente en une phase *directe* due à la propagation, ou **phase de propagation** :

$$\frac{1}{\hbar} S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})$$

ie l'action (divisée par \hbar), et en une phase *indirecte* :

$$\frac{1}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) \cdot \vec{p}_{\alpha 2} - \frac{m_{\alpha}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) \cdot \text{Im} [Y_{\alpha 2} X_{\alpha 2}^{-1}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \text{Im} [\ln (\det (X_{\alpha 2}))]$$

exprimant essentiellement la variation de phase avec le vecteur $\vec{r} - \vec{r}_{\alpha 2}$, ie en fonction de la distance au centre du paquet d'ondes.

Les **deux phases caractéristiques** qu'un paquet d'ondes accumule de t_1 à t_2 sont donc :

1. la *phase accumulée principale* :

$$\varphi_{\alpha}(t_2, t_1) := \frac{1}{\hbar} [S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) + \vec{p}_{\alpha 1} \cdot \vec{r}_{\alpha 1} - \vec{p}_{\alpha 2} \cdot \vec{r}_{\alpha 2}]$$

2. la *phase de propagation* (ie simplement l'action) :

$$\frac{1}{\hbar} S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})$$

Pour la paire de chemins homologues de la figure 4.19, on peut donc également définir deux types de déphasage entre le chemin β et le chemin α :

1. le **déphasage principal** :

$$\boxed{\delta\varphi_{\beta\alpha}(t_2, t_1) := \varphi_{\beta}(t_2, t_1) - \varphi_{\alpha}(t_2, t_1)} \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{\hbar} [\{S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1}, m_{\beta}) + \vec{p}_{\beta 1} \cdot \vec{r}_{\beta 1} - \vec{p}_{\beta 2} \cdot \vec{r}_{\beta 2}\} - \{S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) + \vec{p}_{\alpha 1} \cdot \vec{r}_{\alpha 1} - \vec{p}_{\alpha 2} \cdot \vec{r}_{\alpha 2}\}]$$

qui n'est rien d'autre que le déphasage entre les ondes planes centrales associées aux deux paquets d'ondes, ie la partie qui *ne dépend pas de la structure des paquets d'ondes* (dans la partie suivante, on considérera le déphasage complet, en tenant compte des largeurs X et Y des paquets d'ondes),

2. le **déphasage de propagation** :

$$\delta S / \hbar$$

où :

$$\delta S = S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1}, m_{\beta}) - S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha})$$

est la différence des actions classiques.

Action classique et densités massiques

Introduisons maintenant l'expression de l'action classique établie dans la partie 2.2.4 :

$$S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha}) = \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \vec{p}_{\alpha 2} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \vec{p}_{\alpha 1} - E_{\alpha} \cdot (t_2 - t_1) \\ + \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{\phi}_2 \cdot \vec{r}_{\alpha 2} - \frac{1}{2} \vec{\xi}_2 \cdot \vec{p}_{\alpha 2} + \frac{1}{2} m_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} dt' \left(\vec{g}(t') \cdot \vec{\xi}(t') - \vec{f}(t') \cdot \vec{\phi}(t') \right)$$

Le déphasage principal $\delta\varphi_{\beta\alpha}$ s'écrit alors :

$$\hbar * \delta\varphi_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \vec{p}_{\alpha 2} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 2} \cdot \vec{p}_{\beta 2} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 1} \cdot \vec{p}_{\beta 1} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \vec{p}_{\alpha 1} \\ + \frac{1}{2} \vec{\phi}_2 \cdot (m_{\beta} \vec{r}_{\beta 2} - m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \vec{\xi}_2 \cdot (\vec{p}_{\beta 2} - \vec{p}_{\alpha 2}) \\ + \frac{1}{2} (m_{\beta} - m_{\alpha}) \int_{t_1}^{t_2} dt' \left(\vec{g}(t') \cdot \vec{\xi}(t') - \vec{f}(t') \cdot \vec{\phi}(t') \right) \\ - (E_{\beta} - E_{\alpha}) \cdot (t_2 - t_1)$$

où l'on voit apparaître des termes dépendant de la différence $(m_{\beta} - m_{\alpha})$ des masses au repos (associées à chaque niveau interne).

En fait, on peut voir facilement qu'il est plus avantageux d'écrire la différence d'action δS et le déphasage principal $\delta\varphi_{\beta\alpha}$ en séparant les *quantités indépendantes des masses au repos* des quantités qui en dépendent (ie des termes qui dépendent des différences de masse).

Ainsi la différence d'actions devient égale à :

$$\delta S = S_{\beta} - S_{\alpha} = \frac{m_{\beta} + m_{\alpha}}{2} \left(\frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) + \frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{2} \left(\frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} + \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \quad (4.18)$$

avec :

$$S_{\alpha} := S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, m_{\alpha})$$

et chaque action classique divisée par la masse s'écrit :

$$\frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} = \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_{\alpha}} - \frac{E_{\alpha}}{m_{\alpha}} (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \vec{\phi}_2 \cdot \vec{r}_{\alpha 2} - \frac{1}{2} \vec{\xi}_2 \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt' \left(\vec{g}(t') \cdot \vec{\xi}(t') - \vec{f}(t') \cdot \vec{\phi}(t') \right)$$

(pour l'action dépendant de m_{α} par exemple).

A l'aide de ces diverses *densités massiques*, on obtient par conséquent :

$$\frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} = \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_{\beta}} \\ + \frac{1}{2} \vec{\phi}_2 \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \vec{\xi}_2 \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} \right) - \left(\frac{E_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{E_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \cdot (t_2 - t_1) \quad (4.19)$$

et :

$$\left\{ \frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} - \vec{r}_{\beta 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} + \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_{\beta}} \right\} - \left\{ \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} - \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} + \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_{\alpha}} \right\} \\ = \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_{\beta}} - \frac{1}{2} \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_{\alpha}} \\ + \frac{1}{2} \vec{\phi}_2 \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \vec{\xi}_2 \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} \right) - \left(\frac{E_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{E_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \cdot (t_2 - t_1) \quad (4.20)$$

Invariant symplectique associé aux chemins homologues

Dans les parties 2.2.2 et 2.4.4, on a déjà vu l'importance de la structure symplectique de la mécanique Hamiltonienne.

En effet, dans la partie 2.2.2 (et de façon plus précise dans l'appendice B), on a utilisé le fait que les solutions des équations de Hamilton appartiennent au *groupe des transformations symplectiques* de l'espace des phases \mathcal{V} ($\mathcal{V} := R^6$ dans notre cas) pour montrer que la matrice :

$$\mathcal{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix}$$

vérifiait la relation suivante :

$$\widetilde{\mathcal{M}} \mathbf{J} \mathcal{M} = \mathbf{J}$$

(le signe \sim désigne la transposition).

Cette dernière relation exprime le fait que toute quantité ne dépendant que de $\widetilde{\mathcal{M}} \mathbf{J} \mathcal{M}$ est invariante dans le temps ; elle n'est rien d'autre que la relation de définition d'une **transformation symplectique** (dans la base de \mathcal{V} où la forme symplectique fondamentale ϖ s'écrit :

$$\varpi(u, v) = \widetilde{u} \mathbf{J} v$$

avec u et v appartenant à \mathcal{V} et où :

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice symplectique fondamentale).

On en a alors déduit de nombreuses propriétés intéressantes pour les matrices $ABCD$, dont la **propriété d'unitarité** :

$$\widetilde{A}D - \widetilde{C}B = A\widetilde{D} - B\widetilde{C} = 1$$

et l'existence de tout un ensemble de quantités invariantes faisant intervenir $\widetilde{\mathcal{M}} \mathbf{J} \mathcal{M}$ (voir partie 2.4.4). En effet, la quantité suivante est constante :

$$\widetilde{b}(t) \cdot \alpha(t) - \widetilde{a}(t) \cdot \beta(t) = \widetilde{b}(t_0) \cdot \alpha(t_0) - \widetilde{a}(t_0) \cdot \beta(t_0)$$

si :

$$\begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}$$

sont deux paires de quantités (scalaires, vecteurs, tenseurs d'ordre quelconque) obéissant à la *même* loi $ABCD$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(t_0) \\ a(t_0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta(t_0) \\ \alpha(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Par exemple, dans la partie 2.4.4, on a montré que le théorème $ABCD$ pouvait être vu comme un calcul de vecteur propre pour une **valeur propre invariante dans le temps** :

$$\widetilde{X}_1 \cdot \left(\frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{\phi}(t, t_0) \right) - \widetilde{Y}_1 \cdot \left(\vec{r}_1 - \vec{\xi}(t, t_0) \right) = \widetilde{X}_0 \cdot \frac{\vec{p}_0}{m} - \widetilde{Y}_0 \cdot \vec{r}_0$$

où $(\vec{r}_0, \frac{\vec{p}_0}{m}, X_0, Y_0)$ caractérise le paquet d'ondes initial. Cette valeur propre peut alors s'écrire simplement avec la matrice J :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{Y}_1 \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 - \vec{\xi}(t, t_0) \\ \frac{\vec{p}_1}{m} - \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_0 & \widetilde{Y}_0 \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \frac{\vec{p}_0}{m} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

montrant de façon plus explicite le lien avec la structure symplectique des matrices $ABCD$.

La richesse de cette structure est bien mise en évidence par la présence d'un autre invariant symplectique très important, associé à la **conservation du volume de l'espace des phases**.

A partir des largeurs complexes X_1 et Y_1 du paquet d'ondes Gaussien :

$$\exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) Y_1 X_1^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{p}_1 \right]$$

on peut en effet construire l'invariant suivant :

$$\widetilde{X}_1^* Y_1 - \widetilde{Y}_1^* X_1 := \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^* & \widetilde{Y}_1^* \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_0^* & \widetilde{Y}_0^* \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

qui rend compte simplement de la conservation du volume de l'espace des phases au cours du mouvement (théorème de Liouville).

Par exemple, dans le cas libre et à une dimension, cet invariant s'écrit :

$$2 \operatorname{Im} [X_0^* Y_0] = \frac{i\hbar}{m}$$

pour un paquet d'ondes minimal au temps t_0 (voir paragraphe 2.3.3) :

$$iX_0 = \Delta z \quad , \quad mY_0 = \frac{\hbar}{2\Delta z}$$

Dans ces exemples, on a construit deux quantités invariantes à partir d'un seul paquet d'ondes (à partir de ses paramètres de structure, ie de ses position et impulsion centrales et de ses largeurs dans l'espace des phases), mais on peut également construire de telles quantités à partir de plusieurs paquets d'ondes. La seule condition est alors que les paramètres mis en jeu respectent la même loi $ABCD$ ¹⁵, ie que l'on considère des paquets d'ondes évoluant pendant le même intervalle de temps, ce qui n'est autre que la définition des chemins homologues.

On peut ainsi *construire plusieurs invariants symplectiques à partir des paquets d'ondes associés aux chemins homologues*.

Par exemple, pour une seule paire de chemins homologues, on peut vérifier facilement que les quantités suivantes sont bien des invariants symplectiques :

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{\alpha 2} - \vec{\xi}_2) \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \vec{\phi}_2 \right) - (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{\xi}_2) \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} - \vec{\phi}_2 \right) &= \begin{pmatrix} \widetilde{r}_{\alpha 2} - \widetilde{\xi}_2 & \widetilde{p}_{\alpha 2} - \widetilde{\phi}_2 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \vec{r}_{\beta 2} - \vec{\xi}_2 \\ \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \vec{\phi}_2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{X}_{\alpha 2} \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \vec{\phi}_2 \right) - \widetilde{Y}_{\alpha 2} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{\xi}_2) &= \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{\alpha 2} & \widetilde{Y}_{\alpha 2} \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_{\beta 2} - \vec{\xi}_2 \\ \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \vec{\phi}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹⁵Cette loi $ABCD$ est identique uniquement pour les paramètres indépendant de la masse. Du point de vue de la mécanique symplectique, les quantités \vec{r} et \vec{p}/m sont ainsi considérées comme *plus fondamentales* que les quantités \vec{r} et \vec{p} usuellement utilisées en mécanique quantique.

$$\widetilde{X_{\beta 2}} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} - \overrightarrow{\phi_2} \right) - \widetilde{Y_{\beta 2}} \cdot \left(\overrightarrow{r_{\alpha 2}} - \overrightarrow{\xi_2} \right) = \left(\widetilde{X_{\beta 2}} \quad \widetilde{Y_{\beta 2}} \right) \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{r_{\alpha 2}} - \overrightarrow{\xi_2} \\ \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} - \overrightarrow{\phi_2} \end{array} \right)$$

$$\widetilde{X_{\alpha 2}} \cdot Y_{\beta 2} - \widetilde{Y_{\alpha 2}} \cdot X_{\beta 2} = \left(\widetilde{X_{\alpha 2}} \quad \widetilde{Y_{\alpha 2}} \right) \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\begin{array}{c} X_{\beta 2} \\ Y_{\beta 2} \end{array} \right)$$

$$\widetilde{X_{\alpha 2}}^* \cdot Y_{\beta 2} - \widetilde{Y_{\alpha 2}}^* \cdot X_{\beta 2} = \left(\widetilde{X_{\alpha 2}}^* \quad \widetilde{Y_{\alpha 2}}^* \right) \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\begin{array}{c} X_{\beta 2} \\ Y_{\beta 2} \end{array} \right)$$

etc.

En particulier, le premier invariant de cette liste :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{r_{\alpha 2}} - \overrightarrow{\xi_2} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}}}{m_{\beta}} - \overrightarrow{\phi_2} \right) - \left(\overrightarrow{r_{\beta 2}} - \overrightarrow{\xi_2} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} - \overrightarrow{\phi_2} \right) = \overrightarrow{r_{\alpha 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 1}}}{m_{\beta}} - \overrightarrow{r_{\beta 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 1}}}{m_{\alpha}}} \quad (4.23)$$

est très important car il ne dépend que des paramètres définissant les chemins homologues : il *caractérise en fait une telle paire de chemins homologues*. Comme l'a souligné Bordé [234], cet invariant est l'analogue, en optique atomique, de l'*invariant de Lagrange*, qui est bien connu en optique classique [235].

Comme il a la dimension d'une vitesse au carré que multiplie un temps, on peut également le voir, en le divisant par la vitesse de la lumière au carré, comme un *temps propre* $\tau'_{\alpha\beta}$, caractéristique des chemins homologues [234] :

$$\overrightarrow{r_{\alpha 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 1}}}{m_{\beta}} - \overrightarrow{r_{\beta 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 1}}}{m_{\alpha}} = c^2 \cdot \tau'_{\alpha\beta}$$

Cet **invariant caractéristique** va alors se révéler très utile pour exprimer le déphasage entre deux chemins homologues.

Théorème des quatre points finaux

L'équation 4.23 peut aussi s'écrire comme :

$$\boxed{\overrightarrow{\phi_2} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta 2}} - \overrightarrow{r_{\alpha 2}}) - \overrightarrow{\xi_2} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}}}{m_{\beta}} - \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} \right) = \overrightarrow{r_{\beta 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} - \overrightarrow{r_{\alpha 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}}}{m_{\beta}} + \overrightarrow{r_{\alpha 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 1}}}{m_{\beta}} - \overrightarrow{r_{\beta 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 1}}}{m_{\alpha}}} \quad (4.24)$$

où l'on reconnaît le dernier terme des relations 4.19 et 4.20.

La différence d'actions massiques peut alors se ré-écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\beta 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}}}{m_{\beta}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\alpha 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\alpha 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 1}}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\beta 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 1}}}{m_{\beta}} \\ &+ \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\beta 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\alpha 2}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}}}{m_{\beta}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\alpha 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 1}}}{m_{\beta}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{r_{\beta 1}} \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\alpha 1}}}{m_{\alpha}} - \left(\frac{E_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{E_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

ie aussi :

$$\frac{S_\beta}{m_\beta} - \frac{S_\alpha}{m_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} + \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} + \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) - \left(\frac{E_\beta}{m_\beta} - \frac{E_\alpha}{m_\alpha} \right) \cdot (t_2 - t_1) \quad (4.25)$$

Finalement, comme :

$$\delta S = S_\beta - S_\alpha = \frac{m_\beta + m_\alpha}{2} \left(\frac{S_\beta}{m_\beta} - \frac{S_\alpha}{m_\alpha} \right) + \frac{m_\beta - m_\alpha}{2} \left(\frac{S_\beta}{m_\beta} + \frac{S_\alpha}{m_\alpha} \right)$$

et :

$$\frac{m_\beta + m_\alpha}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_\beta} \right) = (\vec{p}_{\alpha i} - \vec{p}_{\beta i}) + \frac{m_\beta - m_\alpha}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_\beta} + \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha} \right)$$

on obtient l'expression suivante pour la **différence des actions classiques** (ou **déphasage de propagation** divisé par \hbar) :

$$\boxed{\delta S = \frac{\vec{p}_{\alpha 2} + \vec{p}_{\beta 2}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{\vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\beta 1}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) - (E_\beta - E_\alpha) \cdot (t_2 - t_1) + \frac{m_\beta - m_\alpha}{2} \left[\frac{S_\beta}{m_\beta} + \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \right]} \quad (4.26)$$

dont les termes principaux ne dépendent que des quatre coordonnées finales (positions $\vec{r}_{\alpha, \beta i}$ et impulsions $\vec{p}_{\alpha, \beta i}$) des chemins homologues (ie les *quatre points finaux*), et plus précisément :

– de la différence de leur position :

$$\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}$$

– et de la demi somme de leur impulsion :

$$\frac{\vec{p}_{\alpha 2} + \vec{p}_{\beta 2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\beta 1}}{2}$$

On peut également ré-écrire le terme principal du déphasage principal avec l'aide de 4.24. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{S_\beta}{m_\beta} - \vec{r}_{\beta 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} + \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \right\} - \left\{ \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} + \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right\} \\ &= \left(\frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} \right) \cdot \frac{\vec{r}_{\beta 2} + \vec{r}_{\alpha 2}}{2} - \left(\frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \right) \cdot \frac{\vec{r}_{\beta 1} + \vec{r}_{\alpha 1}}{2} - \left(\frac{E_\beta}{m_\beta} - \frac{E_\alpha}{m_\alpha} \right) \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

qui nous permet d'écrire le déphasage principal $\delta\varphi_{\beta\alpha}$ (exprimé en 4.17) comme :

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\beta\alpha} &= \frac{m_\beta + m_\alpha}{2\hbar} \left[\left(\frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} \right) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} - \left(\frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \right) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2} \right] \\ &+ \frac{m_\beta - m_\alpha}{2\hbar} \left[\left\{ \frac{S_\beta}{m_\beta} - \vec{r}_{\beta 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} + \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \right\} + \left\{ \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \vec{r}_{\alpha 2} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} + \vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right\} \right] - \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar} \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant comme précédemment la propriété :

$$\frac{m_\beta + m_\alpha}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha} - \frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_\beta} \right) = (\vec{p}_{\alpha i} - \vec{p}_{\beta i}) + \frac{m_\beta - m_\alpha}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_\beta} + \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha} \right)$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème des quatre points finaux :

La partie principale du déphasage entre deux chemins homologues ne dépend que des coordonnées finales de ces trajectoires :

$$\delta\varphi_{\beta\alpha} = \boxed{\frac{1}{\hbar} \left[(\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2} - (\vec{p}_{\beta 2} - \vec{p}_{\alpha 2}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} \right]} - \frac{E_{\beta} - E_{\alpha}}{\hbar} \cdot (t_2 - t_1) \\ + \frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{2\hbar} \left[\frac{S_{\beta}}{m_{\beta}} + \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_{\beta}} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_{\alpha}} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_{\beta}} - \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_{\alpha}} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \right]$$

et plus précisément :

– de la différence d'impulsions des quatre points finaux :

$$\vec{p}_{\beta 2} - \vec{p}_{\alpha 2} \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}$$

– et de la demi somme des positions :

$$\frac{\vec{r}_{\beta 2} + \vec{r}_{\alpha 2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{r}_{\beta 1} + \vec{r}_{\alpha 1}}{2}$$

appelés aussi "points milieu".

Cas des masses identiques :

Comme on l'a dit en introduction, les paquets d'ondes atomiques sortant d'une séparatrice peuvent différer selon leur état externe *et/ou* leur état interne. Dans les cas où il n'y a pas de changement d'état interne, les masses au repos correspondant aux différents chemins homologues sont identiques :

$$m_{\alpha} = m_{\beta} = \dots$$

et les termes du déphasage précédent qui dépendent des différences de masse s'annulent (ainsi que le terme en $E_{\beta} - E_{\alpha}$). Il en résulte que le déphasage principal entre les deux chemins homologues β et α a une expression simple et compacte :

$$\boxed{\delta\varphi_{\beta\alpha} = \frac{1}{\hbar} \left[(\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2} - (\vec{p}_{\beta 2} - \vec{p}_{\alpha 2}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} \right]} \quad (4.27)$$

De même, la différence des actions classiques donnant le déphasage de propagation s'écrit simplement :

$$\boxed{\delta S_{m_{\alpha}=m_{\beta}} = \frac{\vec{p}_{\alpha 2} + \vec{p}_{\beta 2}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{\vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\beta 1}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1})} \quad (4.28)$$

Lorsque les états internes - donc les masses au repos - diffèrent d'un chemin à l'autre, ces résultats ne sont valables qu'au premier ordre en la différence des masses :

$$\frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{m_{\beta} + m_{\alpha}}$$

On ne peut alors a priori pas négliger les termes :

$$-\frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar} \cdot (t_2 - t_1)$$

et :

$$\frac{m_\beta - m_\alpha}{2\hbar} \left[\frac{S_\beta}{m_\beta} + \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \right]$$

d'autant plus si l'interféromètre considéré n'est pas symétrique (dans les horloges atomiques, ces termes conduisent notamment à l'habituel "terme d'horloge" et au déphasage Doppler du second ordre).

Pour les interféromètres symétriques, les atomes passent autant de temps dans chaque état interne avant d'interférer, et il est donc possible de négliger ces différences de masse dans le calcul du déphasage global.

Interprétation en termes de temps propre

De même que l'on peut voir l'invariant symplectique caractérisant les deux chemins homologues α et β comme un temps propre $\tau'_{\alpha\beta}$:

$$\vec{r}_{\alpha 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} - \vec{r}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} = c^2 \cdot \tau'_{\alpha\beta}$$

on peut également interpréter le terme :

$$\frac{S_\beta}{m_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1})$$

qui est invariant par interversion des indices ($\alpha \longrightarrow \beta$ et $\beta \longrightarrow \alpha$), comme un **temps propre** $\tau_{\alpha\beta,12}$:

$$\begin{aligned} -c^2 \tau_{\alpha\beta,12} &:= \frac{S_\beta}{m_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \\ &= \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} \cdot (\vec{r}_{\alpha 2} - \vec{r}_{\beta 2}) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \cdot (\vec{r}_{\alpha 1} - \vec{r}_{\beta 1}) \end{aligned}$$

Ce temps propre permet alors de ré-écrire la dernière ligne de $\delta\varphi_{\beta\alpha}$ d'une façon très simple :

$$\frac{m_\beta - m_\alpha}{2\hbar} \left[\frac{S_\beta}{m_\beta} + \frac{S_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 2}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 2}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta 1}}{m_\beta} - \frac{\vec{p}_{\alpha 1}}{m_\alpha} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \right] = -\frac{m_\beta - m_\alpha}{\hbar} c^2 \tau_{\alpha\beta,12}$$

dont l'intérêt apparaîtra plus tard.

Conclusion

Nous venons de voir que toute paire de chemins homologues est caractérisée par un invariant symplectique, qui permet de simplifier grandement l'expression du déphasage entre les deux chemins.

L'intérêt majeur de cet invariant est résumé par le *théorème des quatre points finaux*. Celui-ci énonce que la partie principale du déphasage (celle ne dépendant pas de la structure des paquets d'ondes associés à chaque chemin, que l'on peut appeler aussi "partie onde plane" du déphasage) dépend uniquement des coordonnées des quatre points finaux (positions et impulsions aux vertex $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\beta 1$ et $\beta 2$), et plus précisément de la différence des impulsions et de la demi-somme des positions (ie les points milieux).

Ce résultat est également très pratique du fait qu'il s'exprime sous la forme de la *différence de deux termes*, dont l'un dépend uniquement de la position centrale à l'instant initial t_1 :

$$(\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2}$$

et l'autre dépend uniquement de la position centrale à l'instant final t_2 :

$$- (\vec{p}_{\beta 2} - \vec{p}_{\alpha 2}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2}$$

Au vu des modélisations envisagées pour les séparatrices (voir partie 4.1.2) et de la possibilité de découper tout interféromètre en tranches temporelles et en paires de chemins homologues (voir partie précédente), cette caractéristique est très précieuse pour le calcul du déphasage total. En effet, on a vu que les séparatrices modifiaient beaucoup l'impulsion centrale des paquets d'ondes incidents ($\vec{p}_{\alpha i} \longrightarrow \vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}$), mais très peu leur position centrale (décalage de $\frac{\hbar \vec{k}_{\alpha i}}{2m_{\alpha}} \tau_i$ où τ_i est la durée de la séparatrice i).

En première approximation (ie avec la *modélisation infiniment fine* ou *ttt champ faible* des séparatrices), la position centrale

$$\left(\frac{\vec{r}_{\alpha i} + \vec{r}_{\beta i}}{2} \right)^-$$

en fin de tranche $i - 1$ (ie juste avant t_i , à l'instant " t_i^- ") est par conséquent quasiment identique à la position centrale juste après l'interaction instantanée effective au temps t_i , ie en début de tranche i :

$$\frac{\vec{r}_{\alpha i}^+ + \vec{r}_{\beta i}^+}{2} \simeq \left(\frac{\vec{r}_{\alpha i} + \vec{r}_{\beta i}}{2} \right)^-$$

Les points milieux *juste avant* et *juste après* chaque instant t_i sont donc quasiment égaux, et le deuxième terme du déphasage de la tranche $i - 1$ sera presque totalement compensé par le premier terme du déphasage de la tranche i . Par exemple, entre les instants t_1 et t_3 , on obtient :

$$\begin{aligned} \hbar * \delta \varphi_{13} &\simeq (\vec{p}_{\beta 2}^+ - \vec{p}_{\alpha 2}^+) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} - (\vec{p}_{\beta 3} - \vec{p}_{\alpha 3}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 3} + \vec{r}_{\beta 3}}{2} \\ &\quad + (\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2} - (\vec{p}_{\beta 2}^- - \vec{p}_{\alpha 2}^-) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} \\ &= (\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 1} + \vec{r}_{\beta 1}}{2} - (\vec{p}_{\beta 3} - \vec{p}_{\alpha 3}) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 3} + \vec{r}_{\beta 3}}{2} \\ &\quad + \hbar \left(\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2} \right) \cdot \frac{\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{\beta 2}}{2} \end{aligned}$$

(on a volontairement omis les termes dépendant de $(m_{\beta} - m_{\alpha})$ par simplicité).

Il ne restera donc, en première approximation, que les phases dues aux séparatrices prises aux points milieux (dans la partie suivante, nous verrons que l'on peut interpréter les interféromètres atomiques comme des lignes de points milieux). Cette remarque est à la base du calcul du déphasage global que nous allons maintenant effectuer.

4.3 Expression du signal de franges

4.3.1 Multiples chemins atomiques et signal de sortie

Dans la partie précédent, on a vu qu'un interféromètre atomique pouvait être considéré comme une *succession de tranches temporelles* dont chacune comporte plusieurs chemins atomiques, appelés aussi *chemins homologues* du fait de leurs extrémités temporelles communes. Ces chemins homologues sont en fait les trajectoires des centres de paquets d'ondes, ie simplement les *trajectoires classiques* lorsque l'Hamiltonien extérieur H_{ext} est au plus quadratique en position et impulsion (conséquence du théorème d'Erhenfest).

Or il peut y avoir plus de deux chemins homologues par tranche. En effet, même pour un unique paquet d'ondes à l'entrée d'un interféromètre atomique, son interaction avec les séparatrices va *multiplier le nombre de paquets d'ondes* évoluant dans l'appareil. Cette multiplication dépend alors du *type de séparatrices* considéré et, du point de vue de la modélisation globale des interféromètres, du *niveau de modélisation* envisagé pour les séparatrices.

Parmi tous ces chemins atomiques, seuls certains vont conduire à des interférences en sortie. En effet, pour que deux paquets d'ondes interfèrent (avec un contraste de franges suffisant), ils doivent être *dans le même état interne et avoir un état externe proche*.

Cette condition sur l'état externe peut être vue comme une **condition de cohérence entre les chemins atomiques**. On a déjà souligné l'importance de la longueur de cohérence \mathcal{L} du nuage atomique servant de source pour un interféromètre atomique (voir partie 4.1.1), et son rôle dans la construction d'interféromètres atomiques avec transitions optiques. Par exemple, l'origine des interféromètres "fermés" est directement liée à l'impossibilité d'obtenir des interférences avec un système de Ramsey à deux ondes optiques [236, 237, 17]. Pour une telle configuration, le *brouillage des franges est en effet dû au recouvrement insuffisant des paquets d'ondes atomiques* après la deuxième et dernière séparatrice. Plus précisément, on peut montrer que lorsque les centres de paquets d'ondes sont distants de plus de \mathcal{L} , l'intégration du signal de sortie sur les distributions statistiques initiales (celles qui décrivent la source) fait beaucoup chuter le contraste des franges.

Il est donc nécessaire que les centres des deux paquets d'ondes soient proches l'un de l'autre dans la zone de détection, à une distance Δ_r inférieure à la longueur de cohérence du nuage¹⁶ :

$$\Delta_r \lesssim \mathcal{L}$$

La condition de brouillage de frange s'écrit par conséquent :

$$\boxed{\text{Brouillage des franges} \iff \Delta_r \gg \mathcal{L}}$$

Selon le mode de détection considéré, cette condition pourra porter uniquement sur la distance $\Delta_r(t_D)$ au temps de détection t_D (par exemple lorsqu'il y a détection globale avec interrogation au temps t_D de l'ensemble des atomes sortants), mais également sur la différence des impulsions centrales $\Delta_p(t_D)$ si la durée de détection n'est pas suffisamment faible (lorsqu'il y a détection par nappe, avec analyse du nuage atomique de sortie pendant la durée T_D).

Cette différence d'état externe entre deux paquets d'ondes en sortie a de multiples origines. Pour un interféromètre "ouvert" (en configuration de Ramsey à deux ondes par exemple), cette différence vient essentiellement de la différence du recul encaissé par les atomes dans chacun des bras.

¹⁶La longueur pertinente régissant la présence des franges est bien la longueur de cohérence \mathcal{L} de la source atomique, et non pas la largeur σ_r des paquets d'ondes individuels. Les paquets d'ondes en sortie de l'interféromètre peuvent alors avoir un recouvrement non nul ($\sigma_r > \Delta_r$), mais ne pas conduire à des interférences observables pour autant (lorsque $\mathcal{L} < \Delta_r$).

Pour un interféromètre "fermé" (du type Ramsey-Bordé symétrique ou asymétrique), ce problème de recul est résolu, mais la différence d'état externe qui résulte de l'effet de champs extérieurs (inertiels, gravitationnels...) sur les atomes peut finalement entraîner la non-fermeture de l'interféromètre. On peut ainsi montrer que tout terme quadratique dans l'Hamiltonien H_{ext} (ie par exemple, une rotation, un gradient de gravité ou d'accélération...) provoque la **non-fermeture d'un interféromètre à géométrie fermée**. Cette non-fermeture peut alors être simplement *temporelle* (les trajectoires atomiques se croisent, mais pas les paquets d'ondes) ou plus généralement *spatio-temporelle* (les trajectoires atomiques ne se croisent pas du tout).

Il est donc nécessaire que ces champs extérieurs soient suffisamment faibles pour préserver la cohérence des chemins atomiques principaux. Ainsi, la notion d'interféromètre fermé est plus générale que celle qui est habituellement associée à la compensation des termes de recul, d'autant plus lorsque les champs extérieurs ne sont pas traités comme des perturbations.

Nous verrons ultérieurement quelle est l'expression exacte de cette non-fermeture. Pour un interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique soumis à une rotation $\vec{\Omega}$ et à un gradient de gravité $\vec{\gamma}$ (ou d'accélération), elle s'écrit au 1^{er} ordre en $\vec{\Omega}T$ et γT^2 :

$$\Delta_r(t_D) := \vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D} \simeq 2 \left(-\vec{\Omega}T \right) \times \frac{\hbar \vec{k}}{m} * T + \left(\vec{\gamma} T^2 \right) \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m} * T$$

où T est le temps de vol d'une séparatrice à l'autre (voir partie 5.2).

Si l'on suppose que l'échauffement du nuage atomique durant le vol interférométrique est suffisamment faible (ie que la longueur de cohérence \mathcal{L} reste à peu près constante), il faut donc comparer $\Delta_r(t_D)$ à \mathcal{L} . On obtient ainsi la condition de brouillage des franges suivante :

$$(2\Omega T + \gamma T^2) \gg \frac{\mathcal{L}}{v_{rec}T}$$

où v_{rec} est la norme de la vitesse de recul.

Pour les valeurs terrestres :

$$\begin{cases} \Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \gamma \sim 10^{-6} \text{ s}^{-2} \end{cases}$$

et pour des conditions expérimentales usuelles ($T \sim 10^{-1} \text{ s}$, $T_c \sim 10^{-6} \text{ K}$, $v_{rec} \sim 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$), on obtient alors :

$$(2\Omega T + \gamma T^2) \frac{v_{rec}T}{\mathcal{L}} \sim 1$$

qui montre que le contraste des franges d'interférence est suffisant, même après intégration sur les distributions statistiques du nuage atomique initial.

De même, pour cette géométrie symétrique de Mach-Zehnder, les impulsions des centres de paquets d'ondes diffèrent en sortie de :

$$\Delta_p(t_D) := \vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D} \simeq \left(\vec{\Omega}T \right) \times \left(\left(\vec{\Omega}T \right) \times \frac{\hbar \vec{k}}{m} \right) + \left(\vec{\gamma} T^2 \right) \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

au 1^{er} ordre en γT^2 et au 2^{ème} ordre en $\vec{\Omega}T$. Comme on l'a déjà souligné, cette différence d'impulsion va imposer une condition sur la durée T_D de détection (quand il y a détection par nappe pendant T_D) : il y aura en effet brouillage des franges si :

$$(\Omega^2 + \gamma) T^2 \gg \frac{\mathcal{L}}{v_{rec}T_D}$$

condition qui n'est heureusement pas vérifiée pour les configurations usuelles :

$$(\Omega^2 + \gamma) T^2 \frac{v_{rec}}{\mathcal{L}} \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1} \ll \frac{1}{T_D}$$

Le signal de sortie correspondant à l'ensemble des chemins atomiques cohérents se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} |\psi_S(\vec{r}, t)|^2 &= \left(\sum_{\nu} \psi_{S\nu}(\vec{r}, t) \right) \cdot \left(\sum_{\nu} \psi_{S\nu}^*(\vec{r}, t) \right) \\ &= \sum_{\nu} |\psi_{S\nu}(\vec{r}, t)|^2 + \sum_{\nu} \sum_{\eta \neq \nu} \psi_{S\nu}(\vec{r}, t) \cdot \psi_{S\eta}^*(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

où chaque paquet d'ondes $\psi_{S\nu}(\vec{r}, t)$ est associé à l'un des chemins atomiques.

En exprimant ces fonctions d'ondes complexes sous la forme d'une amplitude et d'une phase :

$$\psi_{S\nu}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}_{\nu}(\vec{r}, t) e^{i\phi_{\nu}(\vec{r}, t)} \quad (4.29)$$

on peut ré-écrire le signal de sortie :

$$|\psi_S|^2 = \left| \mathcal{A}_{\alpha} e^{i\phi_{\alpha}} + \mathcal{A}_{\beta} e^{i\phi_{\beta}} + \mathcal{A}_{\gamma} e^{i\phi_{\gamma}} + \dots \right|^2$$

sous la forme suivante :

$$|\psi_S|^2 = \mathcal{A}_{\alpha}^2 + \mathcal{A}_{\beta}^2 + \mathcal{A}_{\gamma}^2 + \dots + 2\mathcal{A}_{\alpha}\mathcal{A}_{\beta} \cos[\phi_{\alpha} - \phi_{\beta}] + 2\mathcal{A}_{\alpha}\mathcal{A}_{\gamma} \cos[\phi_{\alpha} - \phi_{\gamma}] + 2\mathcal{A}_{\beta}\mathcal{A}_{\gamma} \cos[\phi_{\beta} - \phi_{\gamma}] + \dots$$

qui montre simplement comment la longueur du vecteur ψ_S est fonction des longueurs élémentaires \mathcal{A}_{ν} et des angles relatifs entre vecteurs $\psi_{S\nu}$ (voir schéma 4.20).

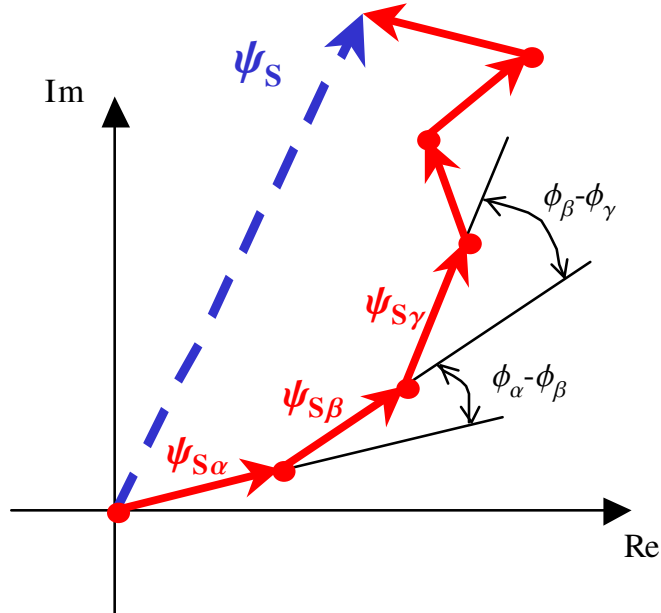


FIG. 4.20: Vecteur d'onde de sortie dans le plan complexe. ψ_S est la somme des vecteurs d'ondes associés aux différents chemins atomiques cohérents.

Le calcul du signal de sortie revient donc à *sommer les signaux correspondant à chaque paire de chemins atomiques (cohérents)* ¹⁷. Chacune de ces paires de chemin est alors constituée d'une succession :

¹⁷En fait ce sont les termes $2\mathcal{A}_{\nu}\mathcal{A}_{\eta} \cos[\phi_{\nu} - \phi_{\eta}]$ (avec $\eta \neq \nu$) que l'on somme, et pas à proprement parler les signaux produits par chaque paire de chemins atomiques.

- de **paires de chemins homologues** (pour lesquelles on connaît le déphasage en tout point grâce au théorème des quatre points finaux)
- d'**interactions effectives instantanées** (dont l'effet dépend du niveau de modélisation envisagé pour les séparatrices).

Le diagramme spatio-temporel correspondant est dessiné sur la figure 4.21, où les instants suivants divisent les deux chemins atomiques en N paires de chemins homologues :

$$\begin{cases} t_i = \text{instant central de la } i^{\text{ème}} \text{ séparatrice (pour } i \text{ de } 1 \text{ à } N) \\ t_D = \text{instant caractéristique de la détection} \end{cases}$$

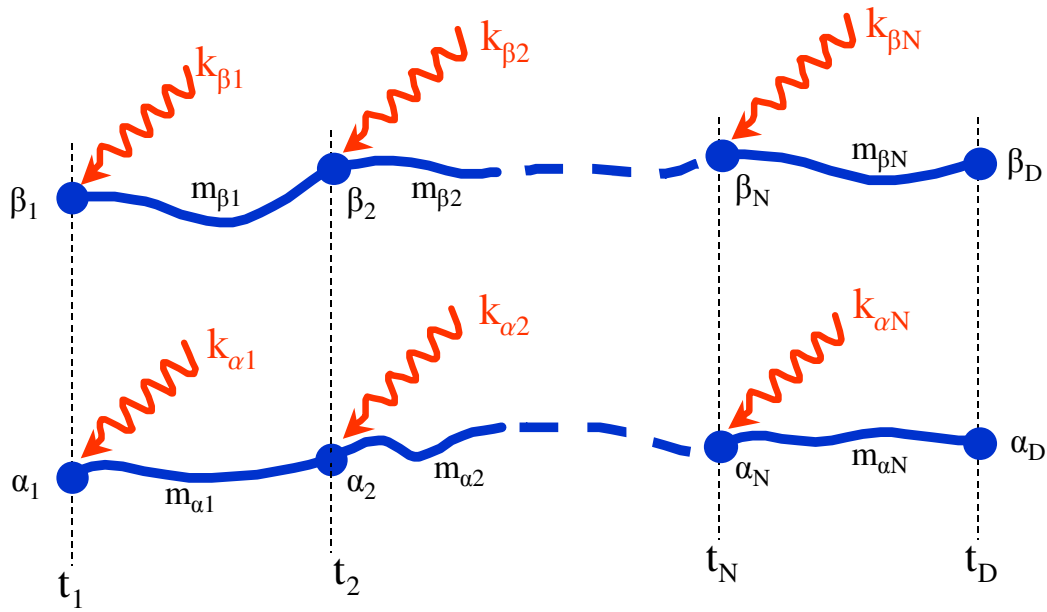


FIG. 4.21: Diagramme spatio-temporel d'une paire de chemins atomiques cohérents. Il y a N interactions effectives instantanées et N paires de chemins homologues.

Il nous faut donc obtenir le signal de sortie pour un tel diagramme. Comme on l'a déjà dit, ce calcul dépend du type de modélisation que l'on envisage pour les séparatrices atomiques. Avant d'utiliser la *modélisation ttt champ fort généralisée* établie en 3.7, qui est la modélisation la plus complète de ce mémoire (voir la partie 4.1.2), il est intéressant de considérer une modélisation moins perfectionnée, afin :

- d'illustrer d'une façon simple les outils développés précédemment (théorème des quatre points finaux, théorème du point milieu généralisé, modélisation de la source atomique),
- de montrer comment la modélisation globale des interféromètres atomiques est améliorée par la prise en compte de ces seuls outils,
- de montrer précisément l'origine du déphasage final, en expliquant la présence de simplifications essentielles du type $\Delta\varphi_{prop} + \Delta\varphi_{sep} \sim 0$,
- de fournir une modélisation intermédiaire, permettant ensuite de mettre en évidence les améliorations possibles dues à une description plus fine des séparatrices (effet Borrmann).

En effet, les résultats des parties précédentes (formalisme ABCD, chemins homologues et théorème des quatre points finaux) nous permettent déjà d'améliorer notablement la modélisation de ces appareils sans faire appel aux *modélisations ttt champs forts*.

Nous procéderons donc en deux étapes, en considérant :

1. tout d'abord la *modélisation ttt champ faible* (ou *infiniment fine*),
2. puis les *modélisations ttt champs forts*.

4.3.2 Signal de franges avec modélisation ttt-champ faible

Déphasage principal entre deux chemins atomiques

On a vu précédemment qu'avec une modélisation simplifiée du type *infiniment fine* ou *ttt champ faible*, l'action d'une séparatrice sur un paquet d'ondes incident Gaussien se résument ainsi :

- création de deux paquets d'ondes de même forme (Gaussienne),
- dont l'un est simplement modifié par un changement d'amplitude (transition sans changement d'état interne),
- dont l'autre subit une modification de son état interne (ie de sa masse effective), de son amplitude, de son impulsion centrale et de sa phase,
- toutes ces modifications ayant lieu instantanément au temps t_i , l'instant central de la séparatrice considérée.

Cette modélisation particulière est schématisée sur la figure 4.2, tandis que le diagramme spatio-temporel correspondant est donné en figure 4.22.

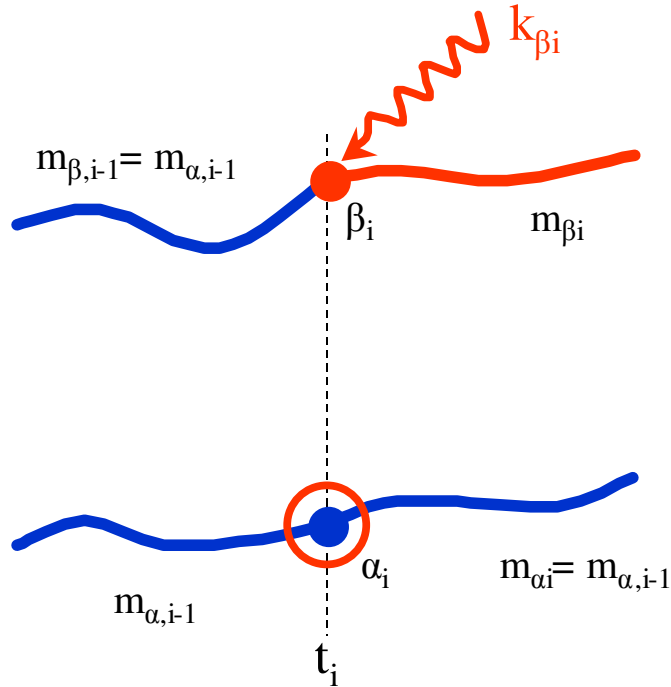


FIG. 4.22: Diagramme spatio-temporel associé à une séparatrice (selon les modélisations *infiniment fine* et *ttt champ faible*). Le chemin atomique au temps t_i^- se divise en deux chemins au temps t_i^+ .

On peut alors considérer que les paquets d'ondes associés aux *deux* chemins atomiques (α et β) de ce diagramme sont modifiés en t_i de la façon suivante :

$$wp_{\alpha}(t_i^-, m_{\alpha,i-1}, \vec{r}_{\alpha i}^-, \vec{p}_{\alpha i}^-) \longrightarrow M_{\alpha i} \cdot e^{i\theta_{\alpha i}} \cdot wp_{\alpha}(t_i^+, m_{\alpha i}, \vec{r}_{\alpha i}^+, \vec{p}_{\alpha i}^+)$$

avec ¹⁸ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_{\alpha i}^+} &= \overrightarrow{r_{\alpha i}} \\ \overrightarrow{p_{\alpha i}^+} &= \overrightarrow{p_{\alpha i}} + \hbar \overrightarrow{k_{\alpha i}} \\ \theta_{\alpha i} &= \overrightarrow{k_{\alpha i}} \cdot \overrightarrow{r_{\alpha i}} - \omega_{\alpha i} \cdot t_i - \varphi_{\alpha i}\end{aligned}$$

où t_i^- est l'instant juste avant t_i , et t_i^+ l'instant juste après (écrit ici pour le chemin α). En effet, comme on l'a souligné dans la partie précédente, on peut toujours prendre a posteriori :

$$\overrightarrow{k_{\alpha i}} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \omega_{\alpha i} = 0 \quad , \quad \varphi_{\alpha i} = 0 \quad , \quad \text{et} \quad m_{\alpha i} = m_{\alpha, i-1}$$

pour le chemin atomique qui ne subit pas de changement d'état interne.

Selon cette modélisation, la position centrale des deux paquets d'ondes au temps t_i^+ est identique à celle du paquet d'ondes incident au temps t_i^- . Ce résultat est très intéressant pour le calcul du déphasage global entre les chemins β et α .

En effet, on a vu au paragraphe 4.2.2 que la partie principale de ce déphasage pour la tranche temporelle $i-1$ (ie celle définie par l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$) s'exprimait sous la forme de la *différence de deux termes*, dont l'un dépendait uniquement de la position médiane - ou **point milieu** - à l'instant initial t_{i-1} :

$$(\overrightarrow{p_{\beta, i-1}} - \overrightarrow{p_{\alpha, i-1}}) \cdot \overrightarrow{Q_{i-1}}$$

avec :

$$\boxed{\overrightarrow{Q_{i-1}} := \frac{\overrightarrow{r_{\alpha, i-1}} + \overrightarrow{r_{\beta, i-1}}}{2}}$$

et dont l'autre dépendait uniquement du point milieu à l'instant final t_i :

$$- (\overrightarrow{p_{\beta i}} - \overrightarrow{p_{\alpha i}}) \cdot \overrightarrow{Q_i}$$

(on a omis pour l'instant les termes dépendant de la différence de masse $m_{\beta, i-1} - m_{\alpha, i-1}$).

De même, le déphasage principal pour la tranche i s'écrit :

$$(\overrightarrow{p_{\beta i}} - \overrightarrow{p_{\alpha i}}) \cdot \overrightarrow{Q_i} - (\overrightarrow{p_{\beta, i+1}} - \overrightarrow{p_{\alpha, i+1}}) \cdot \overrightarrow{Q_{i+1}}$$

ou plus exactement :

$$(\overrightarrow{p_{\beta i}^+} - \overrightarrow{p_{\alpha i}^+}) \cdot \frac{\overrightarrow{r_{\alpha i}^+} + \overrightarrow{r_{\beta i}^+}}{2} - (\overrightarrow{p_{\beta, i+1}} - \overrightarrow{p_{\alpha, i+1}}) \cdot \overrightarrow{Q_{i+1}}$$

lorsqu'il y a une interaction effective au temps t_i , comme celle qui est décrite plus haut.

Enfin, le déphasage principal dû à la séparatrice vaut simplement :

$$\omega_{\alpha i} \cdot t_i + \varphi_{\alpha i} - \omega_{\beta i} \cdot t_i - \varphi_{\beta i}$$

Le **déphasage principal entre les deux chemins de t_{i-1} à t_{i+1}** s'obtient alors en sommant les trois contributions précédentes, et s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned}\hbar \cdot \Delta \varphi_{i+1, i-1} &= (\overrightarrow{p_{\beta, i-1}} - \overrightarrow{p_{\alpha, i-1}}) \cdot \overrightarrow{Q_{i-1}} - (\overrightarrow{p_{\beta i}} - \overrightarrow{p_{\alpha i}}) \cdot \overrightarrow{Q_i} \\ &\quad + \omega_{\alpha i} \cdot t_i + \varphi_{\alpha i} - \omega_{\beta i} \cdot t_i - \varphi_{\beta i} \\ &\quad + (\overrightarrow{p_{\beta i}^+} - \overrightarrow{p_{\alpha i}^+}) \cdot \frac{\overrightarrow{r_{\alpha i}^+} + \overrightarrow{r_{\beta i}^+}}{2} - (\overrightarrow{p_{\beta, i+1}} - \overrightarrow{p_{\alpha, i+1}}) \cdot \overrightarrow{Q_{i+1}}\end{aligned}$$

¹⁸ Dans ce mémoire, une quantité W_i désigne une grandeur prise *juste avant* le temps t_i (ie à l'instant t_i^-) et une quantité W_i^+ désigne une grandeur prise *juste après* le temps t_i (ie à l'instant t_i^+). Seules exceptions : les masses effectives.

Cette expression dépend essentiellement des coordonnées des points milieu et des différences d'impulsions aux temps finaux des tranches. Or on vient de voir que, selon la *modélisation infiniment fine* ou *ttt champ faible*, le point milieu

$$\vec{Q}_i$$

en fin de tranche $i - 1$ (ie à l'instant t_i^-) était identique au point milieu en début de tranche i :

$$\frac{\vec{r}_{\alpha i}^+ + \vec{r}_{\beta i}^+}{2} = \vec{Q}_i$$

Les points milieux *juste avant* et *juste après* chaque instant t_i étant égaux, le deuxième terme du déphasage de la tranche $i - 1$ est presque totalement compensé par le premier terme du déphasage de la tranche i , et l'on obtient finalement :

$$\Delta\varphi_{i+1,i-1} = \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta,i-1} - \vec{p}_{\alpha,i-1}) \cdot \vec{Q}_{i-1} - \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta,i+1} - \vec{p}_{\alpha,i+1}) \cdot \vec{Q}_{i+1} + (\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i + \omega_{\alpha i} \cdot t_i + \varphi_{\alpha i} - \omega_{\beta i} \cdot t_i - \varphi_{\beta i}$$

On peut répéter cette démarche pour un nombre quelconques de tranches, avec à chaque fois une simplification importante entre le déphasage de deux tranches qui se suivent. Il est ainsi possible d'obtenir une expression extrêmement compacte pour le déphasage principal du diagramme de la figure 4.21 :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{D1} &= \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1}) \cdot \vec{Q}_1 - \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot \vec{Q}_D \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right] \end{aligned}$$

En tenant compte de tous les autres termes (dépendant des différences de masse et du vecteur position \vec{r} , phases initiales en t_1), on obtient finalement l'expression suivante du **déphasage global entre les deux chemins α et β** :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) &= (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot (\vec{r} - \vec{Q}_D) / \hbar - \frac{\vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\beta 1}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1}) \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) - \frac{E_{\beta i} - E_{\alpha i}}{\hbar} (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_{\beta i} - m_{\alpha i}}{2\hbar} \right) \left\{ \frac{S_{\beta i}}{m_{\beta i}} + \frac{S_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \hbar \vec{k}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta,i+1}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha,i+1}}{m_{\alpha i}} \right) \cdot (\vec{r}_{\beta,i+1} - \vec{r}_{\alpha,i+1}) \right\} \\ &+ \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \cdot \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Remarques :

1. Le *deuxième terme de la première ligne* est toujours nul dans les expériences usuelles d'interférométrie atomique. En effet, c'est toujours un unique paquet d'ondes atomique qui est divisé dans une première séparatrice (au temps t_1), puis dévié et recombinaison afin de produire des interférences en sortie.

$$\vec{r}_{\beta 1} = \vec{r}_{\alpha 1} \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\beta 1} = \vec{p}_{\alpha 1}$$

2. De même, on a toujours *égalité entre les états internes finaux*, d'où :

$$m_{\beta N} = m_{\alpha N}$$

dans la dernière ligne.

3. Enfin, du fait de l'égalité 4.25, les troisième et quatrième lignes de l'expression précédente peuvent s'écrire comme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{m_{\beta i} - m_{\alpha i}}{2\hbar} \left\{ \frac{S_{\beta i}}{m_{\beta i}} + \frac{S_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \hbar \vec{k}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} \right) (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta, i+1}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha, i+1}}{m_{\alpha i}} \right) (\vec{r}_{\beta, i+1} - \vec{r}_{\alpha, i+1}) \right\} \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_{\beta i}}{m_{\alpha i}} - 1 \right) \left\{ S_{\alpha i} + \frac{1}{2} \vec{p}_{\alpha, i+1} \cdot (\vec{r}_{\beta, i+1} - \vec{r}_{\alpha, i+1}) - \frac{1}{2} (\vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}) \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) \right\} \end{aligned}$$

ou d'une façon encore plus compacte :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{m_{\beta i} - m_{\alpha i}}{2\hbar} \left\{ \frac{S_{\beta i}}{m_{\beta i}} + \frac{S_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \hbar \vec{k}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} \right) (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\beta, i+1}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha, i+1}}{m_{\alpha i}} \right) (\vec{r}_{\beta, i+1} - \vec{r}_{\alpha, i+1}) \right\} \\ & \quad \boxed{= - \sum_{i=1}^N \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \tau_{\beta\alpha i}} \end{aligned}$$

à l'aide des *temps propres* $\tau_{\beta\alpha i}$ introduits dans la partie précédente :

$$\begin{aligned} \boxed{-c^2 \tau_{\beta\alpha i}} & : = \frac{S_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta, i+1}}{m_{\beta i}} \cdot (\vec{r}_{\beta, i+1} - \vec{r}_{\alpha, i+1}) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\beta i} + \hbar \vec{k}_{\beta i}}{m_{\beta i}} \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) \\ &= \frac{S_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} - \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\alpha, i+1}}{m_{\alpha i}} \cdot (\vec{r}_{\alpha, i+1} - \vec{r}_{\beta, i+1}) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_{\alpha i} + \hbar \vec{k}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} \cdot (\vec{r}_{\alpha i} - \vec{r}_{\beta i}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

et des *fréquences atomiques effectives* définies par :

$$\boxed{\omega_{\beta\alpha i}^{(0)} := \frac{m_{\beta i} - m_{\alpha i}}{\hbar} c^2} \quad (4.32)$$

Signal de sortie avant détection

On a vu précédemment que le signal de sortie $|\psi_S|^2$ était égal à la somme des signaux correspondant à chaque paire de chemins atomiques (cohérents). Plus précisément, il s'exprime sous la forme :

$$|\psi_S|^2 = \mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + \dots + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha, D}] + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\gamma \cos [\Delta\phi_{\gamma\alpha, D}] + 2\mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\gamma \cos [\Delta\phi_{\gamma\beta, D}] + \dots$$

où les \mathcal{A}_ν sont les amplitudes finales des paquets d'ondes associés à chaque chemin atomique, et où les $\Delta\phi_{\nu\eta, D}$ sont les déphasages finaux entre les chemins.

On vient d'établir l'expression de ces déphasages $\Delta\phi_{\nu\eta, D}$, il nous reste donc à obtenir les amplitudes finales \mathcal{A}_ν .

Dans le cadre de la *modélisation infiniment fine* ou *ttt champ faible*, on a vu qu'une séparatrice modifiait les amplitudes des deux chemins atomiques incidents par des facteurs multiplicatifs $M_{\alpha i}$ et $M_{\beta i}$ (pour la $i^{\text{ème}}$ interaction au temps effectif t_i), mais qu'elle ne modifiait pas la structure des paquets d'ondes entre t_i^- et t_i^+ ($M_{\alpha i}$ et $M_{\beta i}$ sont donc indépendants du vecteur position \vec{r}).

Si à l'instant t_1^- on considère les paquets d'ondes ¹⁹ :

$$\exp \left[\frac{im_{\nu 0}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) Y_1 X_1^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) \cdot \vec{p}_{\nu 1} \right]$$

avec $\nu = \alpha$ ou β , alors au temps t_D les deux paquets d'ondes ont pour expression :

$$\begin{aligned} \psi_{S\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_D X_1^{-1})}} \cdot \exp \left[i \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) Y_D X_D^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \vec{p}_{\alpha D} \right] \\ &\quad \cdot M_{\alpha} \exp \left[i \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{\alpha i}}{\hbar} + \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - \omega_{\alpha i} t_i - \varphi_{\alpha i} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

et :

$$\begin{aligned} \psi_{S\beta}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_D X_1^{-1})}} \cdot \exp \left[i \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) Y_D X_D^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \cdot \vec{p}_{\beta D} \right] \\ &\quad \cdot M_{\beta} \exp \left[i \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{\beta i}}{\hbar} + \vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \omega_{\beta i} t_i - \varphi_{\beta i} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\text{avec : } \boxed{M_{\alpha} := \prod_{i=1}^N M_{\alpha i}} \quad \text{et} \quad \boxed{M_{\beta} := \prod_{i=1}^N M_{\beta i}} \quad (4.35)$$

On observe alors que le facteur *complexe* $1/\sqrt{\det(X_D X_1^{-1})}$ est commun aux deux paquets d'ondes, et qu'il n'intervient donc pas dans l'expression du déphasage local ²⁰ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) &= \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{\hbar} (\vec{r}_{\alpha D} \cdot \vec{p}_{\alpha D} - \vec{r}_{\beta D} \cdot \vec{p}_{\beta D}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{S_{\beta i}}{\hbar} + \vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \omega_{\beta i} t_i - \varphi_{\beta i} \right) - \left(\frac{S_{\alpha i}}{\hbar} + \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - \omega_{\alpha i} t_i - \varphi_{\alpha i} \right) \right] \\ &\quad + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

En outre, on verra au paragraphe 4.3.2 que cette expression du déphasage est bien identique à celle établie plus haut (relation 4.30).

¹⁹Dans un interféromètre réel, et si t_1 est l'instant central de la première séparatrice atomique, ces deux paquets d'ondes sont en fait identiques. Ils peuvent alors être reliés simplement au paquets d'ondes issus de la source initiale (à l'instant t_0).

²⁰Ce ne sera pas le cas avec les modélisations ttt-champs forts.

Finalement, le signal de sortie entre les deux chemins atomiques α et β s'écrit :

$$\mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + 2\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\beta \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha,D}] \quad (4.37)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\alpha = M_\alpha \frac{1}{\sqrt{\det(X_D X_1^{-1})}} \exp \left[-\frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \operatorname{Im} (Y_D X_D^{-1}) (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \\ \mathcal{A}_\beta = M_\beta \frac{1}{\sqrt{\det(X_D X_1^{-1})}} \exp \left[-\frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \operatorname{Im} (Y_D X_D^{-1}) (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \right] \end{cases}$$

Avant de continuer, et d'intégrer le signal sur le volume de détection et sur les distributions statistiques décrivant la source atomique initiale, soulignons que les matrices $X_D X_1^{-1}$ et $Y_D X_D^{-1}$ s'expriment simplement en fonction des matrices $ABCD$ et de la largeur complexe initiale $Y_1 X_1^{-1}$:

$$X_D X_1^{-1} = A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1} \quad (4.38)$$

et :

$$Y_D X_D^{-1} = [C_{D1} + D_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}] \cdot [A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}]^{-1} \quad (4.39)$$

Intégration sur le volume de sortie

On a vu au paragraphe 4.1.4 que le signal de sortie *après détection* pouvait être obtenu à partir du signal *avant détection* par la double intégration suivante :

$$S := \int_{V_D} \int_{T_D} d^3 \vec{r} \frac{dt}{T_D} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

où V_D et T_D sont respectivement le volume et la durée de la détection.

Lorsque l'on peut modéliser le processus de détection par une seule intégration spatiale (interrogation de l'ensemble des atomes à un instant donné) avec un volume de détection V_D infini (ie que V_D englobe totalement le nuage atomique de sortie), ce signal devient alors simplement égal à :

$$S := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

En outre, on a vu comment le *théorème du point milieu généralisé* permettait de calculer très facilement ce type d'intégrale pour des paquets d'ondes Gaussiens :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \exp \left[(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \frac{A}{2} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + (\vec{r} - \vec{b}) \cdot \frac{B}{2} \cdot (\vec{r} - \vec{b}) + \vec{\alpha} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{b}) \right] \\ &= -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\det[A+B]}} e^{\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} A - \frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2} \right) \cdot \left(\frac{A+B}{2} \right)^{-1} \cdot \left(B \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} + \frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2} \right)} \exp \left[\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{a} \right) + \vec{\beta} \cdot \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{b} \right) \right] \end{aligned}$$

où A et B sont des matrices 3×3 complexes et où $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ peuvent être également complexes.

Dans le cas d'une seule paire de chemins atomiques, les expressions 4.33, 4.34 et 4.30 nous indiquent qu'il suffit d'intégrer le signal élémentaire suivant :

$$\psi_{S\beta}(\vec{r}) \cdot \psi_{S\alpha}^*(\vec{r}) = M_\beta \cdot M_\alpha \frac{1}{|\det(X_D X_1^{-1})|} \cdot \exp[\lambda(\vec{r})] \quad (4.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{r}) := & i \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) Y_D X_D^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - i \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) [Y_D X_D^{-1}]^* (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \\ & + \frac{i}{\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot (\vec{r} - \vec{Q}_D) + i \Delta\phi_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

et où $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ est la partie indépendante de \vec{r} du déphasage 4.30 précédent :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} := \sum_{i=1}^N \left[(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) - \omega_{\beta\alpha}^{(0)} \tau_{\beta\alpha i} - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right]$$

(on rappelle que les points \vec{Q}_i sont les vecteurs médians ou *points milieu* définis par : $\vec{Q}_i := (\vec{r}_{\beta i} + \vec{r}_{\alpha i})/2$).

On reconnaît alors les paramètres du *théorème du point milieu généralisé* :

$$\begin{aligned} A &= i \frac{m_{\beta N}}{\hbar} Y_D X_D^{-1} \\ B &= \frac{m_{\alpha N}}{m_{\beta N}} A^* \\ \vec{a} &= \vec{r}_{\beta D} \\ \vec{b} &= \vec{r}_{\alpha D} \\ \vec{\alpha} &= \frac{i}{2\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \\ \vec{\beta} &= \vec{\alpha} \end{aligned}$$

et nous sommes conduits finalement à l'expression :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \psi_{S\beta}(\vec{r}) \cdot \psi_{S\alpha}^*(\vec{r}) &= \frac{M_\beta \cdot M_\alpha}{|\det(X_D X_1^{-1})|} \exp[i \Delta\phi_{\beta\alpha}] \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[im_{\alpha N} (Y_D X_D^{-1})^* - im_{\beta N} Y_D X_D^{-1}]}} \\ &\cdot \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_{\beta N}} - Y_D X_D^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \right] \\ &\cdot \left(\frac{Y_D X_D^{-1}}{m_{\alpha N}} - \frac{(Y_D X_D^{-1})^*}{m_{\beta N}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_{\alpha N}} - (Y_D X_D^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \end{aligned}$$

Il y aura donc a priori 3 termes qui contribueront au déphasage après intégration sur le volume de détection :

1. le terme $\Delta\phi_{\beta\alpha}$,

2. l'argument du nombre complexe $1/\sqrt{\det \left[im_{\alpha N} (Y_D X_D^{-1})^* - im_{\beta N} Y_D X_D^{-1} \right]}$,
3. la partie réelle dans l'exposant du dernier terme.

Cependant, on a vu que les masses finales $m_{\alpha N}$ et $m_{\beta N}$ étaient égales (même état interne pour les deux chemins en sortie) :

$$m_{\alpha N} = m_{\beta N} = m_N$$

Cela implique en particulier que le terme suivant :

$$im_{\alpha N} (Y_D X_D^{-1})^* - im_{\beta N} Y_D X_D^{-1} = 2m_N \operatorname{Im} [Y_D X_D^{-1}]$$

est réel, et par conséquent, *seul le premier terme $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ contribue au déphasage final* (après intégration sur le volume de détection) :

Déphasage final après détection :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[\left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) - \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \tau_{\beta\alpha i} - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \quad (4.41)$$

On vérifie alors bien que le *théorème du point milieu* est respecté : le *déphasage après intégration (sur le volume de sortie) est égal au déphasage avant intégration pris au point milieu \vec{Q}_D* :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \Delta\phi_{\beta\alpha,D} \left(\vec{Q}_D \right)$$

Il est également possible d'exprimer le **signal de sortie complet** :

$$S := S_1 \cdot (1 + e^{-\eta} \cdot \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}]) \quad (4.42)$$

où S_1 , η et $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ sont respectivement l'amplitude, le facteur de contraste et le déphasage du signal.

On obtient ainsi l'**amplitude** :

$$S_1 = \frac{M_\alpha^2 + M_\beta^2}{|\det(X_D X_1^{-1})|} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[2 \operatorname{Im}[m_N Y_D X_D^{-1}]])}} \quad (4.43)$$

et le **facteur de contraste** :

$$\eta = -\ln \left[\frac{2M_\alpha M_\beta}{M_\alpha^2 + M_\beta^2} \right] + \frac{m_N}{4\hbar} \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - Y_D X_D^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \cdot \operatorname{Im} [Y_D X_D^{-1}]^{-1} \cdot \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - (Y_D X_D^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \quad (4.44)$$

On peut alors exprimer simplement ces quantités à partir des données initiales du problème (ie en fonction des paramètres caractéristiques du paquet d'ondes initial et des séparatrices).

En effet, on a déjà vu comment exprimer les quantités $X_D X_1^{-1}$ et $Y_D X_D^{-1}$ uniquement à partir des largeurs complexes initiales X_1 et Y_1 . L'amplitude du signal s'écrit donc finalement :

$$S_1 = \frac{M_\alpha^2 + M_\beta^2}{|\det(A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1})|} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/4}}{\sqrt{\det[2m_N \operatorname{Im}([C_{D1} + D_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}] \cdot [A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}]^{-1})]}} \quad (4.45)$$

Quant au facteur de contraste, il est la somme de deux termes, positifs ou nuls, le premier étant nul lorsque $M_\alpha = M_\beta$, ie lorsque l'ensemble des modifications d'amplitude subi par le bras α est égal à celui subi par le bras β (on rappelle que ces modifications d'amplitude sont dues à l'action des diverses séparatrices). Dans ce cas, le contraste est simplement égal au deuxième terme, qui dépend de façon essentielle de :

- la **différence des impulsions finales** :

$$\Delta p_D := \vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D} \quad (4.46)$$

- la **différence des positions finales** :

$$\Delta r_D := \vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D} \quad (4.47)$$

Nous avons déjà insisté sur le fait que ces différences finales n'étaient pas nulles lorsqu'il y avait des termes quadratiques dans l'Hamiltonien (rotations, gradients...). Un interféromètre n'est ainsi jamais rigoureusement "fermé", ni en position, ni en impulsion. Il vaut mieux d'ailleurs employer l'expression "*interféromètre à géométrie fermée*" plutôt qu'interféromètre fermé.

Le calcul de ces différences est en fait assez simple.

En effet, considérons le changement de position et d'impulsion centrales que subit un paquet d'ondes lors de la traversée de la séparatrice n° i :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha i} &\longrightarrow \vec{r}_{\alpha i} + \vec{a}_{\alpha i} \\ \vec{p}_{\alpha i} &\longrightarrow \vec{p}_{\alpha i} + \vec{b}_{\alpha i} \end{aligned}$$

(dans le cadre des *modélisations infiniment fine* et *ttt champ faible*, on a par exemple $\vec{a}_{\alpha i} = \vec{0}$ et $\vec{b}_{\alpha i} = \hbar \vec{k}_{\alpha i}$).

On a donc, juste après l'instant t_i :

$$\vec{r}_{\beta i}^+ - \vec{r}_{\alpha i}^+ = \vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i} + (\vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i})$$

et ²¹ :

$$\frac{\vec{p}_{\beta i}^+}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i}^+}{m_{\alpha i}} = \frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} + \left(\frac{\vec{b}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{b}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} \right)$$

En appliquant alors la loi *ABCD* entre t_i et t_{i-1} , puis entre t_{i-1} et t_{i-2} , etc... jusqu'à t_1 , et en notant que :

$$\vec{r}_{\beta 1} - \vec{r}_{\alpha 1} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\beta 1} - \vec{p}_{\alpha 1} = \vec{0}$$

on obtient finalement (notation $A_{ij} := A(t_i, t_j)$) :

$$\Delta r_i := \vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{i-1} \left[A_{ij} \cdot (\vec{a}_{\beta j} - \vec{a}_{\alpha j}) + B_{ij} \cdot \left(\frac{\vec{b}_{\beta j}}{m_{\beta j}} - \frac{\vec{b}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} \right) \right] \quad (4.48)$$

²¹ On a déjà souligné au chapitre 2 l'importance de considérer non pas les impulsions, mais les *impulsions massiques* (qu'il ne faut pas confondre avec les vitesses). En particulier, ce sont ces quantités qui entrent dans l'expression de la loi *ABCD*.

et :

$$\Delta \frac{p_i}{m_i} := \frac{\vec{p}_{\beta i}}{m_{\beta i}} - \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_{\alpha i}} = \sum_{j=1}^{i-1} \left[C_{ij} \cdot (\vec{a}_{\beta j} - \vec{a}_{\alpha j}) + D_{ij} \cdot \left(\frac{\vec{b}_{\beta j}}{m_{\beta j}} - \frac{\vec{b}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} \right) \right] \quad (4.49)$$

où les matrices $ABCD$ sont établies dans la partie 2.1 (certains cas particuliers pertinents sont détaillés au paragraphe 2.2.3 et dans l'appendice D, et des développements de Taylor sont fournis dans l'appendice C).

Ici $\vec{a}_{\alpha i} = \vec{0}$ et $\vec{b}_{\alpha i} = \hbar \vec{k}_{\alpha i}$, et par conséquent les différences finales Δr_D et Δp_D se ré-écrivent sous la forme :

$$\Delta r_D = \sum_{j=1}^N B_{Dj} \cdot \left(\frac{\hbar \vec{k}_{\beta j}}{m_{\beta j}} - \frac{\hbar \vec{k}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} \right) \quad (4.50)$$

$$\frac{\Delta p_D}{m_N} = \sum_{j=1}^N D_{Dj} \cdot \left(\frac{\hbar \vec{k}_{\beta j}}{m_{\beta j}} - \frac{\hbar \vec{k}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} \right) \quad (4.51)$$

permettant ainsi d'exprimer simplement le facteur de contraste précédent en fonction des vecteurs d'ondes caractéristiques des séparatrices.

On remarque que ces différences finales font intervenir uniquement les matrices $ABCD$ (et pas les vecteurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$ par exemple). Ce résultat est tout à fait logique du fait que ces matrices ne dépendent que des termes *quadratiques* de l'Hamiltonien H_{ext} (rotations, gradients...), ie des termes associés à des forces dépendant de l'état externe des atomes (position et impulsion). Lorsque les deux chemins atomiques sont séparés (d'un point de vue externe, grâce à l'action des séparatrices), les atomes ne sont ainsi pas soumis aux mêmes contraintes pendant un certain temps, et ils ne peuvent donc pas avoir le même état externe en sortie d'un interféromètre, même si celui-ci est refermé en jouant sur les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{\nu i}$ ²².

Nous allons voir maintenant comment ces différences finales sont essentielles pour faire le lien avec l'autre méthode principale d'obtention du déphasage (où l'on somme trois déphasages caractéristiques : un lié à la propagation, un lié aux séparatrices et un dernier, lié précisément à la non-fermeture Δr_D des interféromètres).

Autre méthode d'obtention du déphasage

On peut très bien calculer le déphasage global sans diviser l'interféromètre atomique en tranches temporelles. Il suffit alors de laisser évoluer les deux paquets d'ondes initiaux (qui sont identiques en fait, mais associés à deux chemins atomiques différents) tout au long de l'interféromètre, et comparer leur phase respective en sortie. On obtient ainsi l'expression 4.36 :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) &= \frac{1}{\hbar} \vec{p}_{\beta D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{1}{\hbar} \vec{p}_{\alpha D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{S_{\beta i}}{\hbar} + \vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \omega_{\beta i} t_i - \varphi_{\beta i} \right) - \left(\frac{S_{\alpha i}}{\hbar} + \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - \omega_{\alpha i} t_i - \varphi_{\alpha i} \right) \right] \\ &+ \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \cdot \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

²²On peut bien sûr imaginer et construire des géométries très particulières conduisant à la nullité de ces différences finales.

où les diverses simplifications dues au *théorème des quatre points finaux* ne sont pas encore effectuées.

Ce déphasage peut alors être vu comme la somme de trois termes :

$$\boxed{\Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) = \Delta\phi_{prop} + \Delta\phi_{int} + \Delta\phi_{sep}(\vec{r})} \quad (4.53)$$

avec :

1. un **déphasage de propagation** :

$$\boxed{\Delta\phi_{prop} := \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N (S_{\beta i} - S_{\alpha i})} \quad (4.54)$$

associé à l'accumulation des phases d'action le long de chaque chemin atomique,

2. un **déphasage d'interaction** :

$$\boxed{\Delta\phi_{int} := \sum_{i=1}^N \left[\vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right]} \quad (4.55)$$

lié aux interactions avec les séparatrices,

3. un **déphasage de séparation** :

$$\boxed{\Delta\phi_{sep}(\vec{r})} : = \frac{1}{\hbar} \vec{p}_{\beta D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{1}{\hbar} \vec{p}_{\alpha D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re} [Y_D X_D^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \quad (4.56)$$

dépendant du vecteur position \vec{r} , et lié aux différences de position et d'impulsion finales calculées à la fin du paragraphe précédent.

Ce dernier terme est nul lorsque $\Delta r_D = \vec{0}$ et $\Delta p_D = \vec{0}$. Comme il dépend du vecteur position, il n'a de sens qu'en un point donné de l'espace, ou après intégration spatiale sur un certain volume (comme résultat d'une détection instantanée par exemple).

Il est alors possible de **faire le lien** avec la méthode usuelle d'obtention du déphasage, qui consiste à définir le déphasage en sortie comme la somme de trois termes :

- un *déphasage de propagation* et un *déphasage d'interaction*, égaux à ceux définis plus haut :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{prop} & : = \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N (S_{\beta i} - S_{\alpha i}) \\ \Delta\phi_{int} & : = \sum_{i=1}^N \left[\vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right] \end{aligned}$$

- un troisième déphasage, également dit "*de séparation*", exprimé généralement sous la forme :

$$\widetilde{\Delta\phi_{sep}} := -\frac{\vec{p}_{\alpha D} + \vec{p}_{\beta D}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \quad (4.57)$$

dépendant de façon essentielle de la différence des positions finales Δr_D .

Il est généralement sous-entendu que ce déphasage $\widetilde{\Delta\phi_{sep}}$ est obtenu *avant intégration* du signal de sortie sur un quelconque volume spatial. Le problème est donc de savoir quel est le **sens d'un tel déphasage**.

En fait, il est aisé de voir qu'il correspond au déphasage de séparation $\Delta\phi_{sep}(\vec{r})$ évalué au point milieu final \vec{Q}_D :

$$\widetilde{\Delta\phi_{sep}} = \Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D)$$

ie au déphasage obtenu *après intégration* du signal de sortie sur le volume spatial \mathbb{R}^3 (qui équivaut à effectuer une détection instantanée de l'ensemble des atomes, voir le paragraphe 4.1.4).

Choisir ce déphasage de séparation particulier $\widetilde{\Delta\phi_{sep}}$ revient donc à choisir une *méthode de détection particulière*.

On peut également se demander quel écart il y a entre ce déphasage (ie $\Delta\phi_{sep}(\vec{r})$ évalué au point milieu \vec{Q}_D) et le déphasage $\Delta\phi_{sep}(\vec{r})$ évalué en un autre point, par exemple en un des deux points finaux $\vec{r}_{\alpha D}$ ou $\vec{r}_{\beta D}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{sep}(\vec{r}_{\alpha D}) &= -\frac{1}{\hbar}\vec{p}_{\beta D} \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar}(\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re}[Y_D X_D^{-1}](\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \\ &= \Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D) + \frac{1}{2\hbar}\Delta p_D \cdot \Delta r_D + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar}\Delta r_D \cdot \text{Re}[Y_D X_D^{-1}] \cdot \Delta r_D\end{aligned}$$

avec les différences finales Δr_D et Δp_D données plus haut.

On remarque d'abord que la correction à $\Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D)$ est quadratique en les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{\nu i}$ ($\nu = \alpha$ ou β). De plus, comme Δr_D et Δp_D dépendent des termes d'ordre 2 de l'Hamiltonien H_{ext} (rotations $\vec{\Omega}$, gradients $\gamma...$) pour les interféromètres à géométrie fermée, cette correction sera *au minimum quadratique* en ces termes pour de tels interféromètres :

$$\frac{1}{2\hbar}\Delta p_D \cdot \Delta r_D + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar}\Delta r_D \cdot \text{Re}[Y_D X_D^{-1}] \cdot \Delta r_D \quad \propto \quad \vec{\Omega}^2, \gamma^2$$

et elle pourra être négligée dans de nombreux cas pratiques.

Compensation entre $\Delta\phi_{prop}$ et $\widetilde{\Delta\phi_{sep}}$:

Dans l'étude des interféromètres atomiques à géométrie fermée, et plus précisément dans les calculs de déphasage au premier ordre (de l'effet à mesurer, comme la rotation par exemple), il a souvent été constaté la simplification suivante :

$$\Delta\phi_{prop} + \widetilde{\Delta\phi_{sep}} \sim 0$$

à des termes proportionnels à l'énergie de recul (ie en $\vec{k}_{\nu i}^2$) près. Dans ce cas, le déphasage global est simplement égal au déphasage d'interaction $\Delta\phi_{int}$, qu'il est très facile d'obtenir à partir des phases "imprimées" par les séparatrices sur les atomes aux temps t_i :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} \sim \Delta\phi_{int} = \sum_{i=1}^N \left[\vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right]$$

On peut alors se demander quelle est *l'origine et la validité d'une telle compensation*, et quel est le *lien exact* entre $\Delta\phi_{prop}$ et $\widetilde{\Delta\phi_{sep}}$.

Comme on peut s'y attendre, cette simplification résulte du théorème des quatre points finaux, ie de l'existence d'un *invariant symplectique* caractéristique des chemins atomiques entre deux séparatrices successives. La seule différence avec la démarche suivie plus haut (avec tranches temporelles et chemins

homologues) est qu'on ne simplifie pas ici le déphasage au fur et à mesure de la progression dans l'interféromètre, mais uniquement à sa sortie.

En effet, on a montré dans l'équation 4.26 qu'on avait le résultat suivant pour deux chemins homologues (ie pour une seule tranche temporelle avec deux bras interférométriques, voir figure 4.19) :

$$\delta S_{i+1,i} = \frac{\overrightarrow{p_{\alpha,i+1}} + \overrightarrow{p_{\beta,i+1}}}{2} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta,i+1}} - \overrightarrow{r_{\alpha,i+1}}) - \frac{\overrightarrow{p_{\alpha i}} + \overrightarrow{p_{\beta i}}}{2} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta i}} - \overrightarrow{r_{\alpha i}}) - (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) \cdot (t_{i+1} - t_i) - \hbar \omega_{\beta \alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta \alpha i}$$

lié à la présence d'un invariant (symplectique) qui caractérisait la paire de chemins.

Le déphasage de propagation :

$$\Delta \phi_{prop} = \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N (S_{\beta i} - S_{\alpha i})$$

s'obtient alors très simplement, en remarquant que les séparatrices - avec l'approximation *infinitement fine* ou *ttt champ faible* - ne modifient pas les positions centrales des paquets d'ondes atomiques entre t_i^- et t_i^+ (où les instants t_i sont les instants effectifs d'interaction) :

$$\overrightarrow{r_{\beta i}^+} - \overrightarrow{r_{\alpha i}^+} = \overrightarrow{r_{\beta i}} - \overrightarrow{r_{\alpha i}}$$

mais seulement les impulsions centrales :

$$\frac{\overrightarrow{p_{\beta i}^+} + \overrightarrow{p_{\alpha i}^+}}{2} = \frac{\overrightarrow{p_{\beta i}} + \overrightarrow{p_{\alpha i}}}{2} + \frac{\hbar \overrightarrow{k_{\beta i}} + \hbar \overrightarrow{k_{\alpha i}}}{2}$$

Comme dans la démarche suivie au paragraphe 4.3.2, on observe alors de nombreuses simplifications entre les termes indicés par i et ceux indicés par $i-1$ et $i+1$, et on aboutit finalement à l'expression suivante pour le déphasage de propagation :

$$\Delta \phi_{prop} = \frac{\overrightarrow{p_{\alpha D}} + \overrightarrow{p_{\beta D}}}{2\hbar} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta D}} - \overrightarrow{r_{\alpha D}}) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\overrightarrow{k_{\beta i}} + \overrightarrow{k_{\alpha i}}}{2} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta i}} - \overrightarrow{r_{\alpha i}}) + \omega_{\beta \alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta \alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \quad (4.58)$$

ie également :

$$\boxed{\Delta \phi_{prop} + \widetilde{\Delta \phi_{sep}} = - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\overrightarrow{k_{\beta i}} + \overrightarrow{k_{\alpha i}}}{2} \cdot \Delta r_i + \omega_{\beta \alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta \alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right]} \quad (4.59)$$

avec :

$$\Delta r_i := \overrightarrow{r_{\beta i}} - \overrightarrow{r_{\alpha i}} = \sum_{j=1}^i B_{ij} \cdot \left(\frac{\hbar \overrightarrow{k_{\beta j}}}{m_{\beta j}} - \frac{\hbar \overrightarrow{k_{\alpha j}}}{m_{\alpha j}} \right)$$

où B_{ij} est la matrice B des matrices $ABCD$:

$$B_{ij} := B(t_i, t_j)$$

En toute rigueur, la relation $\Delta \phi_{prop} + \widetilde{\Delta \phi_{sep}} = 0$ est donc inexacte, les termes correctifs étant proportionnels au carré des vecteurs d'ondes $\overrightarrow{k_{\nu i}}$ (énergies de recul) et aux différences de masses $m_{\beta j} - m_{\alpha j}$.

On peut néanmoins considérer des cas où ces termes correctifs s'annulent.

Pour un interféromètre à géométrie symétrique par exemple, ie tel que $\overrightarrow{k_{\beta i}} + \overrightarrow{k_{\alpha i}} = \overrightarrow{0}$ pour tout i de 2 à $N-1$ (voir paragraphe 4.3.2) la relation précédente devient simplement :

$$\Delta \phi_{prop} + \widetilde{\Delta \phi_{sep}} = - \frac{\overrightarrow{k_{\beta N}} + \overrightarrow{k_{\alpha N}}}{2} \cdot \Delta r_N - \sum_{i=1}^N \left[\omega_{\beta \alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta \alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right]$$

De plus, si on néglige les différences de masses, ainsi que l'effet des termes quadratiques de H_{ext} sur le déphasage (seuls les termes linéaires de H_{ext} [gravité uniforme par exemple] sont donc pris en compte), on obtient alors bien l'égalité :

$$\Delta\phi_{prop} + \widetilde{\Delta\phi_{sep}} = 0$$

qui n'est valable que dans ce cas très particulier.

Intégration sur les distributions initiales

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu comment établir le signal de sortie associé à deux chemins atomiques cohérents :

$$S := S_1 \cdot (1 + e^{-\eta} \cdot \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}])$$

sous forme d'un déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha}$, d'un terme d'amplitude S_1 et d'un terme de contraste η . Ce signal tient alors compte de la modélisation de la zone de détection (modélisation particulière en fait, avec détection instantanée de l'ensemble des atomes en sortie ²³), mais pas de la modélisation décrivant le nuage atomique initial (ie la source atomique). C'est précisément l'objet de ce paragraphe. On obtiendra ainsi une modélisation du signal réellement observé dans les expériences : le *signal de franges*.

Au paragraphe 4.1.1, on a vu en détail comment modéliser les diverses sources atomiques à l'aide d'un *mélange statistique d'états*, où les distributions statistiques portaient sur les centres (en position et impulsion) des paquets d'ondes atomiques initiaux. On a observé cependant que seule la distribution en position était pertinente, alors que la distribution portant sur les impulsions centrales pouvait être *superflue* (si l'on considère des largeurs impulsionsnelles de paquets d'ondes égales à la dispersion en impulsion du nuage initial), voire *inadaptée* (dans le cas des sources [avec refroidissement Sisyphes par exemple] où une partie des atomes reste piégée dans les puits de potentiels microscopiques d'un réseau sous-jacent ; il vaut alors mieux considérer une distribution de l'occupation des niveaux vibratoires des pièges).

En première approche (voir fin du paragraphe 4.1.1), on peut toutefois modéliser simplement ces sources atomiques en considérant un *mélange statistique de paquets d'ondes Gaussiens dont les position et impulsion centrales obéissent à des distributions Gaussiennes*. En effet, à partir de ce schéma particulier, il sera toujours possible d'affiner la modélisation en prenant, par exemple, une distribution en impulsion infiniment fine (pic de Dirac), ou en considérant des distributions sous forme d'une somme de plusieurs Gaussiennes (régime à plusieurs composantes).

Avant de continuer, précisons que l'instant central t_1 de la première séparatrice atomique ne coïncide pas avec l'instant caractéristique t_0 du début d'évolution des paquets d'ondes dans l'interféromètre atomique. L'instant t_0 représente, par exemple, le début de la coupure (adiabatique ou non) du potentiel qui piègeait les atomes dans le nuage source (voir paragraphe 4.1.1). Les paquets d'ondes s'étalent alors entre t_0 et t_1 de façon naturelle, mais aussi à cause des champs inertiels, gravitationnels ou électromagnétiques agissant pendant ce temps ²⁴. Le signal de sortie écrit plus haut doit alors tenir compte de cette évolution entre t_0 et t_1 , qui modifie uniquement le facteur d'amplitude S_1 . On obtient ainsi :

$$S := S_0 \cdot (1 + e^{-\eta} \cdot \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}])$$

²³Pour les autres méthodes de détection, voir la discussion du paragraphe 4.1.4.

²⁴Dans un piège laser, par exemple, les atomes sont liés au référentiel des lasers, ie à celui du laboratoire, et ils ne ressentent donc pas en moyenne l'effet de la rotation terrestre (pour une expérience terrestre) ou du potentiel de gravité. Néanmoins, dès qu'ils sont lâchés (adiabatiquement ou non), ils ressentent ces potentiels.

avec :

$$S_0 := S_1 / |\det (X_1 X_0^{-1})|$$

et où S_1 , η et $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ sont exprimés à partir des grandeurs indicées 0 (ie m_0 , \vec{r}_0 , \vec{p}_0 et $Y_0 X_0^{-1}$) :

$$S (\vec{r}_0, \vec{p}_0, Z_0)$$

avec la notation plus compacte :

$$Z_0 := -\frac{im_0}{\hbar} Y_0 X_0^{-1}$$

Le signal de franges est alors obtenu en intégrant le signal de sortie $S(\vec{r}_0, \vec{p}_0, Z_0)$ sur les **distributions statistiques** établies à la fin du paragraphe 4.1.1 :

$$\tilde{S} := \int \mathcal{D}_{\vec{r}_0} \int \mathcal{D}_{\vec{p}_0} S(\vec{r}_0, \vec{p}_0, Z_0)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\vec{r}_0} &= \frac{d\vec{r}_0}{N_r} \cdot \Delta_r(\vec{r}_0) \\ &= d\vec{r}_0 \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\det [Z_0 \cdot (Z_0 - U_0/2)^{-1} \cdot U_0]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{r}_0 - \vec{R}_0) \cdot [Z_0 \cdot (Z_0 - U_0/2)^{-1} \cdot U_0] \cdot (\vec{r}_0 - \vec{R}_0) \right\} \\ \mathcal{D}_{\vec{p}_0} &= \frac{d\vec{p}_0}{N_p} \cdot \Delta_p(\vec{p}_0) \\ &= d\vec{p}_0 \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\det [(1 - \hbar^2 V_0 Z_0/2)^{-1} \cdot V_0]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{p}_0 - \vec{P}_0) \cdot [(1 - \hbar^2 V_0 Z_0/2)^{-1} \cdot V_0] \cdot (\vec{p}_0 - \vec{P}_0) \right\} \end{aligned}$$

et où les matrices U_0 et V_0 sont les **matrices de dispersion** (mesurées) du nuage (ie les largeurs des distributions expérimentales) :

$$\begin{aligned} R(\vec{r}) &= \sqrt{\det (U_0/2\pi)} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{R}_0) U_0 (\vec{r} - \vec{R}_0) \right] \\ P(\vec{p}) &= \sqrt{\det (V_0/2\pi)} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{p} - \vec{P}_0) V_0 (\vec{p} - \vec{P}_0) \right] \end{aligned}$$

Ces intégrales sont alors calculables car, dans S , seul le déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha}$:

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) - \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \tau_{\beta\alpha i} - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right]$$

dépend de \vec{r}_0 et \vec{p}_0 , et la dépendance est au plus quadratique :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = \text{au plus quadratique en } \vec{r}_0 \text{ et } \vec{p}_0$$

Plus précisément, cette dépendance est linéaire pour le premier terme :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}) \cdot \vec{Q}_i$$

au plus quadratique pour le quatrième :

$$- \sum_{i=1}^N \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i}$$

et nulle pour les autres termes.

Concernant le premier terme, on peut montrer en effet que **les points milieux \vec{Q}_i dépendent linéairement de \vec{r}_0 et \vec{p}_0** :

$$\vec{Q}_i = A_{i0} \cdot \vec{r}_0 + B_{i0} \cdot \frac{\vec{p}_0}{m_0} + \vec{\xi}_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} \left[A_{ij} \cdot \frac{\vec{a}_{\alpha j} + \vec{a}_{\beta j}}{2} + B_{ij} \cdot \left(\frac{\vec{b}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} + \frac{\vec{b}_{\beta j}}{m_{\beta j}} \right) / 2 \right] \quad (4.60)$$

où l'on a utilisé les notations de la fin du paragraphe 4.3.2, ie :

$$\vec{r}_{\alpha i} \longrightarrow \vec{r}_{\alpha i} + \vec{a}_{\alpha i} \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\alpha i} \longrightarrow \vec{p}_{\alpha i} + \vec{b}_{\alpha i}$$

pour décrire le changement de position et d'impulsion centrales que subit un paquet d'ondes lors de la traversée de la séparatrice n° i .

Dans le cadre des *modélisations infiniment fine et ttt champ faible* ($\vec{a}_{\alpha i} = \vec{0}$ et $\vec{b}_{\alpha i} = \hbar \vec{k}_{\alpha i}$), on obtient par conséquent :

$$\vec{Q}_i = A_{i0} \cdot \vec{r}_0 + B_{i0} \cdot \frac{\vec{p}_0}{m_0} + \vec{\xi}_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} \cdot \left(\frac{\hbar \vec{k}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta j}}{m_{\beta j}} \right) / 2 \quad (4.61)$$

et le premier terme de $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ s'écrit finalement :

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \vec{Q}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \left[A_{i0} \cdot \vec{r}_0 + B_{i0} \cdot \frac{\vec{p}_0}{m_0} + \vec{\xi}_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} \cdot \left(\frac{\hbar \vec{k}_{\alpha j}}{m_{\alpha j}} + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta j}}{m_{\beta j}} \right) / 2 \right]$$

Quant au terme $-\sum_{i=1}^N \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i}$, il est fonction des actions $S_{\alpha i}$ et $S_{\beta i}$; dont on a vu au paragraphe 2.2.4 qu'elles dépendaient de façon *au plus quadratique* des coordonnées des points $(\vec{r}_{\alpha i}, \vec{p}_{\alpha j})$ et $(\vec{r}_{\beta j}, \vec{p}_{\beta j})$, ie finalement de façon au plus quadratique de \vec{r}_0 et \vec{p}_0 lorsque l'on a relié ces points au point (\vec{r}_0, \vec{p}_0) par la loi *ABCD*.

Il est donc possible de calculer le signal de franges (intégrales Gaussiennes) avec tous ces termes linéaires *et* quadratiques. Néanmoins, *par souci de simplicité*, nous ne considérerons ici que les termes linéaires en \vec{r}_0 et \vec{p}_0 de $\Delta\phi_{\beta\alpha}$. Cette approximation (qui n'est pas nécessaire, rappelons-le) revient en fait à négliger les différences de masses $m_{\beta j} - m_{\alpha j}$ lors de l'intégration sur les distributions initiales.

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = \Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{R}_0, \vec{P}_0) + \sum_{i=1}^N \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \left[A_{i0} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{R}_0) + \frac{1}{m_0} B_{i0} \cdot (\vec{p}_0 - \vec{P}_0) \right]$$

et l'intégration suivante s'effectue simplement :

$$\int \mathcal{D}_{\vec{r}_0} \int \mathcal{D}_{\vec{p}_0} \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{r}_0, \vec{p}_0)] = e^{-\eta_r - \eta_p} \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{R}_0, \vec{P}_0)]$$

avec les **deux facteurs de contraste additionnels** :

$$\eta_r := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot A_{i0} \right) \cdot \left[Z_0 \cdot (Z_0 - U_0/2)^{-1} \cdot U_0 \right]^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \widetilde{A_{i0}} \cdot \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \right)$$

et :

$$\eta_p := \frac{1}{2m_0^2} \left(\sum_{i=1}^N \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot B_{i0} \right) \cdot \left[(1 - \hbar^2 V_0 Z_0/2)^{-1} \cdot V_0 \right]^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \widetilde{B_{i0}} \cdot \left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \right)$$

des respectivement aux distributions en position et impulsion du nuage atomique initial.

Finalement, l'intégration du signal de sortie $S(\vec{r}_0, \vec{p}_0, Z_0)$ (pris après détection) sur les distributions statistiques initiales conduit au **signal de franges** :

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}_0 \cdot \left(1 + e^{-\widetilde{\eta}} \cdot \cos \left[\widetilde{\Delta\phi_{\beta\alpha}} \right] \right) \quad (4.62)$$

avec :

l'amplitude	:	$\widetilde{S}_0 := S_0$
le contraste	:	$\widetilde{\eta} := \eta + \eta_r + \eta_p$
le déphasage	:	$\widetilde{\Delta\phi_{\beta\alpha}} := \Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{R}_0, \vec{P}_0)$

où nous observons que l'*effet principal* des distributions statistiques est une possible baisse de contraste des franges d'interférence ²⁵.

Quant au déphasage final, on obtient un résultat du type "théorème du point milieu" :

le déphasage après intégration sur les distributions statistiques est égal au déphasage avant intégration, mais évalué au point milieu de la source, ie en (\vec{R}_0, \vec{P}_0) :

$$\widetilde{\Delta\phi_{\beta\alpha}} = \Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{R}_0, \vec{P}_0) \quad (4.63)$$

Equivalence avec une ligne de points milieux

Nous avons déjà souligné le fait que le déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ (ou $\widetilde{\Delta\phi_{\beta\alpha}}$) avait une expression particulièrement simple lorsque les différences de masses $m_{\beta i} - m_{\alpha i}$ étaient nulles pour tout i . En effet, lorsque les états atomiques internes sont semblables, ou lorsque l'on néglige les termes dépendant de $m_{\beta i} - m_{\alpha i}$ dans $\Delta\phi_{\beta\alpha}$, on obtient une expression extrêmement compacte du déphasage :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[\left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right]$$

qui dépend uniquement :

²⁵ Lorsque l'on ne néglige pas les termes *quadratiques* en \vec{r}_0 et \vec{p}_0 dans $\Delta\phi_{\beta\alpha}(\vec{r}_0, \vec{p}_0)$ (ie ceux dus aux différences de masses), il y a une baisse supplémentaire du contraste ainsi qu'un déphasage supplémentaire, dont il faut tenir compte en toute rigueur.

- des coordonnées des points milieux :

$$\vec{Q}_i = \frac{\vec{r}_{\alpha i} + \vec{r}_{\beta i}}{2}$$

obtenues classiquement (on rappelle que le théorème d'Ehrenfest s'applique pour l'Hamiltonien H_{ext} considéré)

- de la différence des paramètres caractérisant les interactions :

$$\left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \ , \ \omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i} \ , \ \varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i} \right)$$

Ce déphasage ressemble beaucoup au déphasage d'interaction vu plus haut :

$$\Delta\phi_{int} = \sum_{i=1}^N \left[\vec{k}_{\beta i} \cdot \vec{r}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) \right]$$

qui exprime simplement le fait qu'à chaque interaction entre les atomes et une séparatrice, une phase caractéristique vient "s'imprimer" sur les paquets d'ondes atomiques. Pour obtenir $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ à partir de $\Delta\phi_{int}$, il suffit alors de considérer que les interactions effectives ont lieu aux points milieux \vec{Q}_i , et non aux points $\vec{r}_{\alpha i}$ ou $\vec{r}_{\beta i}$. Ainsi, tout se passe comme s'il y avait *un seul chemin atomique* (le chemin fictif des points milieux) soumis à des *interactions effectives* (aux instants t_i) dont les vecteurs d'ondes $\vec{\delta k}_i$ seraient égaux aux différences $\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i}$, les pulsations $\delta\omega_i$ égales à $\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}$, et les phases $\delta\varphi_i$ égales à $\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}$.

Finalement (voir figure 4.23) :

Tout interféromètre atomique peut être considéré comme une ligne de points classiques (la ligne des points milieux) ; en certains de ces points, ont lieu des interactions effectives, dont les paramètres sont égaux à la différence des paramètres caractérisant les interactions individuelles.

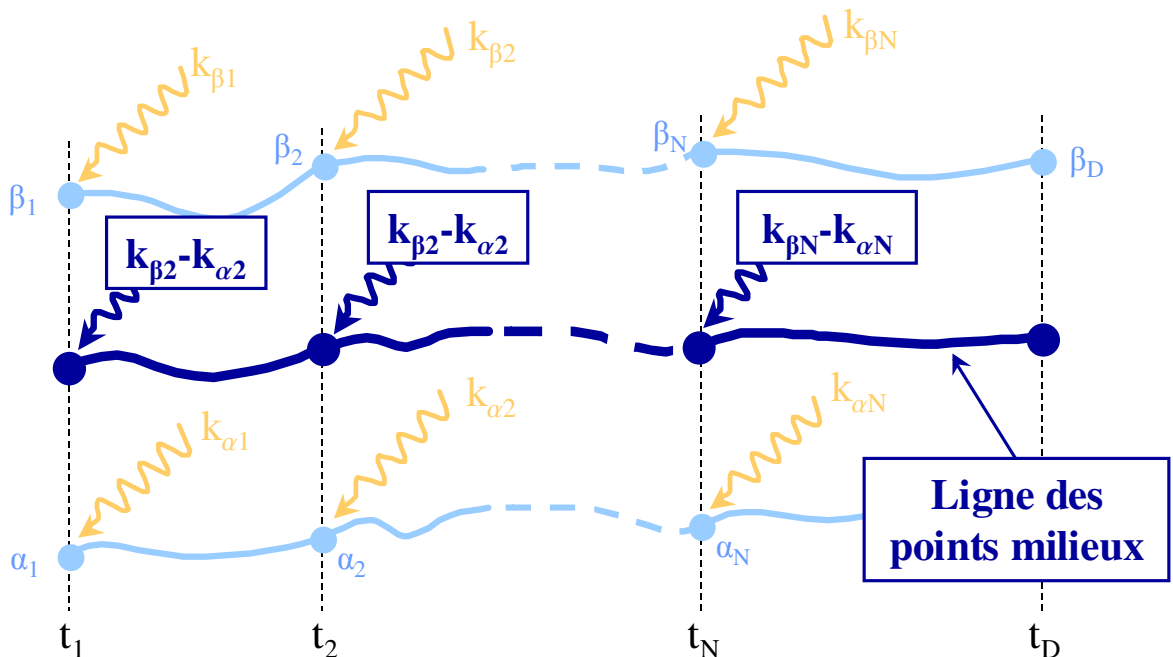


FIG. 4.23: Ligne de points milieux correspondant à un interféromètre atomique quelconque.

Ce résultat est très intéressant du point de vue de la modélisation globale des interféromètres.

En effet, on a vu, tout au long de ce mémoire, comment modéliser un interféromètre atomique le plus complètement, mais aussi le plus simplement possible. Bien que le schéma de description d'un tel appareil soit généralement très complexe, nous avons vu comment le réduire progressivement, en passant d'un ensemble de bras atomiques et de séparatrices quelconques, à un ensemble de chemins atomiques soumis à des interactions effectives instantanées (*théorème ABCD* et *schéma ttt*), puis à un ensemble de tranches temporelles caractéristiques (*chemins homologues* et *théorème des quatre points finaux*), et finalement à un simple ensemble de points :

$$\boxed{\text{tout interféromètre} \iff \text{un ensemble de points } (t_i, \vec{Q}_i, \vec{\delta k}_i, \delta\omega_i, \delta\varphi_i)}$$

Le déphasage s'obtient alors grâce aux points milieux \vec{Q}_i , dont on connaît une expression simple en fonction des matrices *ABCD* et des coordonnées initiales (\vec{r}_0, \vec{p}_0) :

$$\vec{Q}_i = A_{i0} \cdot \vec{r}_0 + B_{i0} \cdot \frac{\vec{p}_0}{m_0} + \vec{\xi}_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} \cdot \frac{\hbar(\vec{k}_{\alpha j} + \vec{k}_{\beta j})}{2m}$$

Cas particulier des géométries symétriques

L'expression précédente du déphasage se simplifie d'avantage dans le cas des interféromètres à *géométrie symétrique* (voir figures 4.12 et 4.24).

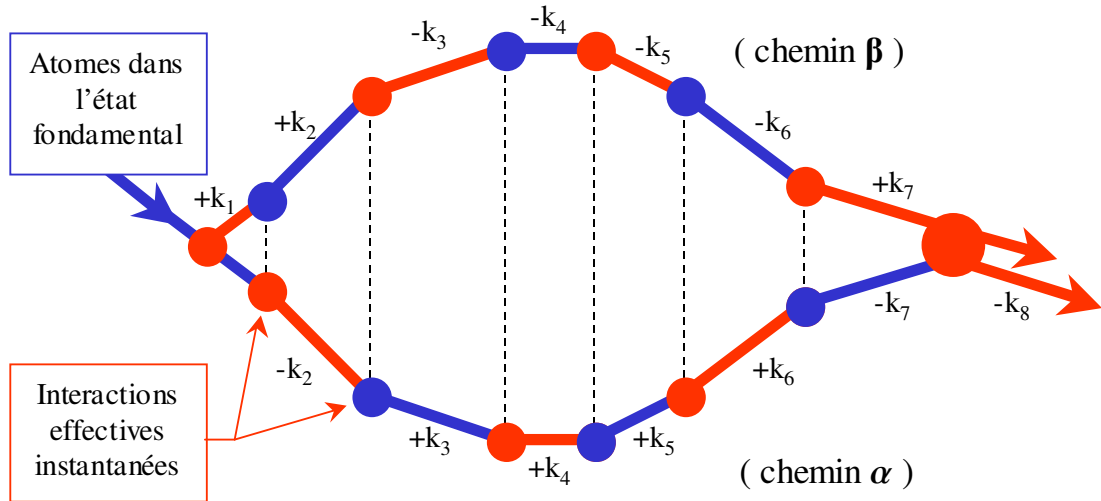


FIG. 4.24: Exemple d'interféromètre atomique à géométrie symétrique.

En effet, ce type de géométrie, très utilisé pour les raisons évoquées plus haut (élimination des termes de recul et des termes d'horloge), mais aussi pour d'autres raisons (compensation d'effets inertiels avec deux jets atomiques contra-propageants), est défini par :

$$\boxed{\vec{k}_{\alpha i} + \vec{k}_{\beta i} = \vec{0} \quad \text{pour tout } i \in [2, N-1]}$$

et conduit par conséquent à :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \overrightarrow{\delta k_1} \cdot \overrightarrow{q_1} + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{Q_i} + \overrightarrow{\delta k_N} \cdot \overrightarrow{Q_N} - \sum_{i=1}^N [(\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i + (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i})] \quad (4.64)$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta k_1} &: = \overrightarrow{k_{\beta 1}} - \overrightarrow{k_{\alpha 1}} \\ \overrightarrow{k_i} &: = \overrightarrow{k_{\beta i}} = -\overrightarrow{k_{\alpha i}} \\ \overrightarrow{\delta k_N} &: = \overrightarrow{k_{\beta N}} - \overrightarrow{k_{\alpha N}} \end{aligned}$$

et où les vecteurs $\overrightarrow{Q_i}$ s'expriment d'une façon très simple :

$$\overrightarrow{Q_i} = A_{i1} \cdot \overrightarrow{r_1} + \frac{B_{i1}}{m} \cdot \overrightarrow{P_1^+} + \overrightarrow{\xi_{i1}} \quad (4.65)$$

en fonction des matrices $ABCD\xi$ et d'une seule impulsion - l'**impulsion initiale moyenne** :

$$\overrightarrow{P_1^+} := \overrightarrow{p_1} + \frac{\hbar (\overrightarrow{k_{\alpha 1}} + \overrightarrow{k_{\beta 1}})}{2}$$

Lorsqu'un seul des chemins atomiques est dévié au temps initial t_1 (le chemin β par exemple) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{k_{\beta 1}} = \overrightarrow{k_1} \\ \overrightarrow{k_{\alpha 1}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

cette impulsion s'appelle l'**impulsion de Bragg** :

$$\overrightarrow{p_1} + \hbar \overrightarrow{k_1} / 2$$

dont la partie colinéaire à $\overrightarrow{k_1}$ s'annule lorsque la *condition de Bragg* est remplie :

$$\overrightarrow{k_1} \cdot (\overrightarrow{p_1} + \hbar \overrightarrow{k_1} / 2) = 0$$

ce qui implique :

$$\overrightarrow{Q_i} = A_{i1} \cdot \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{\xi_{i1}}$$

Dans ce cas, les deux bras interférométriques non-perturbés ont un *axe de symétrie* précisément suivant la direction de l'impulsion de Bragg, ie suivant la ligne des points milieux (un exemple est donné sur la figure 4.25).

Nous allons maintenant voir comment sont modifiés tous ces résultats lorsque l'on considère une modélisation plus fine des séparatrices, du type de celles qui sont établies au chapitre 3 (et listées dans la partie 4.1.2).

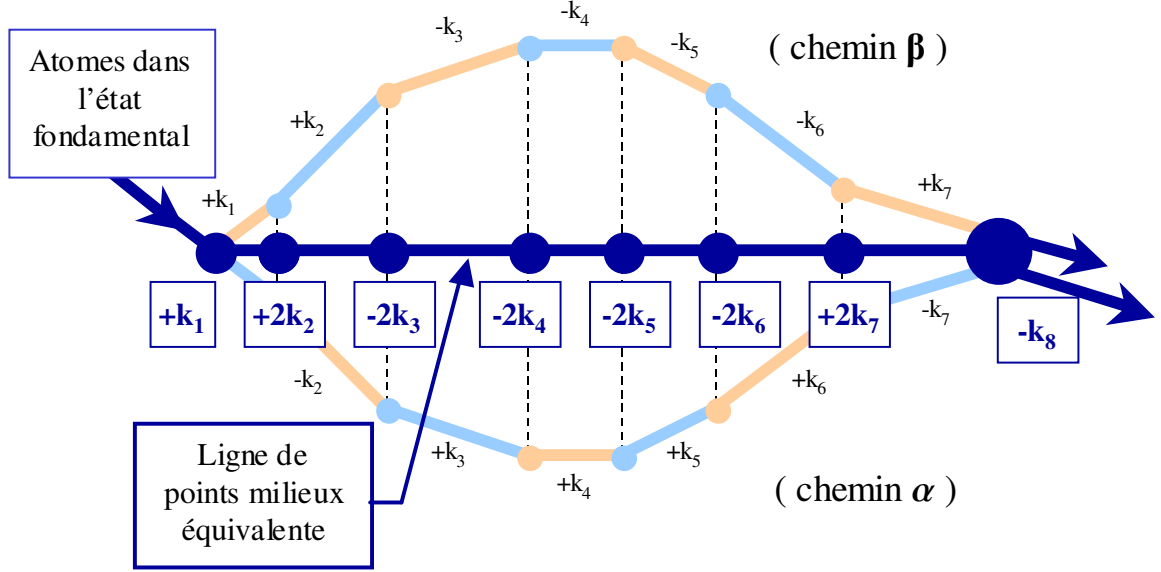


FIG. 4.25: Interféromètre atomique à géométrie symétrique, avec sa ligne de points milieux équivalente.

4.3.3 Signal de franges avec modélisations *ttt* champs forts

On a vu dans la partie 4.1.2 que la modélisation *ttt champ fort généralisée* des séparatrices et ses versions simplifiées (appelées "idéalisée" et "idéalisée libre") présentaient trois différences importantes par rapport aux *modélisations infiniment fine* et *ttt champ faible*.

En effet, selon les modélisations plus complètes (appelées *ttt champs forts*), ce ne sont pas deux paquets d'ondes atomiques principaux qui sortent d'une séparatrice, mais quatre. Il y a donc une **multiplication du nombre de chemins atomiques** dans l'interféromètre, et cela d'autant plus qu'il y a de séparatrices. Ainsi, le nombre de chemins atomiques cohérents en sortie peut être très supérieur à deux, comme c'est le cas avec les modélisations *ttt champ faible* et *infiniment fine*. La participation de plusieurs chemins atomiques à un même signal de franges peut alors modifier non seulement l'amplitude et le contraste de ces franges, mais également le déphasage global de l'interféromètre (ce sont bien sûr les calculs qui sont modifiés, et non les franges). On rencontre cet effet dans divers types d'interférométrie (optique, neutronique...). Nous l'illustrerons au chapitre suivant.

Une autre différence majeure avec les modélisations *infiniment fine* et *ttt champ faible* est que **l'on ne néglige plus l'action de la séparatrice sur la position centrale du paquet d'ondes incident**. Les centres des paquets d'ondes (associés aux différents chemins atomiques de l'interféromètre) subissent alors une modification de trajectoire pendant l'interaction (même s'il n'y a pas de changement d'état interne), et il n'y a donc pas continuité des positions centrales après l'interaction instantanée équivalente (voir la figure 4.6 de la partie 4.1.2) :

$$\vec{r}_{\nu i} \longrightarrow \vec{r}_{\nu i} + \vec{a}_{\nu i} = \vec{r}_{\nu i}^+ \quad \text{avec : } \nu = \alpha, \beta, \gamma \dots$$

(entre l'instant $t_i^- = t_i$ juste avant l'interaction effective, et l'instant t_i^+ juste après).

Enfin, les modélisations *ttt champs forts* rendent également compte de la **modification des largeurs (en position et impulsion)** des paquets d'ondes lors de la traversée d'une séparatrice :

$$X_{\nu i} Y_{\nu i}^{-1} \longrightarrow X_{\nu i} Y_{\nu i}^{-1} + F_{\nu i} = (X_{\nu i} Y_{\nu i}^{-1})^+$$

ou :

$$Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1} \longrightarrow Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i} = (Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1})^+$$

$$\text{avec : } \boxed{E_{\nu i} := (X_{\nu i} Y_{\nu i}^{-1} + F_{\nu i})^{-1} - Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1}}$$

Nous allons voir que ce changement a beaucoup d'effet sur l'expression du signal de franges.

Outre ces trois différences majeures, nous avons également vu que les modifications usuelles du paquet d'ondes incident, à savoir :

- le **changement d'impulsion centrale** :

$$\vec{p}_{\nu i} \longrightarrow \vec{p}_{\nu i} + \vec{b}_{\nu i} = \vec{p}_{\nu i}^+$$

- le **changement d'amplitude** :

$$\mathcal{A}_{\nu i} \longrightarrow M_{\nu i} \cdot \mathcal{A}_{\nu i} = \mathcal{A}_{\nu i}^+$$

- le **changement de phase** :

$$1 \longrightarrow \exp [i \theta_{\nu i}]$$

- le **changement d'état interne** se traduisant notamment par la modification des masses au repos :

$$m_{\nu, i-1} \longrightarrow m_{\nu i}$$

avaient une expression différente de celles qui sont obtenues avec les modélisations *infiniment fine* et *ttt champ faible*. Par exemple, le changement d'impulsion centrale $\vec{b}_{\nu i}$ n'est pas rigoureusement égal à $\hbar \vec{k}_{\nu i}$, et la phase $\theta_{\nu i}$ n'est pas égale à la phase laser $\vec{k}_{\alpha i} \cdot \vec{r}_{\alpha i} - \omega_{\alpha i} \cdot t_i - \varphi_{\alpha i}$ (voir les équations 4.7). De plus, ces modifications sont valables pour les quatre paquets d'ondes principaux, ie même pour les paquets associés à des transitions atomiques sans changement d'état interne (du type $a \longmapsto a$ ou $b \longmapsto b$, où a et b désignent les deux niveaux atomiques effectifs).

Nous avons cependant déjà insisté sur le **point commun fondamental** à toutes ces modélisations des séparatrices : elles **préservent la structure des paquets d'ondes** associés aux divers chemins atomiques. Or cette continuité de structure (paquets d'ondes Gaussiens dans notre cas) est à la base du calcul précédent du signal de franges. Il est donc possible d'obtenir simplement ce signal de franges avec les modélisations *ttt champs forts*. Il suffit en effet de reprendre tous les calculs précédents (déphasage, contraste et amplitude) en considérant l'ensemble des modifications instantanées rappelées ci-dessus.

Par exemple, pour une séparatrice centrée en t_i , le paquet d'ondes associé au chemin atomique α sera modifié en t_i de la façon suivante :

$$wp_{\alpha} (t_i^-, m_{\alpha, i-1}, \vec{r}_{\alpha i}, \vec{p}_{\alpha i}, Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1}) \longrightarrow M_{\alpha i} \cdot e^{i\theta_{\alpha i}} \cdot wp_{\alpha} (t_i^+, m_{\alpha i}, \vec{r}_{\alpha i}^+, \vec{p}_{\alpha i}^+, (Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1})^+)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha i}^+ &= \vec{r}_{\alpha i} + \vec{a}_{\alpha i} \\ \vec{p}_{\alpha i}^+ &= \vec{p}_{\alpha i} + \vec{b}_{\alpha i} \\ (Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1})^+ &= Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1} + E_{\alpha i} \end{aligned}$$

où t_i^- est l'instant juste avant t_i , et t_i^+ l'instant juste après. On pourra alors toujours prendre a posteriori :

$$m_{\alpha i} = m_{\alpha, i-1}$$

pour les chemins atomiques ne subissant pas de changement d'état interne.

Il convient de remarquer que, parmi les trois différences majeures énoncées ci-dessus, seules la multiplication des chemins atomiques et la modification des largeurs complexes (en position et impulsion) changeront sensiblement la forme des résultats obtenus dans la partie précédente. En effet, on a déjà, pour ainsi dire "préparé le terrain", en démontrant nombre de propriétés valables pour un changement instantané à la fois des positions et des impulsions centrales (voir par exemple les relations 4.48, 4.49 et 4.60).

Signal de sortie

Comme dans la partie précédente, le signal de sortie $|\psi_S|^2$ (avant prise en compte de la détection et de la structure de la source atomique) est égal à la somme des signaux correspondant à chaque paire de chemins atomiques (cohérents). Plus précisément, il s'exprime sous la forme :

$$|\psi_S|^2 = \mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + \dots + 2\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\beta \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha,D}] + 2\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\gamma \cos [\Delta\phi_{\gamma\alpha,D}] + 2\mathcal{A}_\beta\mathcal{A}_\gamma \cos [\Delta\phi_{\beta\gamma,D}] + \dots$$

où les \mathcal{A}_ν sont les amplitudes finales des paquets d'ondes associés à chaque chemin atomique, et où les $\Delta\phi_{\nu\eta,D}$ sont les déphasages finaux entre les chemins.

Considérons donc deux chemins atomiques cohérents (α et β) pour lesquels on peut appliquer les résultats du paragraphe 4.1.3. Ces deux paquets d'ondes évoluent ainsi de t_1 à t_D , en enregistrant l'ensemble des modifications (listées plus haut) induites par les N séparatrices.

Si l'on considère alors les paquets d'ondes suivants à l'instant t_1^- :

$$\exp \left[\frac{im_{\nu 0}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) Y_1 X_1^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\nu 1}) \cdot \vec{p}_{\nu 1} \right]$$

avec $\nu = \alpha$ ou β , alors les deux paquets d'ondes auront pour expression au temps t_D :

$$\begin{aligned} \psi_{S\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_{\alpha D} X_1^{-1})}} \cdot \exp \left[i \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \vec{p}_{\alpha D} \right] \\ &\quad \cdot M_\alpha \exp \left[i \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{\alpha i}}{\hbar} + \theta_{\alpha i} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

et :

$$\begin{aligned} \psi_{S\beta}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_{\beta D} X_1^{-1})}} \cdot \exp \left[i \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \cdot \vec{p}_{\beta D} \right] \\ &\quad \cdot M_\beta \exp \left[i \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{\beta i}}{\hbar} + \theta_{\beta i} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\text{avec :} \quad M_\alpha := \prod_{i=1}^N M_{\alpha i} \quad \text{et} \quad M_\beta := \prod_{i=1}^N M_{\beta i}$$

La différence principale par rapport aux expressions 4.33 et 4.34 réside dans le fait que les **matrices de largeurs X et Y dépendent dans ce cas des chemins** :

$$\begin{aligned} X_D &\longrightarrow X_{\alpha D} \quad \text{et} \quad X_{\beta D} \\ Y_D &\longrightarrow Y_{\alpha D} \quad \text{et} \quad Y_{\beta D} \end{aligned}$$

et qu'il y a donc un terme en plus dans le déphasage local :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) &= \frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{\hbar} (\vec{r}_{\alpha D} \cdot \vec{p}_{\alpha D} - \vec{r}_{\beta D} \cdot \vec{p}_{\beta D}) + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{S_{\beta i}}{\hbar} + \theta_{\beta i} \right) - \left(\frac{S_{\alpha i}}{\hbar} + \theta_{\alpha i} \right) \right] \\ &\quad + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \text{Re} [Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re} [Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}] (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mu_{\beta D} - \mu_{\alpha D}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

avec $\mu_{\alpha D}$ et $\mu_{\beta D}$ définis par :

$$\boxed{\mu_{\alpha D} \text{ et } \mu_{\beta D}} : \quad \begin{cases} \rho_{\alpha D} \cdot e^{i\mu_{\alpha D}} := \det(X_{\alpha D} X_1^{-1}) \\ \rho_{\beta D} \cdot e^{i\mu_{\beta D}} := \det(X_{\beta D} X_1^{-1}) \end{cases}$$

Le signal de sortie entre les deux chemins atomiques α et β s'écrit finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta \cos[\Delta\phi_{\beta\alpha,D}]} \quad (4.69)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\alpha = M_\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_{\alpha D}}} \exp \left[-\frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \operatorname{Im}(Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}) (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \\ \mathcal{A}_\beta = M_\beta \frac{1}{\sqrt{\rho_{\beta D}}} \exp \left[-\frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \operatorname{Im}(Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}) (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \right] \end{cases}$$

Il reste maintenant à intégrer ce signal sur le volume de détection et sur les distributions statistiques décrivant la source atomique initiale. Il est également nécessaire de simplifier et d'interpréter le déphasage local $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r})$. Pour cela, nous devons exprimer les paramètres complexes $Y_{\nu D} X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D} X_1^{-1}$ en fonction des paramètres initiaux X_1 et Y_1 , ainsi que des paramètres $E_{\nu i}$ caractéristiques des séparatrices. C'est précisément l'objet de l'appendice G, dans lequel on montre par ailleurs l'importance de l'invariant symplectique suivant :

$$\widetilde{X_{\alpha D} \cdot Y_{\beta D}} - \widetilde{Y_{\alpha D} \cdot X_{\beta D}}$$

qui caractérise une paire de chemins homologues.

Expression du déphasage

Comme au paragraphe 4.3.2, le déphasage local 4.68 peut s'exprimer sous la forme d'une somme de déphasages caractéristiques :

$$\boxed{\Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{r}) = \Delta\phi_{prop} + \Delta\phi_{int} + \Delta\phi_{sep}(\vec{r}) + \Delta\phi_{sup1}} \quad (4.70)$$

avec :

1. un **déphasage de propagation** :

$$\boxed{\Delta\phi_{prop} := \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N (S_{\beta i} - S_{\alpha i})} \quad (4.71)$$

associé à l'accumulation des phases d'action le long de chaque chemin atomique,

2. un **déphasage d'interaction** :

$$\boxed{\Delta\phi_{int} := \sum_{i=1}^N (\theta_{\beta i} - \theta_{\alpha i})} \quad (4.72)$$

dû aux interactions avec les séparatrices,

3. un **déphasage de séparation** (local) :

$$\Delta\phi_{sep}(\vec{r}) := \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{\beta D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{\alpha D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{m_{\beta N}}{2\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) \text{Re}[Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1}](\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re}[Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}](\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \quad (4.73)$$

lié aux différences de position et d'impulsion finales,

4. un **déphasage supplémentaire** :

$$\Delta\phi_{sup1} := -\frac{1}{2}(\mu_{\beta D} - \mu_{\alpha D})$$

lié à la non identité des matrices $X_{\beta D}$ et $X_{\alpha D}$.

Il est alors possible de simplifier le déphasage de propagation en utilisant le théorème des quatre points finaux pour chaque tranche temporelle des deux chemins atomiques considérés (ie entre deux séparatrices successives). En effet, on a vu au paragraphe 4.3.2 comment la présence d'un invariant symplectique caractérisant chacune de ces paires de chemins homologues permettait d'exprimer la variation d'action :

$$\delta S_{i+1,i} := S_{\beta i} - S_{\alpha i}$$

d'une façon simple et très pratique :

$$\delta S_{i+1,i} = \frac{\vec{p}_{\alpha,i+1} + \vec{p}_{\beta,i+1}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta,i+1} - \vec{r}_{\alpha,i+1}) - \frac{\vec{p}_{\alpha i} + \vec{p}_{\beta i}}{2} \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) - (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) \cdot (t_{i+1} - t_i) - \hbar\omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i}$$

L'aspect pratique de cette expression venait essentiellement du fait qu'avec l'approximation *infinitement fine* ou *ttt champ faible*, les séparatrices ne modifiaient pas les positions centrales $\vec{r}_{\alpha i}$ et $\vec{r}_{\beta i}$ des paquets d'ondes pendant l'interaction. On avait alors :

$$\Delta r_i^+ = \Delta r_i \quad \text{avec :} \quad \Delta r_i^+ := \vec{r}_{\beta i}^+ - \vec{r}_{\alpha i}^+ \quad \text{et} \quad \Delta r_i := \vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}$$

et de nombreux termes se compensaient lors de l'addition des différents déphasages élémentaires du type $\delta S_{i+1,i}/\hbar$.

Dans le cadre des modélisations *ttt champs forts*, cette simplification disparaît en partie car on a :

$$\Delta r_i^+ = \Delta r_i + \Delta a_i \quad \text{avec :} \quad \Delta a_i := \vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i}$$

Finalement, en sommant toutes les contributions $\delta S_{i+1,i}$, on obtient l'expression suivante pour le **déphasage de propagation** :

$$\Delta\phi_{prop} = \frac{\vec{p}_{\alpha D} + \vec{p}_{\beta D}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] - \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2} + \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2} \right) \cdot (\vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i})$$

qui diffère de l'expression 4.58 essentiellement par le dernier terme, qui est fonction des différences $\vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i}$.

Concernant le **déphasage de séparation** $\Delta\phi_{sep}(\vec{r})$, on peut l'exprimer au point milieu final :

$$\Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D) = -\frac{\vec{p}_{\alpha D} + \vec{p}_{\beta D}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) + \frac{m_N}{8\hbar} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \text{Re} \left[Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \right] (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D})$$

et observer qu'il diffère de 4.57 par un terme dépendant quadratiquement de la différence des positions (centrales) finales

$$\Delta r_D = \vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}$$

Lorsque l'on considère l'une des modélisations *ttt champs forts* pour les séparatrices, la relation 4.59 de compensation essentielle entre $\Delta\phi_{prop}$ et $\Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D)$ se trouve donc modifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{prop} + \Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D) &= -\sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2} + \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2} \right) \cdot (\vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i}) \\ &\quad + \frac{m_N}{8\hbar} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \text{Re} \left[Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \right] \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \end{aligned}$$

ou de façon plus compacte :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{prop} + \Delta\phi_{sep}(\vec{Q}_D) &= \frac{m_N}{8\hbar} \Delta r_D \cdot \text{Re} \left[Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \right] \cdot \Delta r_D \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot \Delta r_i + \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2\hbar} + \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \right) \cdot \Delta a_i + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \end{aligned}$$

Le déphasage total au point \vec{Q}_D a par conséquent l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha, D}(\vec{Q}_D) &= \sum_{i=1}^N (\theta_{\beta i} - \theta_{\alpha i}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot \Delta r_i + \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2\hbar} + \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \right) \cdot \Delta a_i + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &\quad + \frac{m_N}{8\hbar} \Delta r_D \cdot \text{Re} \left[Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \right] \cdot \Delta r_D - \frac{1}{2} (\mu_{\beta D} - \mu_{\alpha D}) \end{aligned} \tag{4.74}$$

où la première ligne rend compte des modifications de phase dues aux interactions laser ; où la seconde rend compte essentiellement de la somme des déphasages de propagation et de séparation ; et où la dernière ligne rend compte de la non identité, au temps t_D , des matrices de largeur (dans l'espace des phases) des paquets d'ondes considérés.

Intégration sur le volume de sortie

On peut, comme au paragraphe 4.3.2, prendre en compte le **processus de détection** atomique en intégrant le signal de sortie sur un certain volume d'espace-temps :

$$S := \int_{V_D} \int_{T_D} d^3 \vec{r} \frac{dt}{T_D} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

(où V_D et T_D sont respectivement le volume et la durée de la détection).

Dans le cas particulier où cette double intégration peut se réduire à une seule intégration spatiale sur un volume de détection V_D infini, ce signal devient simplement égal à :

$$S := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \psi_S(\vec{r}, t) \cdot \psi_S^*(\vec{r}, t)$$

auquel on peut appliquer le théorème du point milieu généralisé (voir paragraphe 4.3.2).

En effet, selon les expressions 4.66 et 4.67, le signal élémentaire qu'il suffit d'intégrer s'écrit sous la forme :

$$\psi_{S\beta}(\vec{r}) \cdot \psi_{S\alpha}^*(\vec{r}) = M_\beta \cdot M_\alpha \sqrt{\frac{\det([X_{\alpha D} X_1^{-1}]^*)}{\det(X_{\beta D} X_1^{-1})}} \cdot \exp[\lambda(\vec{r})]$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{r}) := & i \frac{m_{\beta N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_{\beta D}) - i \frac{m_{\alpha N}}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) [Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}]^* (\vec{r} - \vec{r}_{\alpha D}) \\ & + \frac{i}{\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \cdot (\vec{r} - \vec{Q}_D) + i \Delta\phi_{\beta\alpha}^- \end{aligned}$$

où $\Delta\phi_{\beta\alpha}^-$ est défini de la façon suivante (en analogie avec le déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha}$ introduit au paragraphe 4.3.2) :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha}^- := \Delta\phi_{prop} + \Delta\phi_{int} - \frac{\vec{p}_{\alpha D} + \vec{p}_{\beta D}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) + \Delta\phi_{sup1}$$

ie :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha}^- = & - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}) + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) - (\theta_{\beta i} - \theta_{\alpha i}) \right] \\ & - \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2} + \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2} \right) \cdot (\vec{a}_{\beta i} - \vec{a}_{\alpha i}) - \frac{1}{2} (\mu_{\beta D} - \mu_{\alpha D}) \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que le *déphasage local* précédent $\Delta\phi_{\beta\alpha, D}(\vec{r})$ pris au point milieu final \vec{Q}_D , auquel on a retranché le terme dépendant de $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$:

$$\Delta\phi_{\beta\alpha}^- = \Delta\phi_{\beta\alpha, D}(\vec{Q}_D) - \frac{m_N}{8\hbar} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \cdot \text{Re} [Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}] \cdot (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D})$$

(on a utilisé le fait que les masses finales $m_{\alpha N}$ et $m_{\beta N}$ sont égales)

Les paramètres du **théorème du point milieu généralisé** rappelé au paragraphe 4.3.2 s'écrivent alors comme :

$$\begin{aligned} A &= i \frac{m_N}{\hbar} Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} \\ B &= -i \frac{m_N}{\hbar} (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* \\ \vec{a} &= \vec{r}_{\beta D} \\ \vec{b} &= \vec{r}_{\alpha D} \\ \vec{\alpha} &= \frac{i}{2\hbar} (\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}) \\ \vec{\beta} &= \vec{\alpha} \end{aligned}$$

où l'on observe que A et B ne sont plus liés par une simple relation de conjugaison (ils dépendent maintenant du chemin considéré).

L'application du *théorème du point milieu généralisé* conduit alors à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \, \psi_{S\beta}(\vec{r}) \cdot \psi_{S\alpha}^*(\vec{r}) \\ &= M_\beta \cdot M_\alpha \frac{1}{\sqrt{\det(X_{\beta D} X_1^{-1} \cdot [X_{\alpha D} X_1^{-1}]^*)}} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[im_N [(Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}]]}} \\ & \quad \exp[i \Delta\phi_{\beta\alpha}^-] \cdot \exp\left[-\frac{im_N}{2\hbar} \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D})\right)\right] \\ & \quad \cdot \left(Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^*\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D})\right) \end{aligned}$$

Le **déphasage final, après processus de détection**, sera donc constitué de **3 termes** :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \Delta\phi_{\beta\alpha}^- + \Delta\phi_{\text{sup } 2} + \Delta\phi_{\text{sup } 3}$$

(4.75)

où $\Delta\phi_{\text{sup } 2}$ est égal à l'argument du nombre complexe de la deuxième ligne :

$$\Delta\phi_{\text{sup } 2} := \arg \left\{ \frac{1}{\sqrt{\det(X_{\beta D} X_1^{-1} \cdot [X_{\alpha D} X_1^{-1}]^*)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det[im_N [(Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}]]}} \right\}$$

et où $\Delta\phi_{\text{sup } 3}$ est la partie réelle dans l'exposant du dernier terme :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{sup } 3} \quad : \quad &= -\frac{m_N}{2\hbar} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \right. \\ & \quad \cdot \left(Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* \right)^{-1} \cdot \left. \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \right\} \end{aligned}$$

Dans le cadre des modélisations *infiniment fine* et *ttt champ faible*, ces deux déphasages supplémentaires sont nuls (voir paragraphe 4.3.2), mais ici, du fait que :

$$Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} \neq Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$$

ils ne s'annulent pas et doivent être pris en compte.

Il est alors possible d'exprimer le signal de sortie complet (pour un interféromètre élémentaire, ie avec deux chemins atomiques seulement) :

$$S := S_1 \cdot (1 + e^{-\eta} \cdot \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}]) \quad (4.76)$$

avec l'**amplitude** :

$$S_1 = \frac{M_\alpha^2}{|\det(X_{\alpha D} X_1^{-1})|} \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[2 \operatorname{Im}[m_N Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}]]}} + \frac{M_\beta^2}{|\det(X_{\beta D} X_1^{-1})|} \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[2 \operatorname{Im}[m_N Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}]]}} \quad (4.77)$$

et le **facteur de contraste** :

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (4.78)$$

où :

$$\eta_1 = \frac{m_N}{2\hbar} \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \cdot \left(Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_N} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right) \right\}$$

et :

$$\eta_2 := -\ln \left[\frac{2M_\beta \cdot M_\alpha (2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{|\det(X_{\beta D} X_1^{-1} \cdot [X_{\alpha D} X_1^{-1}]^*)|} \cdot \sqrt{|\det[im_N [(Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* - Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}]]|}} / S_1 \right]$$

Toutes ces quantités (déphasage, contraste et amplitude) s'expriment alors en fonction :

– des **matrices caractéristiques finales** étudiées au paragraphe G :

$$\begin{cases} X_{\alpha D} X_1^{-1} \\ X_{\beta D} X_1^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \\ Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \\ Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^* \end{cases}$$

– de la **différence des impulsions finales** :

$$\Delta p_D := \vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}$$

– de la **différence des positions finales** :

$$\Delta r_D := \vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}$$

Ces différences finales, déjà déterminées à la fin du paragraphe 4.3.2 (relations 4.48 et 4.49 prises au temps t_D), s'écrivent :

$$\Delta r_D = \overrightarrow{r_{\beta D}} - \overrightarrow{r_{\alpha D}} = \sum_{i=1}^N \left[A_{Di} \cdot (\overrightarrow{a_{\beta i}} - \overrightarrow{a_{\alpha i}}) + B_{Di} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{b_{\beta i}}}{m_{\beta i}} - \frac{\overrightarrow{b_{\alpha i}}}{m_{\alpha i}} \right) \right] \quad (4.79)$$

et :

$$\Delta p_D = \overrightarrow{p_{\beta D}} - \overrightarrow{p_{\alpha D}} = m_N \sum_{i=1}^N \left[C_{Di} \cdot (\overrightarrow{a_{\beta i}} - \overrightarrow{a_{\alpha i}}) + D_{Di} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{b_{\beta i}}}{m_{\beta i}} - \frac{\overrightarrow{b_{\alpha i}}}{m_{\alpha i}} \right) \right] \quad (4.80)$$

On remarque qu'elles diffèrent nettement (notamment par la présence des termes en $\overrightarrow{a_{\beta i}} - \overrightarrow{a_{\alpha i}}$) des relations obtenues avec les modélisations *infinitement fine* et *ttt champ faible*.

Signal de franges et conclusion

Le signal de sortie obtenu ne concerne que deux chemins atomiques, et ne prend pas en compte la modélisation de la source atomique. Pour obtenir le signal de franges, il faut donc non seulement **sommer les différentes contributions finales** (correspondant à chaque paire de chemins atomiques cohérents), mais également **intégrer le signal sur les distributions statistiques** décrivant le nuage atomique initial (voir partie 4.1.1).

La première de ces opérations (somme des signaux élémentaires) dépend du nombre de chemins atomiques présents, ie du nombre de séparatrices présentes, et par conséquent de l'interféromètre considéré. Nous ne détaillerons pas d'avantage ce point, mais l'illustrerons sur un cas particulier dans la partie 5.2.

Quant à la seconde opération (intégration sur les distributions statistiques), elle a été détaillée au paragraphe 4.3.2 pour les modélisations *infinitement fine* et *ttt champ faible*. Le fait de considérer l'une des modélisations *ttt champs forts* ne modifie alors pas le type de calculs effectués dans ce paragraphe (intégrations Gaussiennes sur les position et impulsion centrales du paquet d'ondes initial). En effet, la structure des paquets d'ondes est préservée pour toutes ces modélisations, et les calculs dont on parle s'appuient précisément sur la structure Gaussienne des paquets d'ondes et des distributions statistiques. Nous ne référons donc pas ces calculs qui mènent finalement au **signal de franges** :

$$\tilde{S} := \int \mathcal{D}_{\vec{r}_0} \int \mathcal{D}_{\vec{p}_0} S(\vec{r}_0, \vec{p}_0, Z_0) = \tilde{S}_0 \cdot \left(1 + e^{-\tilde{\eta}} \cdot \cos \left[\widetilde{\Delta \phi_{\beta\alpha}} \right] \right) \quad (4.81)$$

Nous venons de montrer comment déterminer le signal de sortie (et plus généralement le signal de franges) d'un interféromètre atomique dans le cas où l'on considère une modélisation plus complète des séparatrices atomiques (*modélisation ttt champs forts*). Nous avons vu en particulier quelles étaient les conséquences, sur le déphasage final, de la prise en compte de la structuration des paquets d'ondes initiaux (établie au chapitre 3) à chaque interaction avec une séparatrice.

Toutes ces résultats analytiques nécessitent maintenant d'être illustrés par des exemples concrets, afin de quantifier les différences entre modélisations. Nous allons donc appliquer l'ensemble des résultats détaillés dans les deux dernières parties à des interféromètres atomiques particuliers. La plupart des

calculs seront effectués à partir des expressions obtenues dans la partie 4.3.2, et ils montreront la puissance du formalisme ABCD pour traiter plusieurs effets inertiels et gravitationnels simultanés. L'influence des modélisations *ttt champs forts* et de l'effet Borrmann qui en découle seront, quant à eux, illustrés sur un seul exemple, et essentiellement à l'aide de diagrammes (voir partie 5.2).

Chapitre 5

Applications

Ce chapitre est destiné à illustrer les modélisations établies au chapitre précédent, et à montrer comment appliquer les différentes formules, de déphasage et de signal de franges, à des cas concrets d'interféromètres atomiques. Il fait ainsi le lien fondamental entre théorie, modélisation et expérience.

On insistera en particulier sur la *méthode générale de modélisation* d'un interféromètre atomique quelconque, en en donnant les clefs principales, mais également les étapes intermédiaires, pour permettre à tout lecteur intéressé d'adapter cette modélisation à l'interféromètre de son choix (en sachant, par exemple, quelle formule du déphasage utiliser pour un type particulier de géométrie, de séparatrices et de champs extérieurs...). Bien qu'un effort ait été fourni pour permettre une compréhension générale et une lecture la plus autonome possible de ce chapitre, la mise en oeuvre pratique des résultats qu'il présente appelle cependant une connaissance préalable des théories développées dans les chapitres précédents

Cette méthode sera alors appliquée au cas des interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques (géométrie de Mach-Zehnder). En effet, comme on l'a vu dans l'introduction, ce type d'interféromètre - dont la géométrie est la plus simple des géométries fermées - est très utilisé actuellement, que ce soit en tant que gyromètre, gravimètre, gradiomètre ou autres (possible détecteur d'ondes gravitationnelles), et il est fondamental de savoir le modéliser de la façon la plus fine et complète possible.

Pour cela, nous avons vu au chapitre précédent comment rendre compte de nombreux effets qui n'étaient jusqu'à maintenant pas considérés (ou pris en compte de façon erronée), parmi lesquels :

- le traitement exact et simultané de multiples champs inertiels et gravitationnels,
- l'intégration du signal de sortie sur les distributions statistiques réelles de la source atomique et sur le volume de détection,
- la prise en compte de la structuration dispersive des paquets d'ondes atomiques par les séparatrices.

Le signal de franges obtenu par cette approche générale est cependant souvent complexe. Il semble donc judicieux de progresser par paliers, en incluant petit à petit ces différents effets dans le signal, et en détaillant leur influence respective.

Dans un premier temps, nous analyserons donc le signal de franges obtenu dans le cadre de la *modélisation ttt champ faible* des séparatrices (voir parties 4.1.2 et 4.3.2). Nous détaillerons en particulier l'expression analytique du déphasage global, discuterons de sa richesse, et verrons comment retrouver simplement les résultats antérieurs (exacts ou perturbatifs).

Dans un deuxième temps, nous améliorerons le modèle en utilisant la version "champs forts" de la modélisation *ttt* des séparatrices, et examinerons quelles sont les modifications que cela induit sur le signal de franges (influence de la multiplication des trajectoires et de l'effet Borrmann). Nous détaillerons plus particulièrement les corrections du déphasage qu'entraîne la prise en compte de l'effet Borrmann pour un tel interféromètre atomique de Ramsey-Bordé symétrique.

Enfin, après avoir étudié en détail cette géométrie particulière, nous dirons quelques mots sur l'application de la modélisation précédente au cas des autres géométries couramment utilisées : horloges

atomiques en fontaine, horloges optiques de Ramsey-Bordé asymétriques, interféromètre atomique à forte dissymétrie (utilisé pour la mesure de α) ...

5.1 Méthode générale de modélisation

Nous avons déjà vu la portée de la modélisation des interféromètres atomiques du chapitre précédent. Ainsi, cette modélisation est valable pour :

- tout type de géométrie d'interféromètre (fermée ou non, symétrique ou asymétrique, avec un nombre quelconque de séparatrices...)
- tous types de séparatrices, spatiales et temporelles, dans le cadre de l'approximation à deux ondes (avec les modélisations infiniment fine et ttt champ faible pour les deux types de séparatrices, et avec la modélisation ttt champ fort généralisée pour les séparatrices temporelles)
- tout type de source atomique (sources thermiques, froides, ultra-froides) et/ou pour tout type de paquet d'ondes initial
- plusieurs modes de détection (par nappe ou par détection instantanée de l'ensemble des atomes sortant)
- tous types de champs extérieurs dont l'effet peut s'écrire sous forme d'un Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion (accélération, rotation, champ de gravité, ondes gravitationnelles, potentiel harmonique quelconque...)

En outre, les formules exprimant le signal de franges sont obtenues de façon non-perturbative et permettent d'avoir accès à divers effets d'ordre supérieur de manière perturbative (gardient de gradient d'accélération ou de gravité par exemple, rotation non-uniforme...).

Plusieurs autres effets sont également pris en compte :

- la structuration dispersive des séparatrices, avec multiplication du nombre de chemins atomiques cohérents et modification non-triviale des paquets d'ondes associés
- la présence de deux masses effectives différentes correspondant aux deux niveaux internes atomiques (responsable du terme d'horloge)
- les corrections relativistes (responsables de l'effet Doppler du second ordre)

bien qu'ils puissent être négligés dans une première approche.

Toutefois, de nombreux effets ne sont pas pris en compte. Il s'agit entre autres :

- de l'effet des séparatrices spatiales hors du régime de Bragg (régime de Kapitza-Dirac avec plus de deux ordres de diffraction) et de toute autre séparatrice dont la modélisation ne peut pas être réduite à celle décrite dans ce mémoire (approximation à deux ondes)
- des effets dus à la quantification du champ servant de séparatrice (Hamiltonien quantique de Jaynes-Cummings par exemple)
- de l'effet dû aux divers processus de relaxation connus (collisions, désexcitation spontanée, interaction avec d'autres potentiels...)
- des effets liés au spin des ondes de matières considérées

Il est donc nécessaire, avant toute utilisation de la modélisation générale du chapitre précédent, de savoir si l'un des effets négligés ci-dessus est important pour l'expérience à modéliser. Dans le cas contraire, ou si l'on peut tenir compte phénoménologiquement de certains de ces effets, il est possible d'utiliser les formules de signal de franges détaillées dans les parties 4.3.2 et 4.3.3.

Cependant, ces expressions peuvent être complexes dans le cas le plus général, et il est important de déterminer quelle est la formule du signal de franges la plus pertinente pour un interféromètre atomique particulier et pour un niveau d'exigence et de précision donné.

D'autre part, ces formules dépendent de nombreux paramètres propres à chaque interféromètre atomique (paramètres géométriques par exemple), qu'il est impératif de repérer rapidement pour exprimer plus facilement le signal de franges (d'importantes simplifications apparaissent dans le cas d'une géométrie symétrique par exemple, voir paragraphe 4.3.2).

Enfin, l'effet des divers champs inertiels et gravitationnels est pris en compte uniquement à travers les matrices $ABCD$ (détaillées au chapitre 2) : il est donc nécessaire d'obtenir une expression explicite de ces matrices en fonction de ces champs extérieurs.

La méthode générale de modélisation des interféromètres atomiques peut alors s'articuler en huit étapes où l'on précise successivement :

1. le type de séparatrices considéré
2. le nombre d'interactions effectives
3. le nombre de chemins atomiques cohérents
4. les caractéristiques des séparatrices
5. le mode de détection employé en sortie
6. les caractéristiques de la source atomique
7. la géométrie de l'interféromètre considéré
8. l'expression des matrices $ABCD$

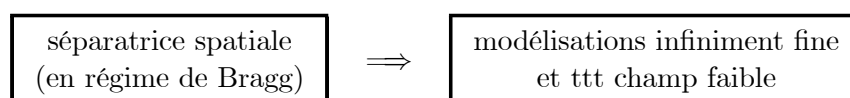
Chacun de ces points est exposé schématiquement ci-dessous (en précisant, pour chaque cas, le paragraphe et les équations du mémoire correspondant).

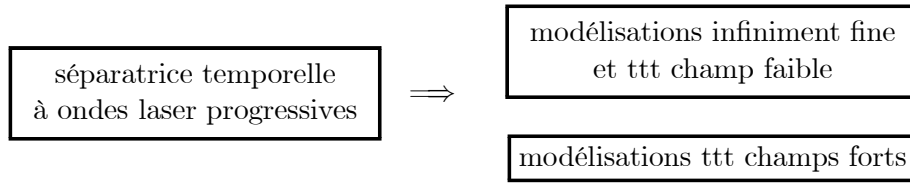
1. Quel est le type de séparatrice considéré ?

On a vu dans la partie 3.2 qu'il existe de multiples façons de réaliser une séparatrice pour ondes atomiques. Deux cas principaux se présentent alors :

- si la séparatrice est spatiale (avec ondes laser stationnaires ou microstructures matérielles), il est alors nécessaire d'examiner son régime de fonctionnement. Les deux régimes extrêmes sont les suivants :
 - régime de Kapitza-Dirac lorsque la séparatrice est suffisamment fine (présence de plusieurs ordres de diffraction mettant en défaut l'approximation à deux ondes). Ce cas se traite généralement en faisant l'approximation de Raman-Nath, qui consiste à négliger l'effet de la séparatrice sur le mouvement externe des atomes pendant la traversée de la séparatrice (supposée très courte). La séparatrice est alors équivalente à un réseau de phases, et son effet peut être modélisé de plusieurs façons [246, 247, 34].
 - régime de Bragg lorsque deux ordres de diffraction seulement sont peuplés (approximation à deux ondes). Dans ce cas, on peut utiliser l'une des modélisations simplifiées de la partie 4.1.2 : *modélisations infiniment fine* et *ttt champ faible*.
- si la séparatrice est temporelle (avec deux niveaux effectifs couplés par une onde laser progressive équivalente), on peut alors utiliser au choix l'une des modélisations simplifiées (infiniment fine ou ttt champ faible) ou l'une des modélisations ttt champ fort généralisées (appelée aussi modélisations ttt champs forts).

On obtient finalement le schéma suivant :





Le signal de franges issu des modélisations infiniment fine et ttt champ faible est alors donné par les expressions :

- 4.37, avec le déphasage (local) donné en 4.30 \rightarrow **avant** prise en compte du processus de détection et des distributions statistiques décrivant la source atomique
- 4.42, avec le déphasage donné en 4.41, l'amplitude donnée en 4.45 et le contraste donné en 4.44 \rightarrow **après** intégration du signal précédent sur le volume de détection supposé infini, mais **avant** prise en compte des distributions statistiques décrivant la source atomique
- 4.62 (avec déphasage, amplitude et contraste) \rightarrow **après** intégration du signal précédent sur le volume de détection **et** sur les distributions statistiques décrivant la source atomique

Le signal de franges issu des *modélisations ttt champs forts* est quant à lui donné par les expressions :

- 4.69, avec le déphasage (local) donné en 4.70 \rightarrow **avant** prise en compte du processus de détection et des distributions statistiques décrivant la source atomique
- 4.76, avec le déphasage donné en 4.75, l'amplitude donnée en 4.77 et le contraste donné en 4.78 \rightarrow **après** intégration du signal précédent sur le volume de détection supposé infini, mais **avant** prise en compte des distributions statistiques décrivant la source atomique
- 4.81 \rightarrow **après** intégration du signal précédent sur le volume de détection **et** sur les distributions statistiques décrivant la source atomique

Ces expressions dépendent de nombreuses quantités (voir par exemple les relations 4.41 ou 4.75) :

$$N, t_i, \vec{Q}_i, \vec{a}_{\nu i}, \vec{b}_{\nu i}, M_{\nu i}, \theta_{\nu i}, E_{\nu i}, m_{\nu i}, V_D, T_D, \vec{R}_0, \vec{P}_0, U_0, V_0, Z_0 \dots$$

liées à la géométrie particulière de l'interféromètre, aux modélisations des séparatrices, au mode de détection considéré et aux caractéristiques de la source atomique.

Ce sont ces quantités qu'il faut maintenant préciser.

2. Quel est le nombre d'interactions effectives ?

Le nombre N , qui est la première quantité de la liste précédente, est en fait égal au nombre d'instants centraux associés aux interactions instantanées équivalentes de la partie 4.1.2.

Dans le cas de séparatrices temporelles, ce nombre est simplement égal au nombre n de séparatrices présentes :

séparatrices temporelles :	$N = n$
----------------------------	---------

Dans le cas spatial par contre, ce nombre N peut être supérieur au nombre de séparatrices, du fait que les différents paquets d'ondes sortant d'une séparatrice n'ont pas la même impulsion centrale, et qu'ils n'atteignent donc pas la zone spatiale de la séparatrice suivante au même instant (voir paragraphe 4.1.2).

On obtient finalement un nombre N compris entre n et $2n - 1$:

séparatrices spatiales :	$N \in [n, 2n - 1]$
--------------------------	---------------------

3. Quel est le nombre de chemins atomiques cohérents ?

Dans la suite logique de l'étape précédente, il s'agit désormais d'identifier le nombre de chemins atomiques distincts formant l'interféromètre. On a vu en effet que le nombre de bras atomiques pouvait être supérieur à deux lorsque l'on prenait en compte la structuration dispersive des séparatrices. En fait, dans le cadre de la modélisation ttt champs forts des séparatrices, il y a deux fois plus de paquets d'ondes créés par une séparatrice qu'avec l'une ou l'autre des modélisations simplifiées du paragraphe 4.1.2. Ceci implique qu'il y a généralement deux fois plus de chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre (et ceci après chaque séparatrice) :

$$N_{cac} := \begin{array}{c} \text{nombre de chemins} \\ \text{atomiques cohérents} \end{array} = \begin{cases} 2 & \text{avec les modélisations infiniment fine et ttt champ faible} \\ 2^{n+1} & \text{avec les modélisations ttt champs forts} \end{cases}$$

où n est le nombre de séparatrices présentes.

Comme on l'a déjà souligné, le signal de sortie total est alors égal à la somme des signaux de sortie de chaque interféromètre élémentaire formé par deux des chemins atomiques précédents. Plus précisément, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} |\psi_S|^2 &= \left| \mathcal{A}_\alpha e^{i\phi_\alpha} + \mathcal{A}_\beta e^{i\phi_\beta} + \mathcal{A}_\gamma e^{i\phi_\gamma} + \dots \right|^2 \\ &= \mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + \dots \\ &\quad + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta \cos[\phi_\alpha - \phi_\beta] + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\gamma \cos[\phi_\alpha - \phi_\gamma] + 2\mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\gamma \cos[\phi_\beta - \phi_\gamma] + \dots \\ &= (\mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta \cos[\phi_\alpha - \phi_\beta]) + (\mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + 2\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\gamma \cos[\phi_\alpha - \phi_\gamma]) \\ &\quad + (\mathcal{A}_\beta^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + 2\mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\gamma \cos[\phi_\beta - \phi_\gamma]) + \dots - (\mathcal{A}_\alpha^2 + \mathcal{A}_\beta^2 + \mathcal{A}_\gamma^2 + \dots) \end{aligned}$$

ie aussi :

$$|\psi_S|^2 = \sum_{i=1}^{C_2^{N_{cac}}} (\text{signaux élémentaires}) - (N_{cac} - 2) \left(\sum_{i=1}^{N_{cac}} \mathcal{A}_i^2 \right)$$

où :

$$C_2^{N_{cac}} = \frac{1}{2} N_{cac} \cdot (N_{cac} - 1)$$

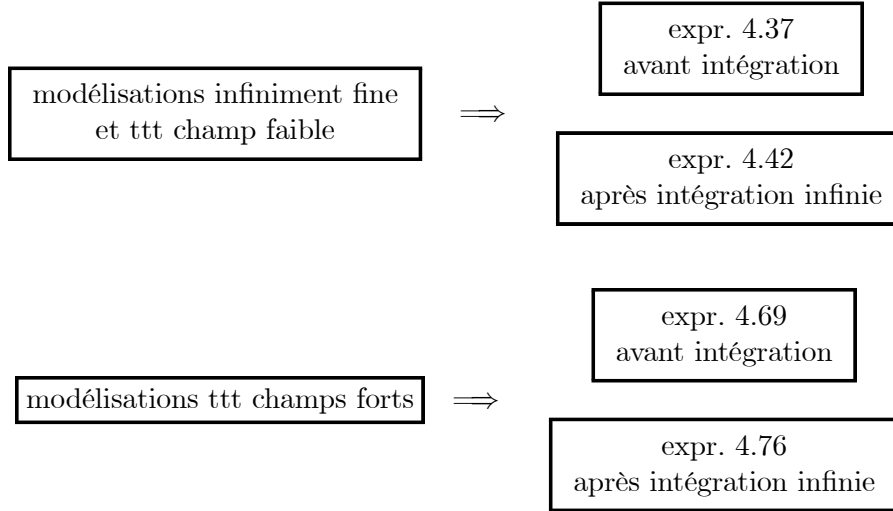
est égal au nombre de signaux élémentaires qu'on peut former avec N_{cac} chemins atomiques cohérents, et où les \mathcal{A}_i sont les amplitudes finales des paquets d'ondes associés aux divers chemins atomiques (exceptionnellement, nous avons employé un indice latin pour désigner les chemins atomiques).

Exemple : s'il y a $n = 3$ séparatrices, il y aura $N_{cac} = 2^{3+1} = 16$ chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre, et donc $C_2^{N_{cac}} = 120$ signaux élémentaires à sommer.

4. Quel est le mode de détection utilisé ?

Il est en effet important de savoir si on peut approximer le processus de détection par une intégration spatiale du signal de sortie (expressions 4.37 ou 4.69) sur l'espace tout entier (interrogation instantanée de tous les atomes sortants), ou s'il faut restreindre cette intégration à un certain volume fini V_D d'espace (interrogation instantanée d'une partie des atomes) ou à un certain volume d'espace-temps (interrogation par nappe 2D pendant le temps T_D).

Selon le type de modélisation des séparatrices, on obtient ainsi :



où les signaux de sortie avant intégration dépendent du vecteur position et peuvent être intégrés sur le volume d'espace-temps voulu (numériquement par exemple).

5. Quelles sont les caractéristiques de la source atomique ?

Il y a deux groupes de données concernant la source atomique (voir le paragraphe 4.1.1) :

- les données décrivant la source entière, que l'on peut mesurer expérimentalement, et qui interviennent dans l'expression des distributions statistiques associées :

\vec{R}_0 : position centrale du nuage atomique à l'instant t_0
 \vec{P}_0 : impulsion centrale du nuage atomique à l'instant t_0
 U_0 : matrice de dispersion en position du nuage atomique à l'instant t_0
 V_0 : matrice de dispersion en impulsion du nuage atomique à l'instant t_0

- les données décrivant un des paquets d'ondes typiques du mélange statistique précédent :

\vec{r}_0 : sa position centrale (à l'instant t_0)
 \vec{p}_0 : son impulsion centrale (à l'instant t_0)
 $\frac{i}{\hbar m_0} X_0 Y_0^{-1}$: sa matrice de largeur complexe en impulsion
 m_0 : la masse effective associée

(pour plus de précisions concernant les notations, voir le paragraphe 2.3.3).

En fait, on a vu au paragraphe 4.1.1 que l'on pouvait relier certaines données d'un groupe avec celles de l'autre groupe. Ainsi, on en a conclu qu'il était pertinent de ne considérer qu'une seule distribution

sur les positions centrales \vec{r}_0 des paquets d'ondes, en incorporant la distribution en impulsion dans la définition de la largeur en impulsion du paquet d'onde ¹ :

$$\begin{aligned} \frac{2i}{\hbar m_0} X_0 Y_0^{-1} &= V_0 \\ \vec{p}_0 &= \vec{P}_0 \end{aligned}$$

(ce qui revient à considérer des paquets d'ondes d'extension égale à la longueur de cohérence du nuage atomique initial).

Cette conclusion n'est cependant valable que dans le cas où il n'y a pas de réseau optique sous-jacent avec piégeage des atomes dans des puits de potentiel microscopiques et présence d'effet Sisyphe (voir le paragraphe 4.1.1). Dans le cas contraire, il semble plus pertinent de considérer une distribution des niveaux d'énergie des atomes piégés (dans ces minima de potentiel), ainsi qu'une distribution sur la position de ces minima (ie finalement de \vec{r}_0).

En dehors de ce cas particulier, il est possible de décrire la source atomique sous la forme d'un mélange statistique de paquets d'ondes du type :

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \cdot \exp \left[i \frac{m_0}{2\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{p}_0 \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} i \frac{m_0}{2\hbar} Y_0 X_0^{-1} &= -\frac{1}{\hbar^2} V_0^{-1} \\ \vec{p}_0 &= \vec{P}_0 \end{aligned}$$

où \vec{P}_0 et V_0 sont l'impulsion centrale du nuage atomique initial et sa dispersion en impulsion (mesurée par temps de vol par exemple), et où \vec{r}_0 obéit à une distribution statistique Gaussienne centrée en \vec{R}_0 et de largeur donnée par la relation 4.6 (directement reliée à l'extension réelle du nuage mesurée par imagerie).

L'intégration du signal de sortie sur ces distributions statistiques est décrite en détail au paragraphe 4.3.2 dans le cadre des modélisations infiniment fine ou ttt champ faible des séparatrices. Le signal de franges après intégration est alors donné par l'expression 4.62.

Ce calcul n'est pas effectué dans le cas des modélisations ttt champs forts, mais il est de même nature.

6. Quelle est la géométrie de l'interféromètre ?

L'appellation "géométrie de l'interféromètre" recouvre ici essentiellement deux aspects :

- la structure temporelle de l'interféromètre, ie les différents temps de vol

$$T_i = t_{i+1} - t_i$$

des atomes entre les séparatrices

- les relations particulières entre les vecteurs d'ondes $\vec{k}_{\nu i}$ qui contrôlent la forme de l'interféromètre.

¹Il est à remarquer que l'on peut toujours garder une distribution statistique sur les impulsions centrales \vec{p}_0 pour rendre compte d'une imprécision due au lancement non parfait des atomes au temps t_0 .

Par exemple, dans le cas d'un interféromètre élémentaire à géométrie symétrique, on a la relation :

$$\vec{k}_{\alpha i} + \vec{k}_{\beta i} = \vec{0}$$

pour tout i entre 2 et $N - 1$, ce qui permet de simplifier grandement l'expression du déphasage final (voir la fin du paragraphe 4.3.2).

7. Quelles sont les caractéristiques des séparatrices ?

Comme pour le point n° 2, ce sont en fait les caractéristiques des interactions instantanées équivalentes (appelées aussi "effectives") que l'on cherche à connaître, soit, pour chaque chemin atomique indicé par ν et pour chaque interaction effective indicée par i :

- le changement de position centrale :

$$\vec{r}_{c\nu i} \longrightarrow \vec{r}_{c\nu i} + \vec{a}_{\nu i}$$

- le changement d'impulsion centrale :

$$\vec{p}_{c\nu i} \longrightarrow \vec{p}_{c\nu i} + \vec{b}_{\nu i}$$

- le changement de phase globale :

$$1 \longrightarrow \exp [\theta_{\nu i}]$$

- le changement d'amplitude globale :

$$\mathcal{A}_{\nu i} \longrightarrow M_{\nu i} \cdot \mathcal{A}_{\nu i}$$

- le changement de masse effective :

$$m_{\nu, i-1} \longrightarrow m_{\nu i}$$

- le changement des largeurs (matricielles) en position et impulsion :

$$Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1} \longrightarrow Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i}$$

Certaines de ces quantités se simplifient beaucoup dans le cas des *modélisations infiniment fine et ttt champ faible* :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\nu i} &= \vec{0} \\ E_{\nu i} &= 0 \end{aligned}$$

les autres quantités dépendant de la modélisation simplifiée considérée (voir le paragraphe 4.1.2).

Dans le cas des *modélisations ttt champs forts*, ces quantités sont explicitement données dans la partie 4.1.2.

8. Quelle est l'expression des matrices ABCD ?

Parmi toutes les quantités dont dépend le signal de franges obtenu précédemment, une seule catégorie reste à connaître : les matrices $ABCD$. Ces matrices sont très importantes car elles sont généralement liées aux effets que l'on cherche à mesurer (rotation, accélération...) ou à éliminer (gravité et gradient de gravité, gradients d'accélération, rotation terrestre...).

Les matrices $ABCD$ interviennent en fait de deux façons différentes dans le signal de franges :

- explicitement (dans l'amplitude du signal par exemple, voir la relation 4.45)
- implicitement, dans l'expression :
 - des points milieux :

$$\vec{Q}_i$$

(voir les relations 4.60 dans le cas général, 4.61 lorsque l'on considère les modélisations infiniment fine ou ttt champ faible des séparatrices, ou encore 4.65 lorsque l'interféromètre est à géométrie symétrique)

- des différences finales en position et impulsion :

$$\Delta p_D \quad \text{et} \quad \Delta p_D$$

(données respectivement en 4.50 et 4.51)

- des positions et impulsions centrales :

$$\vec{r}_1 \quad \text{et} \quad \vec{p}_1$$

des paquets d'ondes initiaux pris à l'instant central t_1 de la première séparatrice. Ces quantités au temps t_1 sont en effet reliées à celles au temps t_0 (ie à l'instant de lancement des atomes dans l'interféromètre) via les matrices $ABCD$ prises entre t_0 et t_1 (voir le début du paragraphe 4.3.2). Il en est de même pour les matrices de largeur $Y_1 X_1^{-1}$ et $Y_0 X_0^{-1}$.

Les matrices $ABCD$ s'expriment alors en fonction des différents termes de l'Hamiltonien H_{ext} défini dans la partie 2.1 (Hamiltonien au plus quadratique en position et impulsion et dépendant du temps).

Une expression analytique de ces matrices est donnée :

- dans certains cas particuliers importants (rotation seule, gravité uniforme seule [ou accélération], gravité avec gradient de gravité [ou d'accélération], ondes gravitationnelles...), dans la partie 2.2,
- dans le cas plus général où l'Hamiltonien est au plus quadratique, mais indépendant du temps, dans l'appendice D.

Il est également possible d'obtenir des développements de Taylor des matrices $ABCD$ (voir l'appendice C) plus faciles à manipuler que les expressions complexes de l'appendice D.

Le travail ne s'arrête cependant pas là, car il faut encore relier les termes de H_{ext} , ie

$$\alpha(t) , \beta(t) , \gamma(t) , f(t) , g(t)$$

aux vrais potentiels inertiels et gravitationnels. Ce point est important car H_{ext} est souvent obtenu en prenant un développement limité (à l'ordre 2) d'un potentiel $V(\vec{r})$ en un point particulier de l'espace (par exemple, le champ de gravité en un point de la surface terrestre), et il peut y avoir des différences entre les termes linéaires f et g de H_{ext} et les potentiels usuels (ce point est illustré pour le champ de gravitation terrestre dans l'appendice E).

Conclusion :

Nous venons de décrire les étapes principales qu'il est nécessaire d'examiner pour pouvoir utiliser efficacement la modélisation des interféromètres atomiques établie au chapitre précédent.

Une fois ces 8 étapes validées, nous avons alors tous les ingrédients pour calculer explicitement le déphasage, le contraste et l'amplitude associés à l'un des interféromètres élémentaires décrits au point $n^{\circ} 3$ (cet interféromètre constitue en fait l'interféromètre total dans le cas des modélisations infiniment fine ou ttt champ faible des séparatrices).

Après avoir sommé les contributions de chacun de ces interféromètres élémentaires, nous obtenons ainsi une expression analytique pour le signal de franges total (les franges étant en fait obtenues lorsqu'un des paramètres vus plus haut varie, artificiellement ou non), que l'on peut comparer au signal expérimental pour déterminer la quantité recherchée (rotation, accélération, fréquence...).

Nous pouvons maintenant appliquer cette méthode aux interféromètres atomiques décrits dans l'introduction et dans la partie 4.2.1 : gyromètres atomiques, gradio-gravimètres, horloges optiques ou micro-ondes... Ce mémoire ne traite cependant pas en détail chacune des géométries particulières associées à ces appareils. Nous ne détaillerons qu'une seule géométrie : la géométrie dite de Mach-Zehnder (en référence aux interféromètres optiques du même nom), qui est la plus simple des géométries fermées, et qui est utilisée dans de nombreux interféromètres atomiques (gyromètre, gravimètre...), existants ou en projet (projet spatial HYPER par exemple [76]).

5.2 Interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques

Considérons un interféromètre à géométrie Mach-Zehnder (appelé également interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique) comme celui représenté sur la figure 5.1.

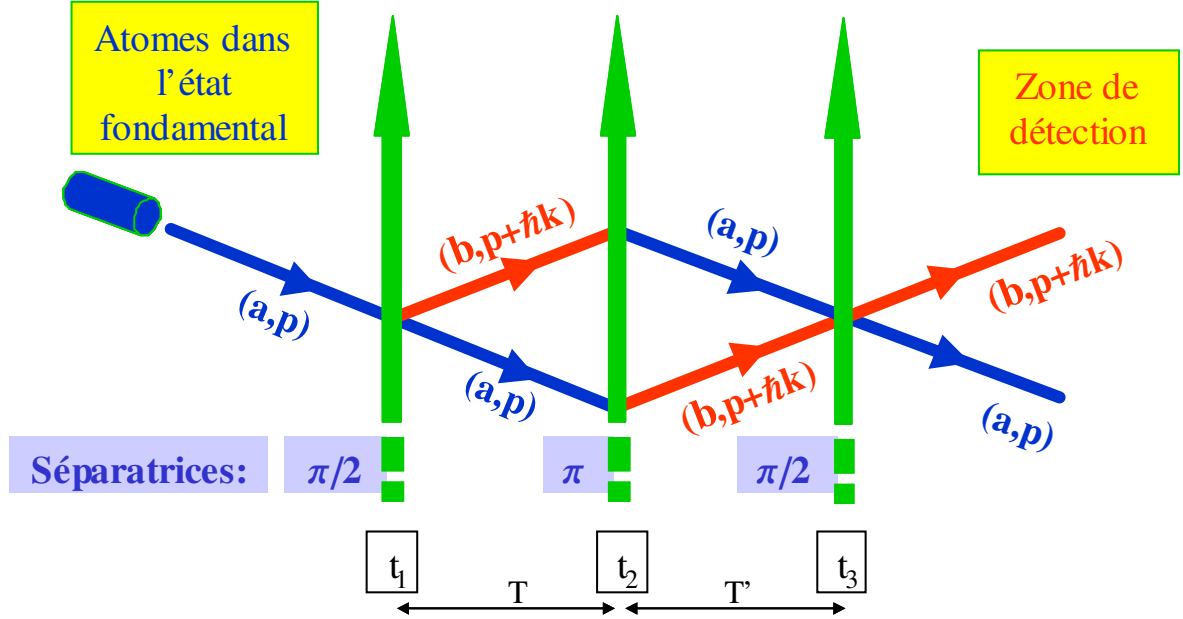


FIG. 5.1: Interféromètre atomique de type Ramsey-Bordé symétrique.

Ce type d'interféromètre est composé de trois ou quatre séparatrices, spatiales ou temporelles, utilisant des transitions, optiques ou non, telles que la géométrie de l'interféromètre soit fermée.

Le *diagramme spatio-temporel* correspondant à trois séparatrices (temporelles) est représenté sur la figure 5.2. Selon les termes introduits dans la partie 4.2.1, il y a une seule paire de chemins homologues et 6 interactions effectives (4 seulement selon la modélisation infiniment fine ou *ttt-champ faible* des séparatrices).

Appliquons donc la méthode de la partie précédente à un interféromètre atomique dont les caractéristiques sont les suivantes :

- géométrie de type Ramsey-Bordé symétrique [→ point $n^\circ 6$],
- avec 3 séparatrices temporelles [→ point $n^\circ 1$] (d'où $N = 3$, [→ point $n^\circ 2$]),
- en configuration $\pi/2 - \pi - \pi/2$ et issues d'une même faisceau laser [→ point $n^\circ 7$],
- avec une détection en sortie dont l'effet est modélisable par une intégration du signal de sortie sur tout l'espace [→ point $n^\circ 4$],
- pour une source atomique dont la structure est modélisable par un mélange statistique de paquets d'ondes, d'extension égale à la longueur de cohérence du nuage [→ point $n^\circ 5$],
- pour divers champs inertiels et gravitationnels dont le potentiel est au plus quadratique en position et impulsion (nous restreindrons plus loin le domaine d'application de H_{ext} aux potentiels indépendants du temps) [→ point $n^\circ 8$].

Nous verrons tout d'abord le cas des modélisations infiniment fine et *ttt champ faible* des séparatrices, puis celui des modélisations *ttt champs forts* [→ point $n^\circ 1$ et 7].

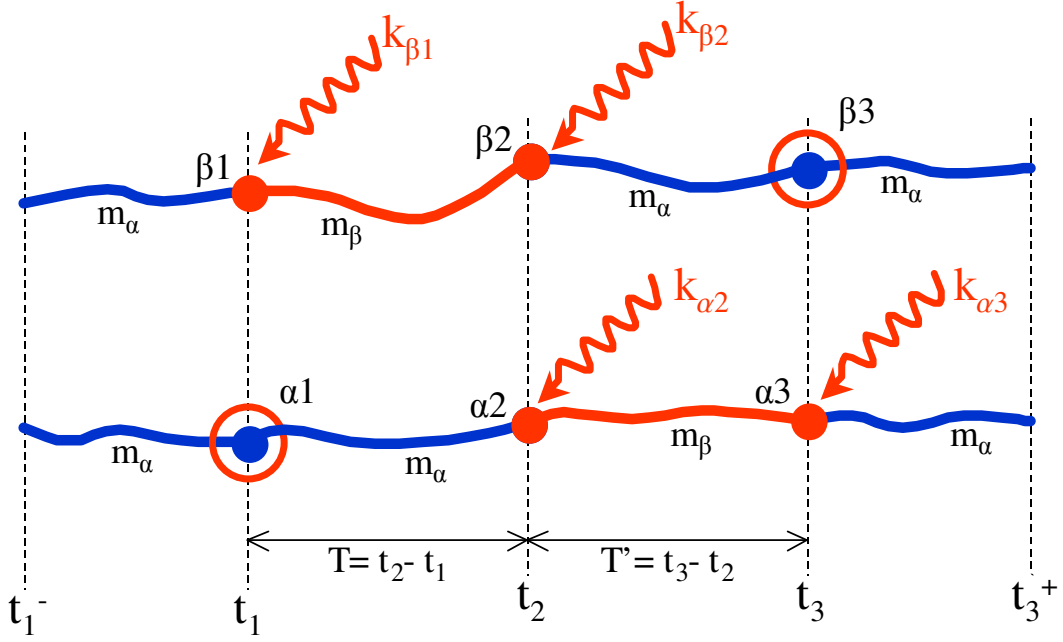


FIG. 5.2: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre atomique de type Ramsey-Bordé symétrique (avec 3 séparatrices temporelles).

5.2.1 Signal de franges avec les modélisations infiniment fine et ttt champ faible des séparatrices

L'action d'une séparatrice sur un paquet d'ondes incident est modélisée sous la forme qui est détaillée dans les parties 4.1.2 et 4.3.2.

Suivant la méthode précédente, les données ci-dessus nous indique qu'il y a, dans ce cas, seulement deux chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre (et donc une seule contribution au signal de franges total), et que le signal de franges à considérer après prise en compte du processus de détection est celui donné par l'expression 4.42 :

$$S := S_1 \cdot (1 + e^{-\eta} \cdot \cos [\Delta\phi_{\beta\alpha}])$$

avec le **déphasage** donné en 4.41 ($N = 3$) :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^3 \left[\left(\vec{k}_{\beta i} - \vec{k}_{\alpha i} \right) \cdot \vec{Q}_i - (\omega_{\beta i} - \omega_{\alpha i}) t_i - (\varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha i}) - \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right]$$

l'**amplitude** donnée en 4.45 :

$$S_1 = \frac{M_\alpha^2 + M_\beta^2}{|\det(X_D X_1^{-1})|} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[2 \operatorname{Im}[m_3 Y_D X_D^{-1}]]}}$$

et le **contraste** donné en 4.44 :

$$\eta = -\ln \left[\frac{2M_\alpha M_\beta}{M_\alpha^2 + M_\beta^2} \right] + \frac{m_3}{4\hbar} \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_3} - Y_D X_D^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \cdot \operatorname{Im} [Y_D X_D^{-1}]^{-1} \cdot \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m_3} - (Y_D X_D^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right]$$

Expressions analytiques du déphasage

Utilisons le fait que les interactions aux points $\alpha 1$ et $\beta 3$ sont nulles (voir la figure 5.2) et la relation suivante, qui est due à la **symétrie de la géométrie** de l'interféromètre :

$$\vec{k}_{\alpha 2} + \vec{k}_{\beta 2} = \vec{0}$$

On obtient alors l'expression suivante du déphasage :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha} = & \vec{k}_{\beta 1} \cdot \vec{Q}_1 + (\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2}) \cdot \vec{Q}_2 - \vec{k}_{\alpha 3} \cdot \vec{Q}_3 \\ & -\omega_{\beta 1} t_1 - (\omega_{\beta 2} - \omega_{\alpha 2}) t_2 + \omega_{\alpha 3} t_3 - \varphi_{\beta 1} - (\varphi_{\beta 2} - \varphi_{\alpha 2}) + \varphi_{\alpha 3} \\ & -\omega_{\beta\alpha 1}^{(0)} \tau_{\beta\alpha 1} - \omega_{\beta\alpha 2}^{(0)} \tau_{\beta\alpha 2} - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta 1} - E_{\alpha 1}) (t_2 - t_1) - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta 2} - E_{\alpha 2}) (t_3 - t_2) \end{aligned}$$

que l'on peut ré-écrire en faisant apparaître explicitement le **rapport des masses effectives** m_{β}/m_{α} (voir les relations 4.31 et 4.32 à la fin du paragraphe 4.3.2) et les actions classiques $S_{\nu i}$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha} = & \vec{k}_{\beta 1} \cdot \vec{Q}_1 + (\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2}) \cdot \vec{Q}_2 - \vec{k}_{\alpha 3} \cdot \vec{Q}_3 \\ & -\omega_{\beta 1} t_1 - (\omega_{\beta 2} - \omega_{\alpha 2}) t_2 + \omega_{\alpha 3} t_3 - \varphi_{\beta 1} - (\varphi_{\beta 2} - \varphi_{\alpha 2}) + \varphi_{\alpha 3} \\ & + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} - 1 \right) \left[S_{\alpha 1} + S_{\beta 2} + \frac{1}{2} (\vec{p}_{\alpha 2} + \vec{p}_{\beta 2} + \hbar \vec{k}_{\beta 2}) \cdot (\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) - \frac{1}{2} \vec{p}_{\beta 3} \cdot (\vec{r}_{\beta 3} - \vec{r}_{\alpha 3}) \right] \\ & - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta 1} - E_{\alpha 1}) (t_2 - t_1) - \frac{1}{\hbar} (E_{\beta 2} - E_{\alpha 2}) (t_3 - t_2) \end{aligned}$$

On peut également exprimer les énergies $E_{\alpha i}$ et $E_{\beta i}$ en fonction des masses effectives (voir la partie 2.1 au sujet des diverses façons de le faire) pour obtenir le terme d'horloge du déphasage. Néanmoins, pour simplifier l'exposé, nous ne considérerons par la suite qu'une seule masse effective m , et ne conserverons donc que les termes indépendant des différences de masses (voir paragraphe 4.3.2).

De plus, on a vu au paragraphe 4.3.2 que l'**expression des points milieux** \vec{Q}_i était très simplifiée du fait de la symétrie de l'interféromètre :

$$\vec{Q}_i = A_{i1} \cdot \vec{r}_1 + \frac{B_{i1}}{m} \cdot \vec{P}_1^+ + \vec{\xi}_{i1}$$

avec les matrices $ABCD\xi$ suivantes : A_{i1} , B_{i1} et le vecteur $\vec{\xi}_{i1}$; et avec l'impulsion initiale de Bragg :

$$\vec{P}_1^+ = \vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 1}}{2}$$

Dans ce cas, les trois points milieux s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 &= \vec{r}_1 \\ \vec{Q}_2 &= A_{21} \cdot \vec{r}_1 + \frac{B_{21}}{m} \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 1}}{2} \right) + \vec{\xi}_{21} \\ \vec{Q}_3 &= A_{31} \cdot \vec{r}_1 + \frac{B_{31}}{m} \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 1}}{2} \right) + \vec{\xi}_{31} \end{aligned}$$

et le déphasage s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\beta\alpha} = & \left[\vec{k}_{\beta 1} + \left(\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2} \right) . A_{21} - \vec{k}_{\alpha 3} . A_{31} \right] . \vec{r}_1 \\ & + \left[\left(\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2} \right) . B_{21} - \vec{k}_{\alpha 3} . B_{31} \right] . \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 1}}{2} \right) / m \\ & + \left[\left(\vec{k}_{\beta 2} - \vec{k}_{\alpha 2} \right) . \vec{\xi}_{21} - \vec{k}_{\alpha 3} . \vec{\xi}_{31} \right] - \varphi_{\beta 1} - (\varphi_{\beta 2} - \varphi_{\alpha 2}) + \varphi_{\alpha 3}\end{aligned}$$

où l'on a incorporé par simplicité les termes $\omega_{\nu i} t_i$ dans les phases laser $\varphi_{\nu i}$:

$$\varphi_{\nu i} \longrightarrow \varphi_{\nu i} + \omega_{\nu i} t_i$$

En outre, lorsque les séparatrices sont issues d'un **même faisceau laser** $(\vec{k}, \omega, \varphi_i)$:

$$\vec{k}_{\beta 1} = +\vec{k} \quad , \quad \begin{cases} \vec{k}_{\alpha 2} = +\vec{k} \\ \vec{k}_{\beta 2} = -\vec{k} \end{cases} \quad , \quad \vec{k}_{\alpha 3} = -\vec{k}$$

(voir la figure 5.1), cette expression se simplifie d'avantage, et l'on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\Delta\phi := \Delta\phi_{\beta\alpha} = & \vec{k} . [1 - 2A(T) + A(T + T')] . \vec{r}_1 + \vec{k} . [B(T + T') - 2B(T)] . \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \\ & + \vec{k} . \left[\vec{\xi}(T + T') - 2\vec{\xi}(T) \right] - (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_{\alpha 3})\end{aligned}$$

(5.1)

où l'on a introduit les durées T et T' définies par :

$$\begin{aligned}T & : = t_2 - t_1 \\ T' & : = t_3 - t_2\end{aligned}$$

(en accord avec les notations de la figure 5.1).

Il reste maintenant à exprimer les matrices $ABCD\xi$, ou plus exactement les trois combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned}1 - 2A_{21} + A_{31} & = 1 - 2A(T) + A(T + T') \\ -2B_{21} + B_{31} & = B(T + T') - 2B(T) \\ -2\vec{\xi}_{21} + \vec{\xi}_{31} & = \vec{\xi}(T + T') - 2\vec{\xi}(T)\end{aligned}$$

qui interviennent dans l'expression du déphasage.

Selon les champs inertiels et gravitationnels considérés, les matrices $ABCD$ n'auront alors pas la même forme (voir le paragraphe 2.2.3), et l'on doit préciser le type de potentiels (ie les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \vec{f}$ et \vec{g} de l'Hamiltonien H_{ext} défini par la relation 2.14) dont on veut rendre compte dans l'expérience d'interférométrie considérée ([\longrightarrow point $n^\circ 8$] de la méthode précédente).

Nous étudierons tout d'abord les cas simples où un seul effet inertiel ou gravitationnel est pris en compte (pour faire le lien avec les résultats antérieurs, exacts ou perturbatifs), puis nous détaillerons deux configurations particulières où agissent simultanément plusieurs de ces effets (accélération + gradient d'accélération + rotations).

Lien avec les résultats antérieurs : gyromètre et radio-gravimètre simplifiés

Par simplicité, on n'écrira plus le terme $(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_{\alpha 3})$ dans les déphasages.

Gyromètres simplifiés :

Lorsque l'on néglige l'effet de la gravité (et des autres accélérations présentes), les matrices $ABCD$ s'expriment simplement sous la forme :

$$\begin{aligned} A(t, t_0) &= \mathcal{R}(t, t_0) \\ B(t, t_0) &= (t - t_0) \cdot \mathcal{R}(t, t_0) \end{aligned}$$

à l'aide de la **matrice de rotation** suivante :

$$\mathcal{R}(t_i, t_0) := \mathcal{T} \left[\exp \left(\int_{t_0}^{t_i} \alpha(t') dt' \right) \right]$$

où la matrice α peut s'exprimer en fonction des trois générateurs infinitésimaux J_x , J_y et J_z , définis à la fin de l'appendice A, et du vecteur rotation $\vec{\Omega}(t)$:

$$\alpha(t) = i \vec{J} \cdot \vec{\Omega}(t)$$

Dans ce cas, le déphasage précédent s'écrit simplement :

$$\Delta\phi(T + T') = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 - 2 \vec{k} \cdot \mathcal{R}(T) \left[\vec{r}_1 + \left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) T \right] + \vec{k} \cdot \mathcal{R}(T + T') \left[\vec{r}_1 + \left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) (T + T') \right]$$

et est valable pour toute rotation, dont l'axe et la vitesse de rotation peuvent varier dans le temps (effet Sagnac généralisé).

Lorsque $\vec{\Omega}(t)$ est **constant**, l'expression générale de la matrice de rotation :

$$\mathcal{R}(T) := \exp \left(i \vec{J} \cdot \vec{\Omega} T \right)$$

peut s'exprimer facilement en termes des sinus et cosinus usuels (voir la fin de l'appendice A) :

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(\vec{n}, \Omega T) = 1 + i \vec{n} \cdot \vec{J} \sin(\Omega T) - \left(\vec{n} \cdot \vec{J} \right)^2 (1 - \cos(\Omega T))$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire donnant la direction de rotation :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}$$

L'effet d'une telle matrice sur un vecteur \vec{k} s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{R}(\vec{n}, \Omega T) \vec{k} = \vec{k} + \sin(\Omega T) \vec{n} \times \vec{k} + (\cos(\Omega T) - 1) \vec{k}_\perp$$

avec :

$$\vec{k}_\perp := \vec{k} - \left(\vec{n} \cdot \vec{k} \right) \vec{n}$$

Avec $T' = T$, et en définissant l'**impulsion massique** suivante :

$$\vec{v}_1 := \left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Delta\phi(2T) = & \cos(2\Omega T) \vec{k}_\perp \cdot \vec{v}_1 T + \sin(2\Omega T) \vec{n} \cdot (\vec{k}_\perp \times \vec{v}_1 T) + \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_1 \\ & + [\cos(2\Omega T) - 2\cos(\Omega T)] \vec{k}_\perp \cdot (\vec{r}_1 + \vec{v}_1 T) \\ & + [\sin(2\Omega T) - 2\sin(\Omega T)] \vec{n} \cdot [\vec{k}_\perp \times (\vec{r}_1 + \vec{v}_1 T)] \end{aligned}$$

où l'on reconnaît le résultat analytique de la référence [35].

En coordonnées cartésiennes et avec une configuration usuelle :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z, \quad \vec{k} = k \vec{e}_y, \quad \vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$$

on retrouve alors au premier ordre en ΩT (on a posé $\vec{r}_1 = \vec{0}$ par simplicité) :

$$\Delta\phi(2T) = 2\frac{m}{\hbar}\Omega * Aire + O[(\Omega T)^2]$$

le résultat bien connu de l'effet Sagnac où le terme *Aire* est l'aire (au premier ordre) de l'interféromètre (voir la figure 5.1) :

$$Aire := 2 \frac{\hbar k}{2m} T \frac{p_1}{m} T = \frac{\hbar k p_1}{m^2} T^2$$

Gradio-gravimètres simplifiés :

Lorsqu'au contraire, on néglige tous les effets dus aux rotations, les matrices $ABCD$ sont égales à celles données au paragraphe 2.2.3 :

$$\begin{aligned} A(T) &= \cosh(\gamma^{1/2} T) \\ B(T) &= \gamma^{-1/2} \sinh(\gamma^{1/2} T) \\ \vec{\xi}(T) &= [\cosh(\gamma^{1/2} T) - 1] \gamma^{-1} \cdot \vec{g} = [A(T) - 1] \gamma^{-1} \cdot \vec{g} \end{aligned}$$

(γ est une matrice attention), et le déphasage $\Delta\phi(T + T')$ s'écrit de façon analytique sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\phi(T + T') = & \vec{k} \cdot [1 + \cosh(\gamma^{1/2}(T + T')) - 2\cosh(\gamma^{1/2}T)] \cdot (\vec{r}_1 + \gamma^{-1} \vec{g}) \\ & + \vec{k} \gamma^{-1/2} [\sinh(\gamma^{1/2}(T + T')) - 2\sinh(\gamma^{1/2}T)] \cdot \left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m}\right) \end{aligned}$$

qui est la généralisation à trois dimensions de la formule 1D établie dans la référence [58].

Au premier ordre en γT^2 , et pour $T' = T$, cette formule redonne alors bien le résultat perturbatif usuel (formule de Wolf-Tourrenc) [49, 60, 66, 58] :

$$\Delta\phi(2T) = \vec{k} \cdot \vec{g} T^2 + \vec{k} \cdot \gamma T^2 \cdot \left(\vec{r}_1 + \frac{7}{12} \vec{g} T^2 + \left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) T \right) + O\left[(\gamma T^2)^2\right]$$

Action simultanée d'une accélération non-uniforme et de rotations

Considérons maintenant deux configurations particulières, qui sont largement utilisées aujourd'hui d'un point de vue expérimental, et pour lesquelles les potentiels inertiels et gravitationnels apparaissant dans H_{ext} sont indépendants du temps (nous ne considérons donc pas ici l'effet d'ondes gravitationnelles, et nous nous restreignons à l'effet de rotations et d'accélération non-uniformes [ie avec gradient]).

On peut les distinguer selon le référentiel dans lequel cet Hamiltonien H_{ext} est constant :

1. **Cas spécifique $n^\circ 1$:** H_{ext} indépendant du temps dans le référentiel où les faisceaux laser sont au repos

Cette configuration correspond par exemple aux interféromètres qui demeurent immobiles dans le référentiel terrestre, et qui sont tels que les faisceaux lasers des séparatrices sont également fixes dans ce référentiel (dans ce cas, le référentiel du laboratoire est en fait défini par les faisceaux laser). L'action des champs de rotation et de gravité terrestres sur le nuage atomique se traduit alors par un potentiel dont les paramètres α (rotation ²), γ (gradient de gravité) et \vec{g} (gravité uniforme) sont indépendants du temps.

L'Hamiltonien H_{ext} est donc constant dans ce référentiel, dont l'origine peut être prise a priori en tout point de l'espace. Lorsque l'on considère les champs inertiels et gravitationnels créés par une planète, il est cependant souvent judicieux de prendre l'origine du référentiel au centre de cette planète (situé à l'intersection de l'axe de rotation planétaire et de la direction du vecteur gravité \vec{g}). Dans ce cas, l'Hamiltonien ne fait intervenir en effet que les termes suivants :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - \vec{r}_{op} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_{op} - m \vec{g} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_{op}$$

où \vec{g} est lié au vecteur de gravité réel \vec{g}_T par la relation (voir appendice E) :

$$\vec{g} := \vec{g}_T - \gamma \cdot \vec{R}_T = \vec{g}_T - \gamma \cdot \vec{r}_1$$

L'autre choix couramment considéré est de prendre l'**origine du référentiel** au centre de la première séparatrice (ie en \vec{r}_1). Dans ce cas, l'Hamiltonien s'exprime en fonction de la vraie quantité physique \vec{g}_T , mais il fait également intervenir un terme linéaire en \vec{p}_{op} (voir appendice E) :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - \vec{r}_{op} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_{op} - m \vec{g}_T \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_{op} - \vec{R}_T \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_{op}$$

²On rappelle que la matrice α est définie à partir du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la façon suivante : $\alpha \cdot \vec{u} = -\vec{\Omega} \times \vec{u}$ pour tout vecteur \vec{u} .

qui modifie l'expression du vecteur $\vec{\xi}$.

Par la suite, nous considérerons le premier choix d'origine (au centre de la Terre en l'occurrence).

Comme H_{ext} est indépendant du temps, nous pouvons utiliser l'expression des matrices $ABCD$ établie dans les appendices D (calcul exact par la théorie des matrices) et C (développements de Taylor en αT et γT^2). A l'aide des développements en αT et γT^2 , on peut ainsi exprimer simplement les trois combinaisons précédentes en fonction de la durée T et de la différence $T' - T$ (voir la fin de l'appendice C).

Lorsque $T' = T$, le déphasage s'écrit ainsi sous la forme [81] :

$$\Delta\phi(2T) = \Delta\phi_{r1} + \Delta\phi_{OB} + \Delta\phi_g$$

avec (dans la référence [81], ces développements sont poussés à l'ordre 6) :

$$\Delta\phi_{r1} : = \vec{k} \cdot (1 - 2A_{21} + A_{31}) \cdot \vec{r}_1$$

$$= \vec{k} \cdot [(\alpha^2 + \gamma) T^2 + (\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) T^3 + \dots] \cdot \vec{r}_1$$

pour la partie du déphasage qui dépend de la position centrale \vec{r}_1 de la première séparatrice de l'interféromètre,

$$\Delta\phi_{OB} : = \vec{k} \cdot (-2B_{21} + B_{31}) \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m$$

$$= \vec{k} \cdot [2\alpha T^2 + (3\alpha^2 + \gamma) T^3 + \frac{7}{6} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^4 + \dots] \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \quad (5.2)$$

pour la partie du déphasage qui dépend de l'impulsion initiale de Bragg $\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2}$ (l'indice OB désigne le terme "Off Braggness"), et :

$$\Delta\phi_g : = \vec{k} \cdot (-2\vec{\xi}_{21} + \vec{\xi}_{31})$$

$$= \vec{k} \cdot [T^2 + 2\alpha T^3 + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 + \frac{1}{2} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^5 + \dots] \cdot \vec{g} \quad (5.3)$$

pour la partie du déphasage qui dépend du vecteur gravité \vec{g} .

Il convient de souligner que l'on peut exprimer ces développements à n'importe quel ordre, puisque les expressions de $\Delta\phi_{r1}$, $\Delta\phi_{OB}$ et $\Delta\phi_g$ sont obtenues de façon exacte.

D'autre part, il faut faire attention à relier correctement les quantités \vec{g} et \vec{p}_1/m aux quantités effectivement mesurées. Ainsi, nous avons déjà vu que le vecteur \vec{g} pouvait se ré-écrire en fonction du champ de pesanteur réel \vec{g}_T comme :

$$\vec{g} = \vec{g}_T - \gamma \cdot \vec{r}_1$$

De plus, l'impulsion massique :

$$\vec{p}_1/m$$

est différente de la vitesse de lancement des atomes prise dans le référentiel non-tournant \vec{v}_{at} :

$$\vec{p}_1/m = \vec{v}_{at} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_1$$

ie :

$$\boxed{\vec{p}_1/m = \vec{v}_{at} - \alpha \cdot \vec{r}_1}$$

Ces deux relations, à appliquer dans le cas particulier décrit précédemment, simplifient alors beaucoup l'expression de $\Delta\phi_{r1}$:

$$\boxed{\Delta\phi_{r1} = \vec{k} \cdot \left[-\alpha^2 T^2 - 2\alpha^3 T^3 - \frac{7}{12} (3\alpha^4 + \gamma\alpha^2) T^4 + \dots \right] \cdot \vec{r}_1} \quad (5.4)$$

mais ne l'annulent pas pour autant. Le déphasage global comprend donc des termes qui dépendent, à travers le vecteur \vec{r}_1 , de la position de l'interféromètre. Cette dépendance est alors au minimum quadratique en α (rotation) et γ (gradient d'accélération).

Par exemple, pour une configuration du type :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos(\lambda) \\ \Omega \sin(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix}$$

(laboratoire à la latitude λ , vecteur d'ondes laser selon la direction nord-sud, axe z selon le rayon terrestre), le premier terme de $\Delta\phi_{r1}$ s'écrit :

$$-\vec{k} \cdot \alpha^2 \cdot \vec{r}_1 T^2 = -\vec{k} \cdot \left[\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1) \right] T^2 = -\frac{1}{2} \sin(2\lambda) k \Omega^2 R_T T^2$$

et est nul lorsque $\sin(2\lambda) = 0$ (au pôle et à l'équateur). De même, si \vec{k} est orienté selon la direction est-ouest :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le premier terme de $\Delta\phi_{r1}$ est nul (il y a ainsi plusieurs façons d'éliminer a priori le terme dominant de $\Delta\phi_{r1}$).

Ces termes dépendant de la position de l'interféromètre n'ont rien d'étonnant : ils traduisent simplement l'action de la **force centrifuge** due à la rotation terrestre.

Cet effet apparaît clairement sur les expressions 5.3 et 5.4 de $\Delta\phi_g$ et $\Delta\phi_{r1}$:

$$\Delta\phi_g + \Delta\phi_{r1} = \vec{k} \cdot \left[T^2 + 2\alpha T^3 + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 + \frac{1}{2} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^5 + \dots \right] \cdot (\vec{g} - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1)$$

où \vec{g} est l'accélération centripète d'origine purement gravitationnelle, et où $-\alpha^2 \cdot \vec{r}_1$ est l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre.

Ce que l'on entend communément par "gravité" correspond alors à la somme de ces deux contributions, ou plus exactement au vecteur suivant (voir ci-dessus et l'appendice E pour la définition de \vec{g}_T) :

$$\boxed{\vec{g} + (\gamma - \alpha^2) \cdot \vec{r}_1} = \vec{g}_T - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1$$

En utilisant la relation suivante :

$$\vec{\xi}(T) = (B(T) \cdot \alpha - A(T) + 1) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g}$$

(valable pour tout Hamiltonien H_{ext} indépendant du temps, voir l'appendice B), ce vecteur apparaît en fait simplement dans l'expression 5.1 du déphasage total :

$$\Delta\phi = \vec{k} \cdot (B_{31} - 2B_{21}) \cdot \left(\vec{v}_{at} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + \vec{k} \cdot [(B_{31} \cdot \alpha - A_{31} + 1) - 2(B_{21} \cdot \alpha - A_{21} + 1)] \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot (\vec{g} + (\gamma - \alpha^2) \cdot \vec{r}_1)$$

Le développement de Taylor (en αT et γT^2 , avec $T' = T$) de cette expression conduit finalement au résultat suivant (voir l'appendice C) :

$$\Delta\phi = \vec{k} \cdot [2\alpha T^2 + (3\alpha^2 + \gamma) T^3 + \frac{7}{6} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^4 + \dots] \cdot \left(\vec{v}_{at} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \right) + \vec{k} \cdot [T^2 + 2\alpha T^3 + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 + \frac{1}{2} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^5 + \dots] \cdot (\vec{g} + \gamma \cdot \vec{r}_1 - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1)$$

Les termes de ce développement peuvent alors être évalués pour différentes orientations de l'interféromètre et différents paramètres initiaux (vitesse initiale des atomes \vec{v}_{at} , type d'atomes et masse atomique m , vecteur d'onde effectif \vec{k} des transitions Raman utilisées, temps de vol T entre les séparatrices, latitude λ à laquelle l'expérience est réalisée). Les tableaux de l'appendice H listent ainsi les valeurs numériques de ces termes pour quelques interféromètres atomiques réels (gyromètres à Césium du SYRTE [69] [pour deux orientations différentes] et du groupe de Kasevich à Yale [68], gravimètre à Césium du groupe de Chu à Stanford [66] et celui à Rubidium du SYRTE).

2. Cas spécifique $n^\circ 2$: H_{ext} indépendant du temps dans le référentiel où les faisceaux laser sont en rotation

Cette configuration correspond, par exemple, au cas où un interféromètre atomique est soumis à un champ de gravité (ou d'accélération) constant (mais non-uniforme) dans le référentiel du laboratoire, référentiel par rapport auquel les faisceaux lasers sont en rotation. Ce cas rend compte des expériences avec rotation artificielle des lasers par rapport au laboratoire terrestre, ou lorsque le laboratoire est en rotation artificielle par rapport au référentiel où le champ de gravité est constant (très utile pour la navigation, terrestre ou spatiale).

Du point de vue de l'Hamiltonien H_{ext} et des matrices ABCD, ce cas est très différent du précédent. En effet, l'effet de la rotation des lasers n'apparaît pas dans H_{ext} si l'on se place dans le référentiel où le champ de gravité est constant. Dans ce référentiel, seul le champ de gravité agit sur les atomes, et l'Hamiltonien s'écrit par conséquent :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - m \vec{g} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_{op}$$

Les matrices $ABCD$ sont alors simplement égales à celles données au paragraphe 2.2.3 :

$$\begin{aligned} A(T) &= \cosh(\gamma^{1/2} T) \\ B(T) &= \gamma^{-1/2} \sinh(\gamma^{1/2} T) \\ \vec{\xi}(T) &= [\cosh(\gamma^{1/2} T) - 1] \gamma^{-1} \cdot \vec{g} \end{aligned}$$

Quant à la rotation considérée, elle agit également sur les atomes, mais de façon indirecte, par l'intermédiaire des vecteurs d'ondes laser \vec{k}_i des séparatrices. Ceux-ci peuvent alors être reliés aux vecteurs d'ondes initiaux \vec{k}_{0i} de la manière suivante :

$$\vec{k}_{0i} = \mathcal{R}(t_i, t_0) \cdot \vec{k}_i$$

à l'aide de la matrice rotation vue plus haut :

$$\mathcal{R}(t_i, t_0) := \mathcal{T} \left[\exp \left(\int_{t_0}^{t_i} \alpha(t') dt' \right) \right]$$

qui s'écrit :

$$\mathcal{R}(T) := \exp \left(i \vec{J} \cdot \vec{\Omega} T \right)$$

dans la cas où $\vec{\Omega}(t)$ est constant.

Lorsque les séparatrices sont issues d'un même faisceau laser (notre cas), les vecteurs d'ondes initiaux sont identiques :

$$\vec{k}_{0i} = \vec{k}$$

d'où la relation :

$$\vec{k}_{\beta 1} = \vec{k} \quad , \quad \vec{k}_{\alpha 2} = \mathcal{R}^{-1}(T) \cdot \vec{k} = -\vec{k}_{\beta 2} \quad , \quad \vec{k}_{\alpha 3} = -\mathcal{R}^{-1}(T + T') \cdot \vec{k}$$

qui conduit à l'expression suivante du déphasage :

$$\begin{aligned} \Delta\phi \quad : \quad &= \vec{k} \cdot [1 - 2\mathcal{R}(T) A(T) + \mathcal{R}(T + T') A(T + T')] \cdot \vec{r}_1 \\ &+ \vec{k} \cdot [-2\mathcal{R}(T) B(T) + \mathcal{R}(T + T') B(T + T')] \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \\ &+ \vec{k} \cdot [-2\mathcal{R}(T) (A(T) - 1) + \mathcal{R}(T + T') (A(T + T') - 1)] \cdot \gamma^{-1} \cdot \vec{g} - (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_{\alpha 3}) \end{aligned}$$

dont l'invariance vis à vis du référentiel est manifeste ³.

Comme précédemment, on peut alors effectuer des développements de Taylor en αT et γT^2 des matrices A , B et \mathcal{R} , et obtenir ainsi une valeur approchée du déphasage à la précision voulue (on ne détaillera pas ici ces calculs qui sont donnés dans [81]).

Remarquons pour finir que cette configuration particulière rend également compte du cas où chaque vecteur d'ondes laser subit une rotation d'origine différente.

Bilan :

Les développements du déphasage obtenus pour chaque configuration comportent différents termes :

³ Soit l'on se place dans le référentiel (tournant) des lasers, et alors l'Hamiltonien dépend du temps :

$$H'_{ext}(t, t_0) = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - m [\mathcal{R}^{-1}(t, t_0) \vec{g}] \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot [\mathcal{R}^{-1}(t, t_0) \vec{\gamma} \mathcal{R}(t, t_0)] \cdot \vec{r}_{op}$$

et les vecteurs d'ondes laser sont fixes ; soit l'on se place dans le référentiel où le champ de gravité est constant, et alors l'Hamiltonien est constant :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - m \vec{g} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_{op}$$

mais les vecteurs d'ondes laser sont en rotation. Dans les deux cas, on obtient évidemment le même déphasage (qui est invariant de jauge).

- ceux qui correspondent aux effets perturbatifs usuels (formule de Wolf-Tourenne pour la gravité non-uniforme et effet Sagnac pour la rotation)
- de nombreux termes d'ordre supérieur, dont certains sont croisés (rotation-gradient), et dont il faut tenir compte en toute rigueur (selon le niveau de précision souhaité, voir les tableaux de l'appendice H).

$T' \neq T$: le déphasage à la carte

Les expressions précédentes du déphasage font intervenir de nombreux termes où se mélangent les effets dus à la gravité (\vec{g} et gradient γ) et ceux dus aux rotations. Il est donc nécessaire, après mesure du déphasage, d'en extraire les valeurs respectives. On a déjà évoqué ce problème, appelé "problème inverse", qui consiste à savoir discriminer, dans le signal de franges expérimental, l'origine des diverses contributions qui le constituent.

Ce problème est souvent complexe, et plusieurs techniques doivent être employées pour atteindre la valeur de la contribution recherchée (utilisation de deux jets atomiques contra-propageants pour discriminer l'effet d'une rotation par rapport à celui d'une accélération par exemple [69]).

Il est donc intéressant d'avoir une méthode qui puisse fournir directement (avec un seul jet atomique) la valeur des diverses contributions au déphasage, ie telle que l'on puisse lire directement sur le signal de franges la valeur du champ de gravité ou d'accélération, celle des rotations présentes, celle du recul.... Nous allons voir qu'il est en fait possible d'obtenir une telle méthode en jouant sur le rapport T'/T des deux temps de vol atomiques.

Considérons en effet l'expression du déphasage obtenue pour la configuration spécifique $n^\circ 1$ (détaillée plus haut), dans laquelle nous n'imposons pas l'égalité $T' = T$. A l'aide des développements de la fin de l'appendice C, on peut alors écrire le déphasage sous la forme d'un développement en puissance de $T' - T$:

$$\Delta\phi(T + T') = \Delta\phi_0 + (T' - T) * \Delta\phi_1 + (T' - T)^2 * \Delta\phi_2 + \dots + (T' - T)^n * \Delta\phi_n$$

où le terme $\Delta\phi_0$ est le déphasage obtenu pour $T' = T$:

$$\Delta\phi_0 := \Delta\phi(2T)$$

et où les premiers termes du développement en $T' - T$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 & : = \vec{k} \cdot [\alpha + 2(\alpha^2 + \gamma)T + 2(\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha)T^2 + \dots] \cdot \vec{r}_1 \\ & + \vec{k} \cdot \left[1 + 4\alpha T + 2(3\alpha^2 + \gamma)T^2 + \frac{8}{3}(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha)T^3 + \dots \right] \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \\ & + \vec{k} \cdot \left[2T + 4\alpha T^2 + \frac{4}{3}(3\alpha^2 + \gamma)T^3 + \frac{4}{3}(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha)T^4 + \dots \right] \cdot \vec{g} \\ \Delta\phi_2 & : = \vec{k} \cdot \left[\frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma)T + (\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha)T + \dots \right] \cdot \vec{r}_1 \\ & + \vec{k} \cdot [\alpha + (3\alpha^2 + \gamma)T + 2(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha)T^2 + \dots] \cdot \left(\vec{p}_1 + \frac{\hbar \vec{k}}{2} \right) / m \\ & + \vec{k} \cdot \left[\frac{1}{2} + 2\alpha T + (3\alpha^2 + \gamma)T^2 + \frac{2}{3}(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha)T^3 + \dots \right] \cdot \vec{g} \end{aligned}$$

En faisant alors varier expérimentalement T' par rapport à T , on obtient un signal de franges dont la dépendance en la variable $T' - T$ nous renseigne directement sur la valeur des quantités α , γ , \vec{g} et δ (le recul). En effet, en mesurant les n dérivées successives de la courbe suivante :

$$(T' - T) \mapsto \Delta\phi(T + T')$$

on obtient n relations indépendantes où se mélangent α , γ , \vec{g} et δ . On peut alors résoudre le système obtenu et déterminer ces quantités.

De plus, si le terme dominant de chacun des déphasages $\Delta\phi_n$ ne fait intervenir qu'une seule de ces quantités, il suffit alors de mesurer les dérivées de la courbe précédente pour obtenir directement leur valeur.

Il convient de souligner que l'on n'a généralement pas accès à cette courbe, mais seulement au signal de franges. Si l'on n'a pas accès aux dérivées de la courbe précédente, on peut néanmoins utiliser les maxima de la courbe du signal de franges pour déterminer quelques points particuliers de la courbe $(T' - T) \mapsto \Delta\phi(T + T')$. En utilisant ces points, on peut ainsi obtenir, comme précédemment, un système d'équations dont la solution nous donne directement la valeur des quantités α , γ , \vec{g} et δ . Pour appliquer la méthode précédente, il est donc nécessaire qu'il y ait suffisamment de franges, ie essentiellement que la source atomique soit suffisamment cohérente.

Amplitude, contraste, signal de franges

Comme on l'a vu plus haut, l'amplitude et le contraste sont donnés respectivement par (4.45 et 4.44) :

$$S_1 = \frac{M_\alpha^2 + M_\beta^2}{|\det(X_D X_1^{-1})|} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{\sqrt{\det[2 \operatorname{Im}[m Y_D X_D^{-1}]]}}$$

$$\eta = -\ln \left[\frac{2M_\alpha M_\beta}{M_\alpha^2 + M_\beta^2} \right] + \frac{m}{4\hbar} \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m} - Y_D X_D^{-1} (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right] \cdot \operatorname{Im}[Y_D X_D^{-1}]^{-1}$$

$$\cdot \left[\frac{\vec{p}_{\beta D} - \vec{p}_{\alpha D}}{m} - (Y_D X_D^{-1})^* (\vec{r}_{\beta D} - \vec{r}_{\alpha D}) \right]$$

Si l'on considère les séparatrices idéales de la modélisation infiniment fine (voir paragraphe 4.1.2), les facteurs d'amplitude $M_{\nu i}$ ont pour valeur :

$$\text{lame } \pi : \begin{cases} \text{transition } a \longrightarrow a : & 0 \\ \text{transition } a \longrightarrow b : & 1 \\ \text{transition } b \longrightarrow b : & 0 \\ \text{transition } b \longrightarrow a : & 1 \end{cases}, \quad \text{lame } \pi/2 : \begin{cases} \text{transition } a \longrightarrow a : & 1/\sqrt{2} \\ \text{transition } a \longrightarrow b : & 1/\sqrt{2} \\ \text{transition } b \longrightarrow b : & 1/\sqrt{2} \\ \text{transition } b \longrightarrow a : & 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

et par conséquent les facteurs d'amplitudes globaux sont égaux :

$$M_\alpha = M_\beta = \frac{1}{2}$$

et le terme $-\ln \left[\frac{2M_\alpha M_\beta}{M_\alpha^2 + M_\beta^2} \right]$ dans l'expression du contraste est nul.

Quant à l'autre terme du contraste, il dépend principalement des différences finales en position et impulsion :

$$\Delta r_D = \overrightarrow{r_{\beta D}} - \overrightarrow{r_{\alpha D}} \quad \text{et} \quad \Delta p_D = \overrightarrow{p_{\beta D}} - \overrightarrow{p_{\alpha D}}$$

que l'on peut ré-écrire en fonction de \vec{k} et des matrices $ABCD$ grâce aux formules 4.50 et 4.51 :

$$\begin{aligned} \Delta r_D &= (B_{D1} - 2B_{D2} + B_{D3}) \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= [A_{D3} \cdot (B_{31} - 2B_{32}) + B_{D3} \cdot (D_{31} - 2D_{32} + 1)] \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ \Delta p_D/m &= (D_{D1} - 2D_{D2} + D_{D3}) \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= [C_{D3} \cdot (B_{31} - 2B_{32}) + D_{D3} \cdot (D_{31} - 2D_{32} + 1)] \frac{\hbar \vec{k}}{m} \end{aligned}$$

où l'indice $_D$ fait référence à l'instant de détection t_D , et où l'on est passé des lignes 1 et 3 aux lignes 2 et 4 grâce aux propriétés de groupe des matrices $ABCD$ (voir l'appendice B ou le paragraphe 2.2.2).

Pour apprécier l'origine de ces différences finales, plaçons nous à l'instant t_3^+ , ie juste après l'instant central t_3 de la dernière interaction. Dans ce cas, on a $t_D = t_3^+$, et les deux différences précédentes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta r_3^+} &= (B_{31} - 2B_{32}) \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= [B(T + T') - 2B(T')] \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= \boxed{[2\alpha T^2 + (3\alpha^2 + \gamma) T^3 + \frac{7}{6} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^4 + \dots] \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m}} \\ &\quad + (T' - T) [-1 + (3\alpha^2 + \gamma) T^2 + 2(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^3 + \dots] \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &\quad + (T' - T)^2 [-\alpha + (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^2 + \dots] \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &\quad + (T' - T)^3 \left[-\frac{1}{6} (3\alpha^2 + \gamma) + \dots \right] \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m} + \dots \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta p_3^+} &= (D_{31} - 2D_{32} + 1) \hbar \vec{k} \\ &= [D(T + T') - 2D(T') + 1] \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= \boxed{[(\alpha^2 + \gamma) T^2 + (\alpha^3 + \alpha\gamma + 2\gamma\alpha) T^3 + \dots] \cdot \hbar \vec{k}} \\ &\quad + (T' - T) [-\alpha + (\alpha^3 + \alpha\gamma + 2\gamma\alpha) T^2 + \dots] \cdot \hbar \vec{k} \\ &\quad + (T' - T)^2 \left[-\frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma) + \dots \right] \cdot \hbar \vec{k} \\ &\quad + (T' - T)^3 \left[-\frac{1}{6} (\alpha^3 + \alpha\gamma + 2\gamma\alpha) + \dots \right] \cdot \hbar \vec{k} + \dots \end{aligned}$$

Ces relations expriment en fait la non-fermeture (en position et impulsion) d'un interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique. On observe alors que l'interféromètre n'est pas fermé spatialement dès qu'il y a une rotation ou un gradient d'accélération. Cette non-fermeture est même du premier ordre dans ce cas.

Quant à la non-fermeture impulsioneille, elle est du deuxième ordre en α (rotation) et du premier ordre en γ (gradient de gravité). Ce résultat est très intéressant dans le choix du processus de détection

utilisé dans un interféromètre. En effet, une détection des atomes par nappe (voir la partie 4.1.4) implique une durée de détection non-négligeable, pendant laquelle les deux chemins atomiques peuvent s'écarter sensiblement si leur impulsions respectives sont suffisamment différentes. Le fait que Δp_3^+ dépende quadratiquement de α (la rotation) et linéairement de γ (le gradient d'accélération) suggère que cette méthode de détection par nappe est appropriée pour des expériences de gyrométrie (après avoir rejeté le gradient d'accélération), alors qu'elle n'est pas la plus adaptée pour des expériences de gradio-gravimétrie.

L'amplitude et le contraste font également intervenir les deux quantités matricielles suivantes :

$$Y_D X_D^{-1} \quad \text{et} \quad X_D X_1^{-1}$$

dont l'expression est donnée par les formules (voir 4.39 et 4.38) :

$$X_D X_1^{-1} = A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}$$

et :

$$Y_D X_D^{-1} = [C_{D1} + D_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}] \cdot [A_{D1} + B_{D1} \cdot Y_1 X_1^{-1}]^{-1}$$

A l'aide de toutes ces expressions (et des développements des matrices $ABCD$ donnés dans l'appendice C), on peut alors calculer les facteurs globaux de contraste et d'amplitude, et ainsi avoir accès au signal de franges complet :

$$S(T, T') = S_1(T, T') \cdot \left(1 + e^{-\eta(T, T')} \cdot \cos[\Delta\phi(T + T')]\right)$$

On peut alors tracer la courbe de ce signal à T et T' fixés (en faisant varier n'importe quelle quantité, par exemple une des phases laser) ou tracer la courbe représentative de la fonction suivante :

$$T' - T \longmapsto S(T, T')$$

dans la même logique que le paragraphe précédent.

Le nombre de franges visibles dépendra alors de façon essentielle de la largeur en impulsion du paquet d'ondes au temps t_1 .

5.2.2 Signal de franges avec la modélisation ttt champ fort généralisée des séparatrices

Comme on l'a déjà souligné à plusieurs reprises, la *modélisation ttt champ fort généralisée* comporte essentiellement trois différences importantes par rapport aux modélisations simplifiées précédentes :

- la modification du centre des paquets d'ondes associés aux chemins atomiques lors de la traversée de l'onde laser,
- la modification des largeurs en position et impulsion de ces paquets d'ondes,
- la multiplication des paquets d'ondes atomiques en sortie (quatre au lieu de deux).

De ces trois changements, seul le premier est simple à prendre en compte lors du calcul du signal de franges, comme cela est détaillé dans les parties 4.1.2 et 4.3.3. Les deux autres compliquent en effet beaucoup l'expression du déphasage, de l'amplitude et du contraste. Des expressions analytiques sont néanmoins fournies dans la partie 4.3.3, et la prise en compte de la multiplication des chemins atomiques cohérents peut s'obtenir aisément avec tout logiciel de calcul formel (avec $n = 3$ séparatrices,

il y a en effet $N_{cac} = 2^{3+1} = 16$ chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre, et donc $C_2^{N_{cac}} = 120$ signaux élémentaires à sommer).

L'expression analytique du signal de franges total (somme de toutes les contributions élémentaires) étant trop longue pour être écrite dans ce mémoire, nous allons illustrer les résultats de ce traitement en champs forts à l'aide de diagrammes spatio-temporels, et nous verrons comment évaluer simplement l'effet Borrmann généralisé (ie en présence de champs inertiels et gravitationnels).

Conséquence de l'effet Borrmann sur le déphasage : approche simplifiée

Considérons la *modélisation ttt champ fort idéalisée*, qui est l'une des versions simplifiées de la *modélisation ttt champ fort généralisée* décrite en détail dans la partie 4.1.2.

Cette modélisation est en fait valable lorsque le paquet d'ondes incident possède une très faible largeur en impulsion (suivant la direction \vec{k}) :

$$\frac{\sigma_{p_{||}}}{m} := \sqrt{\frac{2\hbar}{m \operatorname{Im} \left[(X_1 Y_1^{-1})_{||} \right]}} \ll \frac{2\Omega_0}{k}$$

$$\text{avec : } (X_1 Y_1^{-1})_{||} := \vec{k} \cdot X_1 Y_1^{-1} \cdot \vec{k} / k^2 \quad \text{et} \quad \Omega_0 \text{ la pulsation de Rabi}$$

et qu'il est à résonance parfaite pour son impulsion centrale \vec{p}_c :

$$y_{\pm}(\vec{p}_c) := \left(\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}_c / m \mp \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} \right) / 2\Omega_0 = 0$$

où le signe \pm dans y_{\pm} indique le type de transition considéré (+ pour les transitions $a \rightarrow a$ et $a \rightarrow b$, et $-$ pour les transitions $b \rightarrow a$ et $b \rightarrow b$, où a et b désignent respectivement les états fondamental et excité).

On suppose donc qu'il y a une sélection en vitesse préalable suffisante, et que la condition de résonance précédente n'est pas trop perturbée par l'effet des champs inertiels et gravitationnels durant le vol interférométrique (voir la partie 3.7).

Dans ce cas très simplifié, seules deux trajectoires distinctes sont suivies par les centres des paquets d'ondes (il y a néanmoins dans l'interféromètre encore 16 paquets d'ondes distincts, et autant de chemins atomiques cohérents), auxquelles nous pouvons associer un diagramme spatio-temporel comme cela est fait sur la figure 5.3 :

On peut alors appliquer les résultats de la partie 4.3.3, et utiliser en particulier l'expression 4.74 du déphasage :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\beta\alpha,D}(\vec{Q}_D) &= \sum_{i=1}^3 (\theta_{\beta i} - \theta_{\alpha i}) \\ &- \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot (\Delta r_i + \Delta a_i) + \frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot \Delta a_i + \omega_{\beta\alpha i}^{(0)} \cdot \tau_{\beta\alpha i} + \frac{1}{\hbar} (E_{\beta i} - E_{\alpha i}) (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &\frac{m_N}{8\hbar} \Delta r_D \cdot \operatorname{Re} \left[Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} \right] \cdot \Delta r_D - \frac{1}{2} (\mu_{\beta D} - \mu_{\alpha D}) \end{aligned}$$

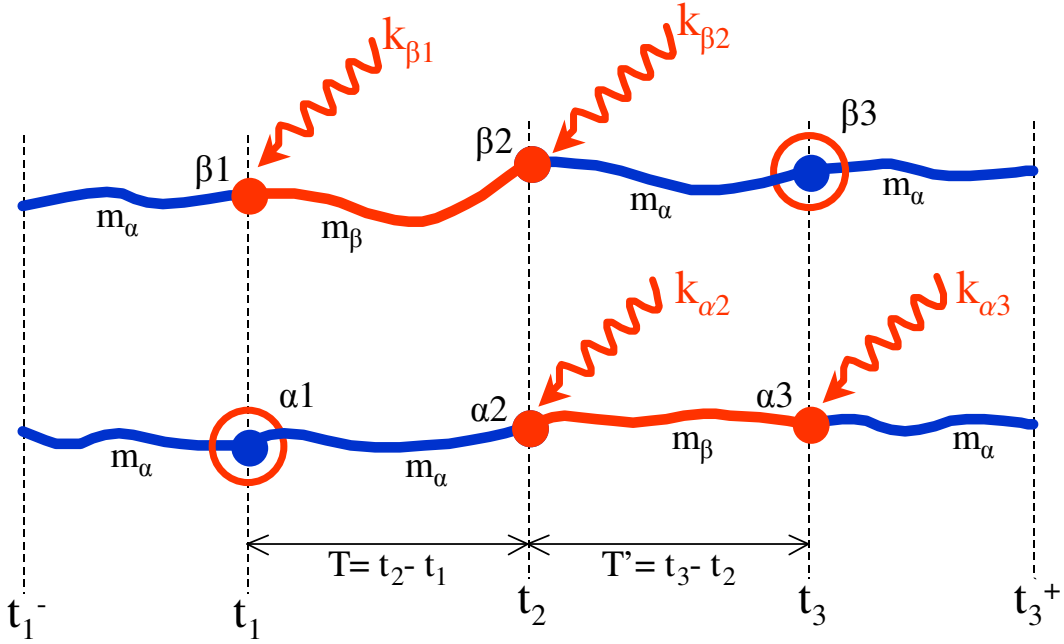


FIG. 5.3: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre atomique de type Ramsey-Bordé symétrique (avec 3 séparatrices temporelles).

Par souci de simplification, on peut, comme au paragraphe précédent, ne pas tenir compte des termes dépendant des différences de masses effectives (troisième et quatrième termes de la seconde ligne), ainsi que ceux résultant de la non identité des matrices $Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$ et $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1}$ (dernière ligne). Cette dernière simplification revient en fait à négliger la modification, par les séparatrices, de la largeur des paquets d'ondes associés à chacun des bras interférométriques. Dans ce cas, la modélisation se simplifie beaucoup, puisqu'elle ne rend compte que de deux paquets d'ondes principaux, et il n'y a par conséquent que deux chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre (comme au paragraphe précédent).

L'expression obtenue s'écrit alors simplement sous la forme :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha,D} = \sum_{i=1}^3 \left[(\theta_{\beta i} - \theta_{\alpha i}) - \frac{\vec{b}_{\beta i} + \vec{b}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot (\Delta\vec{r}_i + \Delta\vec{a}_i) - \frac{\vec{p}_{\beta i} + \vec{p}_{\alpha i}}{2\hbar} \cdot \Delta\vec{a}_i \right]$$

Précisons maintenant la valeur des différents termes de cette expression (ie les phases $\theta_{\alpha i}$ et $\theta_{\beta i}$, et les vecteurs $\vec{a}_{\alpha i}$, $\vec{a}_{\beta i}$, $\vec{b}_{\alpha i}$ et $\vec{b}_{\beta i}$). Dans le cas précis, ils sont issus de la modélisation ttt champ fort dite "idéalisée" rappelée dans la partie 4.1.2, et ils dépendent uniquement des paramètres établis dans la partie concernant le schéma ttt (partie 3.5.3).

Selon cette modélisation ttt champ fort idéalisée (voir partie 4.1.2), les vecteurs $\vec{a}_{\mu i}$ et $\vec{b}_{\mu i}$ sont égaux aux vecteurs \vec{r}_{uv} et \vec{p}_{uv} :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\mu i} &= \vec{r}_{uv,i} \\ \vec{b}_{\mu i} &= \vec{p}_{uv,i} \end{aligned}$$

et les phases effectives $\theta_{\mu i}$ ont pour expression :

$$\theta_{\mu i} = \Phi_{uv,i} + \vec{p}_{uv,i} \cdot (\vec{r}_{1,i} + \vec{r}_{uv,i}) / \hbar$$

où les indices u et v correspondent aux diverses transitions atomiques, et où tous les paramètres (y compris \vec{r}_1) dépendent fortement de la séparatrice $n^\circ i$ considérée. Il est même préférable de préciser

le point d'espace-temps μi (par exemple $\beta 1$, $\alpha 1$, $\beta 2$, etc) où se situe l'interaction (afin de ne pas confondre ν et v , on emploie ici la lettre μ au lieu de ν pour désigner les divers chemins atomiques).

Ainsi, pour le chemin β de la figure 5.3, les atomes sont initialement dans l'état fondamental a , puis ils subissent une interaction instantanée équivalente à l'instant t_1 (point $\beta 1$ dont la position est \vec{r}_1) qui les fait passer dans l'état excité b (transition $a \longrightarrow b$), la phase effective $\theta_{\beta 1}$ s'écrivant par conséquent sous la forme :

$$\theta_{\beta 1} = \Phi_{ba,\beta 1} + \vec{p}_{ba,\beta 1} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{ba,\beta 1}) / \hbar$$

où les paramètres $\Phi_{ba,\beta 1}$, $\vec{r}_{ba,\beta 1}$ et $\vec{p}_{ba,\beta 1}$ sont donnés par l'expression 4.11 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{ba,\beta 1} := + \frac{\tilde{A}(t,t_1) + \tilde{A}(t_0,t_1)}{2} \hbar \vec{k}_{\beta 1} \\ \vec{r}_{ba,\beta 1} := - \frac{\tilde{B}(t,t_1) + \tilde{B}(t_0,t_1)}{2} \hbar \vec{k}_{\beta 1} / m_\alpha \\ \Phi_{ba,\beta 1} := - \left[\omega_{\beta 1} t_1 + \phi_{\beta 1} - \vec{k}_{\beta 1} \cdot \frac{\vec{\xi}(t,t_1) + \vec{\xi}(t_0,t_1)}{2} \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 1}}{8m_\alpha} \left[A(t,t_1) \tilde{B}(t,t_1) + A(t_0,t_1) \tilde{B}(t_0,t_1) + 2A(t_0,t_1) \tilde{B}(t,t_1) \right] \vec{k}_{\beta 1} - \int_{t_0}^t \frac{\delta_{\beta 1}(t',t_1)}{4} dt' \end{array} \right.$$

où l'on pris le soin de préciser le point $\beta 1$ où se situe l'interaction particulière.

Attention, dans ces expressions, les instants t_0 , t_1 et t dépendent également de la séparatrice considérée, et il vaut mieux les ré-écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} t_0 &= t_1 - \frac{\tau_1}{2} \\ t_1 & \\ t &= t_1 + \frac{\tau_1}{2} \end{aligned}$$

avec τ_1 la durée de la séparatrice $n^\circ 1$. Donnons un autre exemple pour illustrer ce point.

Avant l'instant t_3 , les atomes de ce même chemin β sont dans l'état fondamental, et le résultat de l'interaction instantanée équivalente est une transition sans changement d'état interne du type : $a \longrightarrow a$. Dans ce cas, la phase effective $\theta_{\beta 3}$ s'écrit sous la forme :

$$\theta_{\beta 3} = \Phi_{aa,\beta 3} + \vec{p}_{aa,\beta 3} \cdot (\vec{r}_{\beta 3} + \vec{r}_{aa,\beta 3}) / \hbar$$

où les paramètres $\Phi_{aa,\beta 3}$, $\vec{r}_{aa,\beta 3}$ et $\vec{p}_{aa,\beta 3}$ sont donnés par l'expression 4.10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{aa,\beta 3} := - \frac{\tilde{A}(t,t_1) - \tilde{A}(t_0,t_1)}{2} \hbar \vec{k}_{\beta 3} \\ \vec{r}_{aa,\beta 3} := + \frac{\tilde{B}(t,t_1) - \tilde{B}(t_0,t_1)}{2} \hbar \vec{k}_{\beta 3} / m_\alpha \\ \Phi_{aa,\beta 3} := + \frac{1}{2} \left[(\omega_{\beta 3} - \omega_0) (t - t_0) - \vec{k}_{\beta 3} \cdot (\vec{\xi}(t,t_1) - \vec{\xi}(t_0,t_1)) \right] \\ \quad + \frac{\hbar \vec{k}_{\beta 3}}{8m_\alpha} \left[A(t,t_1) \tilde{B}(t,t_1) + A(t_0,t_1) \tilde{B}(t_0,t_1) - 2A(t_0,t_1) \tilde{B}(t,t_1) \right] \vec{k}_{\beta 3} - \int_{t_0}^t \frac{\delta_{\beta 3}(t',t_1)}{4} dt' \end{array} \right.$$

et où les instants " t_0 ", " t_1 " et " t " sont en fait égaux aux instants suivants :

$$\begin{aligned} "t_0" &= t_1 + T + T' - \frac{\tau_3}{2} \\ "t_1" &= t_3 = t_1 + T + T' \\ "t" &= t_1 + T + T' + \frac{\tau_3}{2} \end{aligned}$$

avec τ_3 la durée de la séparatrice $n^\circ 3$.

Le vecteur position $\vec{r}_{\beta 3}$ intervient également dans l'expression de la phase $\theta_{\beta 3}$. Il correspond à la position centrale - évaluée à l'instant t_3 - du paquet d'ondes associé au chemin atomique β , et peut s'exprimer en fonction des positions et impulsions centrales au temps $t_2 = t_1 + T$:

$$\vec{r}_{\beta 3} = A_{32} \cdot [\vec{r}_{\beta 2} + \vec{r}_{ab,\beta 2}] + B_{32} \cdot [\vec{p}_{\beta 2} + \vec{p}_{ab,\beta 2}] / m_\beta + \vec{\xi}_{32}$$

qui elles-mêmes peuvent être exprimées en fonction des positions et impulsions centrales de ce paquet d'ondes au temps t_1 :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\beta 2} &= A_{21} \cdot [\vec{r}_1 + \vec{r}_{ba,\beta 1}] + B_{21} \cdot [\vec{p}_1 + \vec{p}_{ba,\beta 1}] / m_\alpha + \vec{\xi}_{21} \\ \vec{p}_{\beta 2} / m_\alpha &= C_{21} \cdot [\vec{r}_1 + \vec{r}_{ba,\beta 1}] + D_{21} \cdot [\vec{p}_1 + \vec{p}_{ba,\beta 1}] / m_\alpha + \vec{\phi}_{21}\end{aligned}$$

(les matrices $ABCD\xi$ sont notées selon la règle : $A_{21} := A(t_2, t_1)$).

On peut ainsi déterminer l'expression analytique de chacune des phases effectives $\theta_{\mu i}$, de chacun des vecteurs $\vec{a}_{\mu i}$ et $\vec{b}_{\mu i}$, et de chacune des "différences spatiales" $\Delta r_i = \vec{r}_{\beta i} - \vec{r}_{\alpha i}$, pour finalement obtenir l'expression du déphasage total $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}$.

Ce déphasage rend alors compte non seulement de l'effet de plusieurs champs inertiels et gravitationnels sur l'interféromètre (sous entendu : sur les atomes lors de leur évolution entre les séparatrices), mais également de l'effet Borrmann généralisé, qui n'est autre que l'effet Borrmann atomique usuel (évolution des atomes selon une unique trajectoire pendant l'interaction laser, lorsque certaines conditions particulières sont remplies, voir les parties 3.5, 3.6.1 et 4.1.2) calculé en présence des champs inertiels et gravitationnels.

Le calcul de $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}$ peut être assez long, et il vaut mieux faire appel à un logiciel de calcul formel pour obtenir son expression analytique. Néanmoins, dans le cas d'un interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique temporel, plusieurs observations permettent de simplifier ce calcul. En effet, dans ce cas particulier, les interactions instantanées équivalentes ne dépendent pas du chemin atomique considéré :

$$\vec{r}_{uv,\beta i} = \vec{r}_{uv,\alpha i} = \vec{r}_{uv,i} \quad , \quad \vec{p}_{uv,\beta i} = \vec{p}_{uv,\alpha i} = \vec{p}_{uv,i} \quad , \quad \Phi_{uv,\beta i} = \Phi_{uv,\alpha i} = \Phi_{uv,i}$$

avec :

$$\vec{k}_{\beta i} = \vec{k}_{\alpha i} = \vec{k}_i \quad , \quad \omega_{\beta i} = \omega_{\alpha i} = \omega_i \quad , \quad \phi_{\beta i} = \phi_{\alpha i} = \phi_i$$

ce qui permet, à l'aide des relations démontrées dans la partie 4.1.2 :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{bb,i} &= -\vec{r}_{aa,i} \\ \vec{p}_{bb,i} &= -\vec{p}_{aa,i} \\ \vec{r}_{ab,i} &= -\vec{r}_{ba,i} \\ \vec{p}_{ab,i} &= -\vec{p}_{ba,i}\end{aligned}$$

de simplifier les trois expressions entre crochets de la somme :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\beta\alpha,D} &= \left[\Phi_{ba,1} + \vec{p}_{ba,1} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{ba,1}) / \hbar - \Phi_{aa,1} - \vec{p}_{aa,1} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_{aa,1}) / \hbar \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\vec{p}_1}{\hbar} + \frac{\vec{p}_{ba,1} + \vec{p}_{aa,1}}{2\hbar} \right) \cdot (\vec{r}_{ba,1} - \vec{r}_{aa,1}) \right] \\ &+ \left[\Phi_{ab,2} + \vec{p}_{ab,2} \cdot (\vec{r}_{\beta 2} + \vec{r}_{ab,2}) / \hbar - \Phi_{ba,2} - \vec{p}_{ba,2} \cdot (\vec{r}_{\alpha 2} + \vec{r}_{ba,2}) / \hbar \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{p}_{ab,2} + \vec{p}_{ba,2}}{2\hbar} \cdot [(\vec{r}_{\beta 2} - \vec{r}_{\alpha 2}) + (\vec{r}_{ab,2} - \vec{r}_{ba,2})] - \frac{\vec{p}_{\beta 2} + \vec{p}_{\alpha 2}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{ab,2} - \vec{r}_{ba,2}) \right] \\ &+ \left[\Phi_{aa,3} + \vec{p}_{aa,3} \cdot (\vec{r}_{\beta 3} + \vec{r}_{aa,3}) / \hbar - \Phi_{ab,3} - \vec{p}_{ab,3} \cdot (\vec{r}_{\alpha 3} + \vec{r}_{ab,3}) / \hbar \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{p}_{aa,3} + \vec{p}_{ab,3}}{2\hbar} \cdot [(\vec{r}_{\beta 3} - \vec{r}_{\alpha 3}) + (\vec{r}_{aa,3} - \vec{r}_{ab,3})] - \frac{\vec{p}_{\beta 3} + \vec{p}_{\alpha 3}}{2\hbar} \cdot (\vec{r}_{aa,3} - \vec{r}_{ab,3}) \right]\end{aligned}$$

On obtient en effet les expresions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \left[\Phi_{ba,1} + \overrightarrow{p_{ba,1}} \cdot (\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_{ba,1}}) / \hbar - \Phi_{aa,1} - \overrightarrow{p_{aa,1}} \cdot (\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_{aa,1}}) / \hbar \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\overrightarrow{p_1}}{\hbar} + \frac{\overrightarrow{p_{ba,1}} + \overrightarrow{p_{aa,1}}}{2\hbar} \right) \cdot (\overrightarrow{r_{ba,1}} - \overrightarrow{r_{aa,1}}) \right] \\
 &= \Phi_{ba,1} - \Phi_{aa,1} + (\overrightarrow{p_{ba,1}} - \overrightarrow{p_{aa,1}}) \cdot \left(\overrightarrow{r_1} + \frac{\overrightarrow{r_{ba,1}} + \overrightarrow{r_{aa,1}}}{2} \right) / \hbar - (\overrightarrow{r_{ba,1}} - \overrightarrow{r_{aa,1}}) \cdot \overrightarrow{p_1} / \hbar \\
 &= \boxed{
 \begin{aligned}
 & -\omega_1 t_1 - \phi_1 - (\omega_1 - \omega_0) \tau_1 / 2 \\
 & + \overrightarrow{k_1} \cdot \left[A \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{r_1} + B \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{p_1} / m + \overrightarrow{\xi} \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \right] \\
 & + \overrightarrow{k_1} \cdot \left[A \left(t_1 - \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \tilde{B} \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) - A \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \tilde{B} \left(t_1 - \frac{\tau_1}{2}, t_1 \right) \right] \cdot \hbar \overrightarrow{k_1} / 2m
 \end{aligned}
 }
 \end{aligned}$$

pour le premier terme entre crochets ;

$$\begin{aligned}
 & \left[\Phi_{ab,2} + \overrightarrow{p_{ab,2}} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta 2}} + \overrightarrow{r_{ab,2}}) / \hbar - \Phi_{ba,2} - \overrightarrow{p_{ba,2}} \cdot (\overrightarrow{r_{\alpha 2}} + \overrightarrow{r_{ba,2}}) / \hbar \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\overrightarrow{p_{ab,2}} + \overrightarrow{p_{ba,2}}}{2\hbar} \cdot [(\overrightarrow{r_{\beta 2}} - \overrightarrow{r_{\alpha 2}}) + (\overrightarrow{r_{ab,2}} - \overrightarrow{r_{ba,2}})] - \frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}} + \overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{2\hbar} \cdot (\overrightarrow{r_{ab,2}} - \overrightarrow{r_{ba,2}}) \right] \\
 &= \Phi_{ab,2} - \Phi_{ba,2} + (\overrightarrow{p_{ab,2}} - \overrightarrow{p_{ba,2}}) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{r_{\beta 2}} + \overrightarrow{r_{\alpha 2}}}{2} + \frac{\overrightarrow{r_{ab,2}} + \overrightarrow{r_{ba,2}}}{2} \right) / \hbar - (\overrightarrow{r_{ab,2}} - \overrightarrow{r_{ba,2}}) \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 2}} + \overrightarrow{p_{\alpha 2}}}{2} / \hbar \\
 &= \boxed{
 \begin{aligned}
 & 2(\omega_2 t_2 + \phi_2) \\
 & - \overrightarrow{k_2} \cdot \left[A \left(t_2 + \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{r_1} + B \left(t_2 + \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{p_1} / m + \overrightarrow{\xi} \left(t_2 + \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) + B \left(t_2 + \frac{\tau_2}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2} \right) \cdot \hbar \overrightarrow{k_1} / 2m \right] \\
 & - \overrightarrow{k_2} \cdot \left[A \left(t_2 - \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{r_1} + B \left(t_2 - \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{p_1} / m + \overrightarrow{\xi} \left(t_2 - \frac{\tau_2}{2}, t_1 \right) + B \left(t_2 - \frac{\tau_2}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2} \right) \cdot \hbar \overrightarrow{k_1} / 2m \right]
 \end{aligned}
 }
 \end{aligned}$$

pour le second terme entre crochets ; et :

$$\begin{aligned}
 & \left[\Phi_{aa,3} + \overrightarrow{p_{aa,3}} \cdot (\overrightarrow{r_{\beta 3}} + \overrightarrow{r_{aa,3}}) / \hbar - \Phi_{ab,3} - \overrightarrow{p_{ab,3}} \cdot (\overrightarrow{r_{\alpha 3}} + \overrightarrow{r_{ab,3}}) / \hbar \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\overrightarrow{p_{aa,3}} + \overrightarrow{p_{ab,3}}}{2\hbar} \cdot [(\overrightarrow{r_{\beta 3}} - \overrightarrow{r_{\alpha 3}}) + (\overrightarrow{r_{aa,3}} - \overrightarrow{r_{ab,3}})] - \frac{\overrightarrow{p_{\beta 3}} + \overrightarrow{p_{\alpha 3}}}{2\hbar} \cdot (\overrightarrow{r_{aa,3}} - \overrightarrow{r_{ab,3}}) \right] \\
 &= \Phi_{aa,3} - \Phi_{ab,3} + (\overrightarrow{p_{aa,3}} - \overrightarrow{p_{ab,3}}) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{r_{\beta 3}} + \overrightarrow{r_{\alpha 3}}}{2} + \frac{\overrightarrow{r_{aa,3}} + \overrightarrow{r_{ab,3}}}{2} \right) / \hbar - (\overrightarrow{r_{aa,3}} - \overrightarrow{r_{ab,3}}) \cdot \frac{\overrightarrow{p_{\beta 3}} + \overrightarrow{p_{\alpha 3}}}{2} / \hbar \\
 &= \boxed{
 \begin{aligned}
 & -\omega_3 t_3 - \phi_3 + (\omega_3 - \omega_0) \tau_3 / 2 \\
 & + \overrightarrow{k_3} \cdot \left[A \left(t_3 - \frac{\tau_3}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{r_1} + B \left(t_3 - \frac{\tau_3}{2}, t_1 \right) \cdot \overrightarrow{p_1} / m + \overrightarrow{\xi} \left(t_3 - \frac{\tau_3}{2}, t_1 \right) + B \left(t_3 - \frac{\tau_3}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2} \right) \cdot \hbar \overrightarrow{k_1} / 2m \right]
 \end{aligned}
 }
 \end{aligned}$$

pour le dernier terme entre crochets.

On obtient ainsi, en sommant les trois termes encadrés ci-dessus, l'expression du déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}$, qui rend compte :

- de l'effet des champs inertiels et gravitationnels sur tout l'interféromètre

- de l'effet Borrmann généralisé, ie de l'effet Borrmann en présence de ces champs inertiels et gravitationnels.

Lorsque les trois séparatrices $\pi/2 - \pi - \pi/2$ sont issues d'un même faisceau laser :

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{k}_2 = \vec{k}_3 = \vec{k} \\ \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 = \omega \\ \tau_1 &= \frac{\tau_2}{2} = \tau_3 = \tau\end{aligned}$$

ce déphasage se simplifie alors en :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha,D} = -(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) + \Delta\phi_{r1} + \Delta\phi_{p1} + \Delta\phi_g + \Delta\phi_{recul}$$

où l'on incorporé par simplicité les termes $\omega_i t_i$ dans les phases laser ϕ_i :

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i + \omega_i t_i$$

et où l'on a défini les quatre déphasages suivants :

$$\Delta\phi_{r1} := \vec{k} \cdot [A(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1) - A(t_2 + \tau, t_1) - A(t_2 - \tau, t_1) + A(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1)] \cdot \vec{r}_1$$

pour la partie du déphasage qui dépend de la position centrale \vec{r}_1 de la première séparatrice de l'interféromètre ;

$$\Delta\phi_{p1} := \vec{k} \cdot [B(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1) - B(t_2 + \tau, t_1) - B(t_2 - \tau, t_1) + B(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1)] \cdot \vec{p}_1/m$$

pour la partie du déphasage qui dépend de l'impulsion centrale \vec{p}_1 du paquet d'ondes entrant dans la première séparatrice de l'interféromètre ;

$$\Delta\phi_g := \vec{k} \cdot [\vec{\xi}(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1) - \vec{\xi}(t_2 + \tau, t_1) - \vec{\xi}(t_2 - \tau, t_1) + \vec{\xi}(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1)]$$

pour la partie du déphasage qui dépend du vecteur gravité \vec{g} (et plus généralement des termes linéaires de l'Hamiltonien H_{ext}) ; et :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{recul} := \vec{k} \cdot [B(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1 - \frac{\tau}{2}) - B(t_2 + \tau, t_1 - \frac{\tau}{2}) \\ - B(t_2 - \tau, t_1 - \frac{\tau}{2}) + B(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1 - \frac{\tau}{2})] \cdot \hbar \vec{k} / 2m\end{aligned}$$

pour la partie du déphasage qui dépend de façon quadratique en le vecteur d'onde laser \vec{k} .

Lorsque l'on néglige les durées d'interaction laser τ_i par rapport aux différents temps de vol interférométriques T_i , on retrouve alors bien les résultats de la partie précédente, à savoir :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{r1} &= \vec{k} \cdot [1 - 2A(t_2, t_1) + A(t_3, t_1)] \cdot \vec{r}_1 \\ \Delta\phi_{p1} &= \vec{k} \cdot [B(t_3, t_1) - 2B(t_2, t_1)] \cdot \vec{p}_1 / m \\ \Delta\phi_g &= \vec{k} \cdot [\vec{\xi}(t_3, t_1) - 2\vec{\xi}(t_2, t_1)] \\ \Delta\phi_{recul} &= \vec{k} \cdot [B(t_3, t_1) - 2B(t_2, t_1)] \cdot \hbar \vec{k} / 2m\end{aligned}$$

Comme au paragraphe précédent, considérons maintenant un Hamiltonien indépendant du temps, du type :

$$H_{ext} = \frac{\vec{p}_{op}^2}{2m} - \vec{r}_{op} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_{op} - m \vec{g} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{m}{2} \vec{r}_{op} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_{op}$$

qui permet de décrire l'effet simultané de rotations $\vec{\Omega}$ (à travers α , qui est tel que $\alpha \vec{u} := -\vec{\Omega} \times \vec{u}$ pour tout vecteur \vec{u}), d'accélérations \vec{g} (gravité uniforme par exemple) et de gradients d'accélération γ (gradient de gravité par exemple).

Dans ce cas, pour obtenir les matrices ABCD qui interviennent dans le déphasage précédent, on peut utiliser les formules exactes établies dans l'appendice D, ou les développements de Taylor en αT et γT^2 donnés dans l'appendice C.

Si l'on considère ces développements pour des temps de vol interférométriques égaux :

$$t_3 - t_2 = T' = t_2 - t_1 = T$$

(des expressions analogues s'obtiennent facilement pour $T' \neq T$), les quatre parties précédentes du déphasage total s'écrivent sous la forme :

$$\Delta\phi_{r1} := \vec{k} \cdot \left[(\alpha^2 + \gamma) T^2 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} + \dots \right] \cdot \vec{r}_1$$

$$\Delta\phi_{p1} = \vec{k} \cdot \left[2\alpha T^2 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} + (3\alpha^2 + \gamma) T^3 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} + \dots \right] \cdot \vec{p}_1 / m$$

$$\begin{aligned}\Delta\phi_g &= \vec{k} \cdot \left[T^2 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} + 2\alpha T^3 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 \left\{ 1 - \frac{8}{7} \tau/T - \frac{3}{7} (\tau/T)^2 - \frac{1}{14} (\tau/T)^3 - \frac{15}{112} (\tau/T)^4 \right\} + \dots \right] \cdot \vec{g}\end{aligned}$$

$$\Delta\phi_{recul} = \vec{k} \cdot \left[(3\alpha^2 + \gamma) T^3 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tau/T - \frac{5}{4} (\tau/T)^2 - \frac{3}{8} (\tau/T)^3 \right\} + \dots \right] \cdot \hbar \vec{k} / 2m$$

et le déphasage total s'obtient en sommant ces quatre contributions :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha,D} = -(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) + \Delta\phi_{r1} + \Delta\phi_{p1} + \Delta\phi_g + \Delta\phi_{recul}$$

On peut également introduire - comme au paragraphe précédent - la vitesse de lancement des atomes prise dans le référentiel non-tournant \vec{v}_{at} :

$$\vec{v}_{at} = \vec{p}_1/m - \vec{\Omega} \times \vec{r}_1 = \vec{p}_1/m + \alpha \cdot \vec{r}_1$$

et utiliser la relation :

$$\vec{\xi}(T) = (B(T) \cdot \alpha - A(T) + 1) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g}$$

(valable pour tout Hamiltonien H_{ext} indépendant du temps, voir l'appendice B), pour réécrire le déphasage total $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}$ sous la forme :

$$\Delta\phi_{\beta\alpha,D} = -(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) + \Delta\phi_{vat} + \Delta\phi_{gT} + \Delta\phi_{recul}$$

avec :

$$\Delta\phi_{vat} := \vec{k} \cdot \left[B\left(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1\right) - B(t_2 + \tau, t_1) - B(t_2 - \tau, t_1) + B\left(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1\right) \right] \cdot \vec{v}_{at}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{gT} := & \vec{k} \cdot \left[\{B(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1) \cdot \alpha - A(t_1 + \frac{\tau}{2}, t_1) + 1\} \right. \\ & - \{B(t_2 + \tau, t_1) \cdot \alpha - A(t_2 + \tau, t_1) + 1\} - \{B(t_2 - \tau, t_1) \cdot \alpha - A(t_2 - \tau, t_1) + 1\} \\ & \left. + \{B(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1) \cdot \alpha - A(t_3 - \frac{\tau}{2}, t_1) + 1\} \right] \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot (\vec{g} + \gamma \cdot \vec{r}_1 - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1) \end{aligned}$$

et ainsi faire apparaître explicitement le vecteur de “gravité” usuel :

$$\vec{g}_T = \vec{g} + \gamma \cdot \vec{r}_1 - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1$$

(tenant compte, entre autres, de l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre).

Quant au développement de Taylor (en αT et γT^2) de ce terme, il s'écrit directement à l'aide de l'expression de $\Delta\phi_g$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{gT} = & \vec{k} \cdot \left[T^2 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} + 2\alpha T^3 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 \left\{ 1 - \frac{8}{7} \tau/T - \frac{3}{7} (\tau/T)^2 - \frac{1}{14} (\tau/T)^3 - \frac{15}{112} (\tau/T)^4 \right\} + \dots \right] \cdot (\vec{g} + \gamma \cdot \vec{r}_1 - \alpha^2 \cdot \vec{r}_1) \end{aligned}$$

L'observation de ces diverses expressions nous conduit alors aux remarques suivantes :

1. Chacunes des contributions au déphasage $\Delta\phi_{\beta\alpha,D}$ dépend des durées d'interaction des séparatrices τ (on peut facilement estimer l'importance de ces effets grâce aux tableaux numériques de l'appendice H).

2. Cette dépendance est linéaire, ce qui implique des corrections de l'ordre de τ/T pour les déphasages habituellement calculés (en gyrométrie, gravimétrie, gradiométrie ...). Notons que **ces corrections dépendent de la définition de la durée T** . Par exemple, avec la définition suivante :

$$T = \tilde{T} + \tau/2$$

(\tilde{T} est ainsi égale à la durée séparant l'instant de sortie de la première séparatrice de l'instant central de la deuxième), on obtient des corrections de l'ordre de $(\tau/T)^2$ uniquement.⁴

3. Une combinaison particulière de τ et T revient à plusieurs reprises :

$$1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2$$

Cette quantité n'est autre que le rapport de la surface de l'interféromètre calculée au premier ordre (ie sans effet inertiel, ni gravitationnel⁵) avec celle réellement délimitée par les bras interférométriques :

$$\frac{\text{aire de l'interf. ato. AVEC effet Borrmann}}{\text{aire de l'interf. ato. SANS effet Borrmann}} \sim 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2$$

En effet, comme on peut le voir sur le schéma de la figure 5.4, la surface embrassée par les chemins atomiques est très différente selon que l'on considère une modélisation des séparatrices ignorant ou non l'effet Borrmann atomique. En outre, on remarque que la surface réelle est inférieure à la surface obtenue de façon simplifiée (ie avec une modélisation des séparatrices du type infiniment fine ou ttt champ faible).

$$2\alpha T^2 \left\{ 1 - \tau/T - \frac{3}{4} (\tau/T)^2 \right\}$$

4. Ce ne sont pas exactement les mêmes corrections qui interviennent dans l'expression des déphasages $\Delta\phi_{p1}$ et $\Delta\phi_{recul}$. Il en résulte une légère modification [en $(3\alpha^2 + \gamma) \cdot \tau/T$] de l'angle initial de Bragg, qu'il serait très intéressant de valider expérimentalement (en toute rigueur, il y a un terme supplémentaire dans $\Delta\phi_{recul}$, proportionnel à $\vec{k} \cdot \alpha \cdot \vec{k}$, mais qui est nul à cause de l'anti-symétrie de α).

Les corrections apportées aux déphasages par cette modélisation (très simplifiée) de l'effet Borrmann atomique peuvent être très importantes. Prenons, par exemple, le cas d'un gravimètre pour lequel on aurait $\tau \sim 5.10^{-6}$ s et $T \sim 5.10^{-2}$ s. Dans ce cas, les corrections apportées à la mesure absolue d'une accélération seraient de l'ordre de $\sim 10^{-4}$ en valeur relative, ie bien supérieures au niveau de précision recherché (voir l'introduction du mémoire). De même, pour une expérience de gyrométrie atomique où on aurait $\tau \sim 2.10^{-5}$ s et $T \sim 3.10^{-2}$ s, la correction apportée à la mesure absolue d'une vitesse de rotation serait de l'ordre de $\sim 10^{-3}$ (en valeur relative), ce qui dépasserait également la précision affichée de ces appareils.

Avec une autre définition du temps de vol T (par exemple avec $T = \tilde{T} + \tau/2$, où \tilde{T} est la durée utilisée pour calculer le déphasage à l'ordre 0 en τ/\tilde{T}), ces corrections peuvent n'être que du deuxième ordre

⁴Une autre définition communément utilisée est la suivante [66] :

$$T = \tilde{T} + 3\tau/2$$

(\tilde{T} est alors égale à la durée séparant l'instant de sortie de la première séparatrice de l'instant d'entrée dans la deuxième, voir la figure 5.4).

Le terme $T^2 - \tau T - \frac{3}{4}\tau^2$ devient ainsi égal à :

$$\tilde{T} (\tilde{T} + 2\tau)$$

(on retrouve alors bien les résultats de la référence [66], les corrections données ici étant du deuxième ordre en τ/T).

⁵Au-delà du premier ordre, l'interféromètre n'est plus fermé, et il faut définir ce que l'on entend par "surface" dans ce cas.

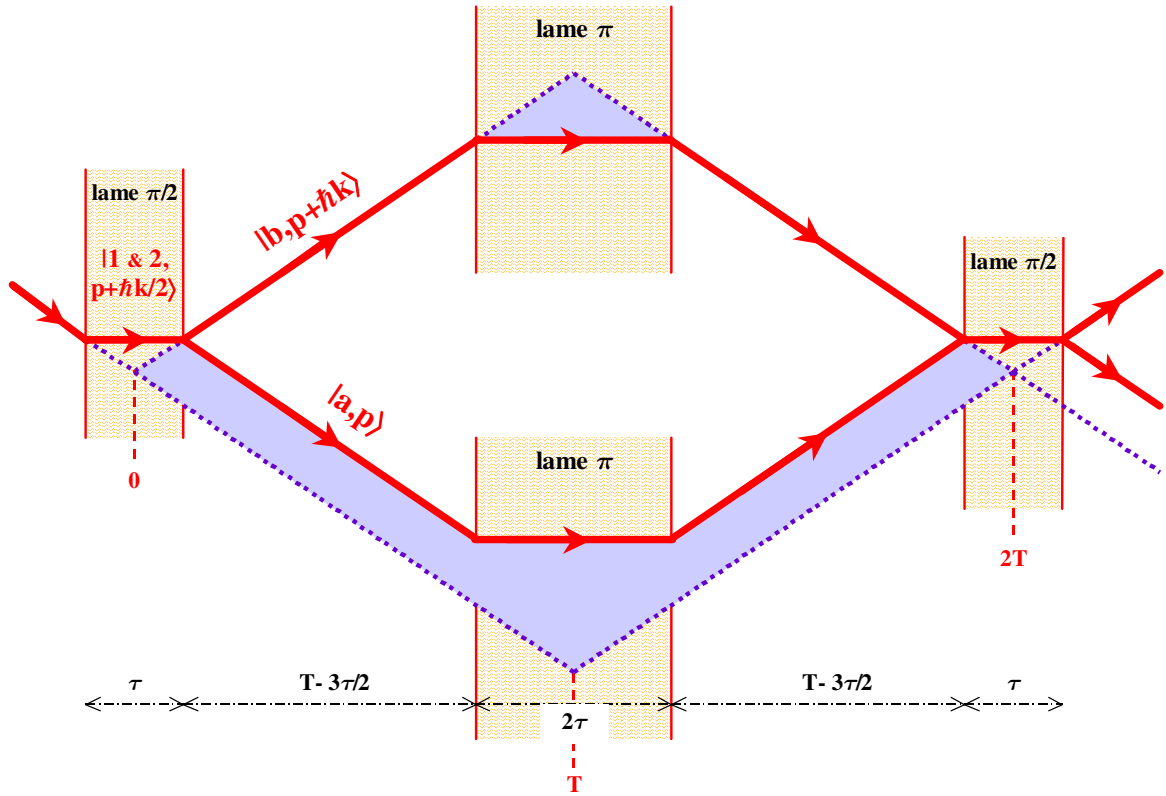


FIG. 5.4: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre atomique de Ramsey-Bordé symétrique. Les trajectoires des centres des paquets d'ondes atomiques sont représentées pour deux types de modélisation des séparatrices. La trajectoire en trait plein correspond à la modélisation *ttt* champs forts (ie avec effet Borrmann), celle en trait pointillé à la modélisation infiniment fine ou *ttt* champ faible (sans effet Borrmann). Les aires embrassées dans ces deux cas sont très différentes (on a grisé l'aire superflue).

en τ/\tilde{T} , ie de l'ordre de 10^{-8} et 10^{-10} en valeur relative respectivement pour les mesures d'accélération et de vitesse de rotation.

La pertinence de ces corrections est à considérer avec précaution, celles-ci n'ayant dans ce cas qu'une valeur illustrative du fait que nous n'avons considéré qu'un cas très simplifié de la modélisation *ttt champ fort* établie au chapitre 3. Nous avons en effet supposé que les conditions d'existence de l'effet Borrmann étaient vérifiées pour chaque séparatrice (ie que le désaccord généralisé est nul pendant toute la durée de chaque interaction laser, ce qui implique, en toute rigueur, une modulation de la fréquence laser pendant l'interaction pour compenser l'effet Doppler d'origine inertielle et gravitationnelle). On a également négligé tous les effets liés aux modifications de largeurs des paquets d'ondes, et on n'a pris en compte ni l'influence du processus de détection, ni celle de la structure de la source atomique (intégration sur les distributions statistiques décrivant le nuage atomique initial).

Il serait donc intéressant de poursuivre cette étude (numériquement au moins) pour évaluer la véritable dépendance du déphasage interférométrique réel en la durée τ des séparatrices. Soulignons qu'une telle étude a été entreprise dans le cas d'un gravimètre atomique (dans l'équipe de Chu [63, 66]), mais qu'aucun effet significatif n'a encore été mis en évidence.

Le déphasage écrit plus haut est une version extrêmement simplifiée du déphasage que l'on peut obtenir grâce à la modélisation des interféromètres atomiques proposée dans ce mémoire. L'effet Borrmann, même dans sa version généralisée (ie en présence de champs inertiels et gravitationnels), n'est

en effet qu'un aspect particulier de la structuration des paquets d'ondes atomiques dans une séparatrice. D'autres effets, comme la modification des largeurs de paquets d'ondes (sélectivité complexe dans l'espace des phases) ou la multiplication de ces paquets d'ondes, sont également à prendre en compte. Par exemple, la sélectivité en vitesse réalisée par les séparatrices est essentielle si l'on veut rendre compte de façon précise du contraste du signal de franges mesuré.

En outre, les interactions laser ont peu de chance d'être toutes à résonance parfaite. Il en résulte que le paramètre d'inélasticité y pourra être non nul pour certaines de ces séparatrices, et que la condition d'existence de l'effet Borrmann disparaîtra pour celles-ci. Les atomes ne suivront alors plus une seule trajectoire dans ces séparatrices, et il en résultera une multiplication des chemins atomiques cohérents dans l'interféromètre. Le signal de franges sera ainsi égal à la somme de nombreuses contributions élémentaires (voir le début de ce chapitre). Par exemple, pour un interféromètre de type Ramsey-Bordé symétrique, il y aura 16 chemins atomiques cohérents distincts et 120 signaux élémentaires à sommer en sortie (voir la figure 5.5). Ce point est d'autant plus important qu'il s'est révélé fondamental dans l'interprétation du déphasage observé en sortie des interféromètres neutroniques [104, 15].

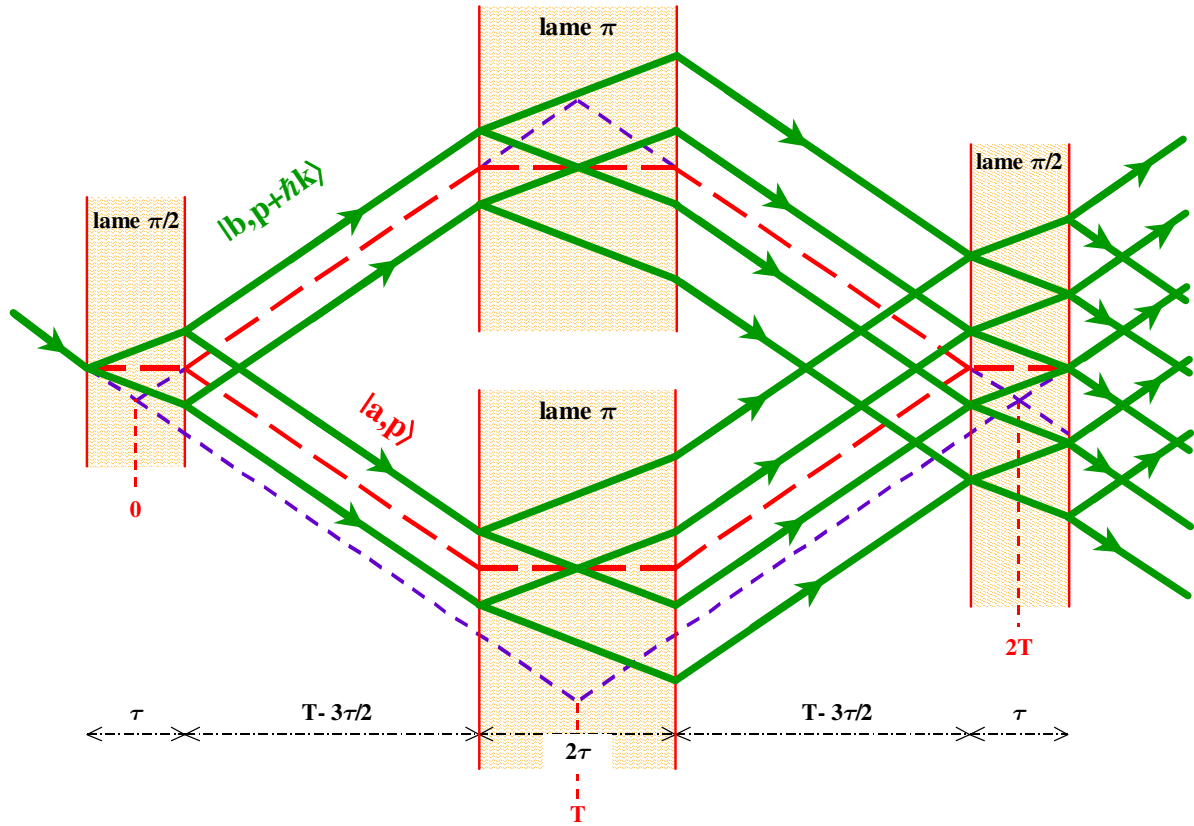


FIG. 5.5: Diagramme spatio-temporel d'un interféromètre atomique de Ramsey-Bordé symétrique lorsque les interactions dans les séparatrices ne sont pas à résonance parfaite (il n'y a alors plus d'effet Borrmann). A chaque séparatrice, le nombre de chemins atomiques est multiplié par 4. En sortie, il y a 16 chemins atomiques cohérents et 120 contributions au signal de franges total.

Remarque finale : autres géométries usuelles

La modélisation établie au chapitre précédent, dont on a détaillé un protocole d'utilisation dans la partie 5.1, s'applique à tout type d'interféromètre atomique. Afin de l'illustrer, nous avons présenté le

cas des interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques (dont une étude plus complète reste à réaliser), aujourd'hui très largement utilisés en gyrométrie, en gravimétrie, en gradiométrie...

D'autres géométries sont également très importantes, parmi lesquelles la configuration en fontaine (avec deux séparatrices, voir la figure 4.14) utilisée dans les horloges micro-ondes, et la configuration dite de "Ramsey-Bordé asymétrique" (avec quatre séparatrices, voir la figure 4.17) utilisée dans les horloges optiques et pour la mesure de la constante de structure fine (via h/m). Si le traitement des fontaines atomiques est relativement simple (on retrouve alors les différents termes du déphasage exposés dans la référence [35]), celui des interféromètres asymétriques est plus complexe, et il n'a pas encore été réalisé à ce jour. Il serait néanmoins très intéressant de poursuivre l'application de la modélisation générale développée dans ce travail à ces interféromètres atomiques dissymétriques, afin d'évaluer les corrections d'ordre supérieur qu'elle implique sur leur déphasage de sortie.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Ce travail a permis l'étude et la modélisation des différents éléments constitutifs d'un interféromètre atomique (séparatrices, zones sombres, source atomique et processus de détection), en vue non seulement de sa modélisation globale, mais également d'une compréhension plus approfondie et complète des processus mis en jeu : évolution d'ondes matérielles pour un Hamiltonien quelconque, action d'une séparatrice laser en présence de champs inertiels et gravitationnels, structuration dispersive des séparatrices et effet Borrmann généralisé, présence d'invariants symplectiques...

En ce qui concerne la modélisation des interféromètres atomiques, le résultat majeur est l'obtention d'une expression analytique du signal de franges (complet, avec déphasage, contraste et amplitude) valable pour :

- toute géométrie d'interféromètre
- tout type de source atomique ou moléculaire (thermique, froide, ultrafroide), et/ou tout type de paquet d'ondes initial
- tout type de séparatrice, spatiale ou temporelle, pour laquelle l'approximation à deux ondes est valide (séparatrice temporelle à deux niveaux effectifs, séparatrice spatiale en régime de Bragg...)
- tous types de champs inertiels et gravitationnels (traités simultanément) dont le potentiel représentatif est de degré au plus deux en position et impulsion (rotations, accélérations, gradients d'accélération, ondes gravitationnelles...), les termes d'ordre supérieur étant, par conséquent, accessibles de façon perturbative (essentiel pour les expériences dont l'objectif est de mesurer la constante G (projet MAGIA par exemple [67]) ou l'effet Lense-Thirring [projet HYPER [76]])
- tout type de détection

Grâce à la modélisation des séparatrices en champs forts du chapitre 3, cette expression rend également compte d'effets nouveaux comme :

- la structuration dispersive ayant lieu dans les séparatrices (sélectivité en vitesse transverse, multiplication des paquets d'ondes en sortie, dispersion anormale et effet Borrmann généralisé...), et ce, pour tout paquet d'ondes atomique
- l'action simultanée de plusieurs champs inertiels et gravitationnels sur les séparatrices

Il serait désormais intéressant de tester la validité des corrections d'ordre supérieur de ce modèle, en mettant en oeuvre la méthode pratique d'utilisation de la modélisation détaillée au chapitre 5.

Par ailleurs, signalons qu'un des facteurs essentiels d'amélioration de cette modélisation réside dans le traitement des séparatrices laser. En effet, de nombreuses approximations sont couramment réalisées pour obtenir une modélisation analytique des séparatrices : processus de relaxation négligés,

état quasi-classique du champ laser servant de séparatrice, approximation des ondes tournantes, approximation dipolaire... Il serait donc opportun de reprendre les calculs du chapitre 3 pour identifier les modifications auxquelles conduirait la prise en compte des effets jusqu'alors négligés.

D'autre part, la présente étude se limite aux séparatrices à ondes laser progressives (équivalentes), alors qu'il est nécessaire d'aller au-delà de l'approximation à deux ondes si l'on souhaite pouvoir rendre compte des séparatrices matérielles, ou plus généralement de celles fonctionnant en régime de Kapitza-Dirac (voir partie 3.2).

Outre les modélisations réalisées, ce travail visait plusieurs objectifs théoriques.

Il a notamment conduit à une nouvelle méthode de résolution de l'équation de Schrödinger valable pour tout Hamiltonien (dépendant ou non du temps), basée sur la théorie des opérateurs intégrales premières et qui offre la possibilité de généraliser le formalisme ABCD à tout type d'Hamiltonien.

L'étude des séparatrices laser a également contribué à améliorer la compréhension de leur fonctionnement en présence de champs inertiels et gravitationnels (généralisation du schéma d'évolution ttt), ainsi que de leurs effets structurant et dispersif (effet Borrmann généralisé pour un paquet d'ondes atomique de forme quelconque).

Enfin, plusieurs outils mathématiques, dont l'application n'est pas restreinte à l'optique atomique (utilisation possible dans les domaines de la résonance magnétique et de l'informatique quantique par exemple), ont été développés :

- méthode des états adiabatiques successifs
- méthode de l'élimination opératorielle
- utilisation d'invariants symplectiques pour résoudre ou simplifier certaines équations d'évolution

Parallèlement, il a été réalisé un travail de compilation et d'actualisation de résultats importants susceptibles de contribuer à l'étude des séparatrices laser, par exemple au sujet des dernières méthodes de résolution exacte du problème des séparatrices (théorie $z(t)$), ou encore des dernières avancées concernant le développement de Magnus.

A cet égard, rappelons qu'il serait intéressant de considérer expérimentalement des cas exactement résolubles (avec des formes d'impulsion laser plus complexes par exemple), afin de gagner en précision sur la modélisation théorique, quitte à perdre en efficacité lors de la séparation atomique expérimentale.

D'autre part, il apparaît aujourd'hui nécessaire de mettre en évidence et de caractériser expérimentalement l'effet Borrmann, la structuration dispersive et les effets inertiels et gravitationnels présents dans une séparatrice (d'autant plus si l'on considère des séparatrices à deux ou trois dimensions, comme cela est suggéré dans [79]).

Il est également essentiel de caractériser avec précision l'influence des différentes sources atomiques sur le signal de franges d'un interféromètre atomique, et d'évaluer les éléments non-diagonaux de la matrice densité initiale (en représentation impulsion) pour chacune de ces sources. L'utilisation de sources cohérentes ne devrait d'ailleurs plus être limitée à un usage démonstratif, mais entrer dans une phase d'utilisation réelle comme sources des interféromètres atomiques, avec le développement d'outils de guidage et de séparation bien contrôlés et miniaturisés, ie avec le développement d'une véritable "optique atomique intégrée cohérente" (d'où la nécessité de préciser et de contrôler la perte de cohérence due aux couplages de la matière à son environnement [miroirs, champs extérieurs...]). Les progrès obtenus en sensibilité et en stabilité permettront alors d'envisager plus sereinement des expériences spatiales de physique fondamentale (détection d'effets relativistes ténus, comme les ondes gravitationnelles ou l'effet Lense-Thirring) ou appliquée (horloges atomiques et senseurs inertiels ultra-stables pour la navigation).

L'étape suivante consistera à développer une optique purement atomique, où les sources seront d'authentiques laser à atomes (amplification réelle d'ondes de matière [238, 239, 240, 241]), et où les séparatrices seront issues, par exemple, de mélanges à quatre ondes matérielles.

Enfin, eut égard à l'évolution d'ondes de matière en présence de champs extérieurs quelconques, il convient d'examiner la pertinence de l'utilisation des opérateurs intégrales premières, et d'appliquer les résultats de la partie 2.4 à des Hamiltoniens plus que quadratiques (mais pour lesquels on connaît une solution analytique à l'équation de Schrödinger correspondante), afin de préciser le lien fondamental entre fonction génératrice, propagateur et forme de la solution générale.

Un aspect complémentaire à cette généralisation du formalisme ABCD serait d'aller au-delà de l'approximation linéaire de la Relativité Générale. Un tel travail, récemment entrepris par Bordé, consiste à généraliser les équations du mouvement pour des effets relativistes traités en champ fort, et à introduire une quatrième dimension sous la forme d'un temps propre, comme variable conjuguée de la masse.

Annexe A

Formules mathématiques utiles

Dans cet appendice, les lettres majuscules font référence à des opérateurs (plus particulièrement à une famille finie d'opérateurs d'un espace de Banach munie de la norme $\|\dots\|$) ou plus simplement à des matrices carrées. Le signe \sim indique la transposition, et il n'est pas indiqué sur les vecteurs.

La plupart des formules de cet appendice sont triviales ou faciles à démontrer et peuvent être trouvées dans les ouvrages généraux de physique. Les autres (en particulier les généralisations des parties (A.5) et (A.6)) ont dû certainement être déjà démontrées dans des traités de mathématique ou de physique théorique.

A.1 Propriétés de l'opérateur trace

(en dimension finie)

$$\begin{aligned}Tr(AB) &= Tr(BA) \\Tr(\tilde{A}) &= Tr(A) \\Tr(ABC) &= Tr(BCA) = Tr(CAB) \\e^{Tr(A)} &= Det(e^A) \\Tr(A) &= \ln(Det(e^A)) \\Tr\left(\frac{dA}{dt} \cdot A^{-1}\right) &= \frac{d}{dt}(\ln(Det(A)))\end{aligned}$$

A.2 Commutateurs

$$\begin{aligned}[A, B] &= AB - BA = -[B, A] \\ [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C]\end{aligned}$$

$$0 = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

$$\begin{aligned}[A, [A, B]] &= A^2B - 2ABA + BA^2 \\ [[A, B], B] &= AB^2 - 2BAB + B^2A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A^2 + 2AB + B^2 - [A, B]\end{aligned}$$

A.3 Commutateurs avec les opérateurs canoniques

On pose ici : $\vec{r} := \vec{r}_{op}$ et $\vec{p} := \vec{p}_{op}$.

$$\begin{aligned}[\vec{r}, f(\vec{r}, \vec{p})] &= i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}} f \\ [\vec{p}, f(\vec{r}, \vec{p})] &= -i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{r}} f\end{aligned}$$

$$[\vec{u} \cdot \vec{r}, \vec{v} \cdot \vec{p}] = i\hbar \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$[A \vec{r}, B \vec{p}] := \vec{r} \tilde{A} B \vec{p} - \vec{p} \tilde{B} A \vec{r} = i\hbar \text{Tr}(\tilde{A} B)$$

$$\begin{aligned}[\vec{r} C \vec{r}, \vec{v} \cdot \vec{p}] &= 2i\hbar \vec{v} C \vec{r} \\ [\vec{p} D \vec{p}, \vec{u} \cdot \vec{r}] &= -2i\hbar \vec{u} D \vec{p} \\ [\vec{r} C \vec{r}, \vec{p} D \vec{p}] &= 2i\hbar (\vec{r} C D \vec{p} + \vec{p} D C \vec{r}) \\ &= 4i\hbar \vec{r} C D \vec{p} + 2\hbar^2 \text{Tr}(CD)\end{aligned}$$

A.4 Intégration d'équations matricielles ou opératoriels

Définition de l'opérateur de Dyson

L'opérateur de Dyson, ou d'ordonancement dans le temps, \mathcal{T} est défini tel que :

$$X(t) = \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) X_0$$

soit solution de l'équation :

$$\frac{d}{dt} X = A(t) X$$

Expressions de l'opérateur \mathcal{T} et propriétés

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t A(t') dt'} \right) &= \prod_{dt_j \rightarrow 0} \exp(A(t_j) dt_j) \\
&= \prod_{dt_j \rightarrow 0} (1 + A(t_j) dt_j) \\
&= 1 + \int_{t_0}^t A(t') dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} A(t') A(t'') dt' dt'' + \dots \\
&= 1 + \int_{t_0}^t A(t') dt' + \int_{t_0}^t \int_{t'}^t A(t'') A(t') dt' dt'' + \dots
\end{aligned}$$

où le passage de l'avant dernière ligne à la dernière s'effectue grâce à la propriété suivante (résultant de l'identité des domaines d'intégration) :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' A(t'') A(t') &= \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' A(t'') A(t') \\
&= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t') A(t'')
\end{aligned}$$

Cette propriété conduit également à :

$$\int_{t_0}^t \int_{t'}^t [[A(t), A(t')], A(t'')] dt' dt'' = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [[A(t), A(t'')], A(t')] dt' dt''$$

$$\left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right)^2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t') A(t'') + A(t'') A(t')] dt' dt''$$

$$\left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) . B . \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} A(t') . B . A(t'') dt' dt'' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} A(t'') . B . A(t') dt' dt''$$

Quelques autres expressions de l'opérateur \mathcal{T} **1. Méthode de Magnus [169] :**

$$\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t A(t') dt'} \right) = e^{\Omega(t)} \tag{A.1}$$

avec (voir la partie 3.4.3 pour le développement itératif et la formule explicite à tous les ordres) :

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= \int_{t_0}^t A(t') dt' + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t'), A(t'')] dt' dt'' \\
&\quad + \frac{1}{6} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} [[A(t'), A(t'')], A(t''')] dt' dt'' dt''' \\
&\quad + \frac{1}{6} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} [A(t'), [A(t''), A(t''')]] dt' dt'' dt''' + \dots
\end{aligned}$$

2. Méthodes de Fer [170, 171] (symétriques ou non) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t A(t') dt'} \right) &= e^{F_1(t)} . e^{F_2(t)} \dots \\
&= e^{S_1(t)} . e^{S_2(t)} \dots e^{S_2(t)} . e^{S_1(t)} \\
&= \dots e^{T_2(t)} . e^{T_1(t)} . e^{T_2(t)} \dots
\end{aligned}$$

3. **Méthode de Cayley** [172, 171] :

$$\mathcal{T} \left(e^{\int_{t_0}^t A(t') dt'} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} C(t) \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} C(t) \right)$$

4. ...

Autres équations matricielles

L'équation :

$$\frac{d}{dt} X = A(t) \cdot X$$

a pour solution :

$$X(t) = \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \cdot X_0$$

De même, l'équation :

$$\frac{d}{dt} X = X \cdot A(t)$$

a pour solution (où le signe \sim indique la transposition) :

$$X(t) = X_0 \cdot \mathcal{T} \left(\exp \left(\widetilde{\int_{t_0}^t \tilde{A}(t') dt'} \right) \right)$$

Il faut en effet faire attention à :

$$\mathcal{T} \left(\exp \left(\widetilde{\int_{t_0}^t A(t') dt'} \right) \right) \neq \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t \tilde{A}(t') dt' \right) \right)$$

et :

$$\left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} \neq \mathcal{T} \left(\exp \left(- \int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right)$$

Enfin, l'équation :

$$\frac{d}{dt} X = A(t) \cdot X + X \cdot B(t)$$

a pour solution :

$$X(t) = \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \cdot X_0 \cdot \mathcal{T} \left(\exp \left(\widetilde{\int_{t_0}^t \tilde{B}(t') dt'} \right) \right)$$

A.5 Commutateurs et exponentielles de matrice

$$e^A . B . e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (\text{A.2})$$

ou :

$$[e^A, B] = \left([A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \right) e^A$$

De même :

$$e^A f(B) e^{-A} = f(e^A . B . e^{-A}) \quad (\text{A.3})$$

Exemple :

$$e^A . e^B . e^{-A} = e^{B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots}$$

– **Généralisations :**

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) . B . \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} \\ &= B + \int_{t_0}^t [A(t'), B] dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t'), [A(t''), B]] dt' dt'' + \dots \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} & \left[\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right), B \right] \\ &= \left(\int_{t_0}^t [A(t'), B] dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t'), [A(t''), B]] dt' dt'' + \dots \right) . \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De même, on a aussi : (attention à l'ordre des commutateurs)

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} . B . \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \\ &= B + \int_{t_0}^t [B, A(t')] dt' + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [[B, A(t')], A(t'')] dt' dt'' + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

et :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) . f(B) . \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} \\ &= f \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) . B . \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) . \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t B(t') dt' \right) \right) . \left(\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) \right)^{-1} \\ &= \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t \left[B(t') + \int_{t_0}^{t'} [A(t''), B(t')] dt'' + \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} [A(t''), [A(t'''), B(t')]] dt'' dt''' + \dots \right] dt' \right) \right) \end{aligned}$$

A.6 Formules de Glauber et de Baker-Campbell-Hausdorff

Formules de Glauber et application

A partir du développement de la fonction exponentielle, on peut obtenir toutes sortes de formules, semblables à celle dite de Glauber :

$$e^{A+B} = e^A . e^B . e^{-\frac{1}{2}[A,B]} . e^{\frac{1}{6}([A,[A,B]] - 2[[A,B],B])} . \dots \quad (\text{A.6})$$

$$e^{A+B} = e^A . e^{B - \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{6}([A,[A,B]] - \frac{1}{2}[[A,B],B]) + \dots}$$

$$e^{A+B} = e^A . e^{-\frac{1}{2}[A,B]} . e^{\frac{1}{6}([A,[A,B]] + [[A,B],B])} . \dots . e^B$$

– Application :

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{a} \cdot \vec{r}_{op} + \vec{b} \cdot \vec{p}_{op} + c)} &= e^{i\vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} . e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} . e^{i(c + \frac{\hbar}{2} \vec{a} \cdot \vec{b})} \\ &= e^{i\vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} . e^{i(\vec{b} \cdot \vec{p}_{op} + c + \frac{\hbar}{2} \vec{a} \cdot \vec{b})} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Exemple :

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_{op}} &: = e^{i\vec{k} \cdot (A\vec{r}_{op} + B\vec{p}_{op}/m + \vec{\xi})} \\ &= e^{i\vec{k} \cdot A\vec{r}_{op}} . e^{i\vec{k} \cdot B\vec{p}_{op}/m} . e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\xi} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} A\vec{B} \cdot \vec{k})} \end{aligned}$$

– Généralisation :

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t [A(t') + B(t')] dt' \right) \right) \\ &= \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(t') dt' \right) \right) . \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t B(t') dt' \right) \right) \\ &\quad . \left(1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [A(t') B(t'') + B(t') A(t'')] dt' dt'' - \int_{t_0}^t A(t') dt' . \int_{t_0}^t B(t') dt' + \dots \right) \end{aligned}$$

Formules de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A . e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] + [[A,B],B]) + \dots}$$

$$\begin{aligned} e^A . e^B &= e^B . e^A . e^{[A,B] - \frac{1}{2}([A,[A,B]] - [[A,B],B]) + \dots} \\ &= e^{[A,B] - \frac{1}{2}([A,[A,B]] - [[A,B],B]) + \dots} . e^B . e^A \end{aligned}$$

– Application :

$$e^{i\vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} . e^{i\vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} = e^{i(\vec{a} \cdot \vec{r}_{op} + \vec{b} \cdot \vec{p}_{op} - \frac{\hbar}{2} \vec{a} \cdot \vec{b})}$$

A.7 Dérivation d'une exponentielle de matrice

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(e^{A(t)} \right) &= e^{A(t)} \cdot \left(\dot{A} + \frac{1}{2!} [\dot{A}, A] + \frac{1}{3!} [[\dot{A}, A], A] + \dots \right) \\
 &= \left(\dot{A} + \frac{1}{2!} [A, \dot{A}] + \frac{1}{3!} [A, [A, \dot{A}]] + \dots \right) \cdot e^{A(t)} \\
 &\neq \dot{A} e^{A(t)}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

– **Application :**

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left(e^{i(\vec{a}(t) \cdot \vec{r}_{op} + \vec{b}(t) \cdot \vec{p}_{op} + c(t))} \right) \\
 &= i e^{i(\vec{a}(t) \cdot \vec{r}_{op} + \vec{b}(t) \cdot \vec{p}_{op} + c(t))} \left(\dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{r}_{op} + \dot{\vec{b}}(t) \cdot \vec{p}_{op} + \dot{c}(t) + \frac{\hbar}{2} \left(\dot{\vec{b}}(t) \cdot \vec{a}(t) - \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Exemple :

$$\frac{d}{dt} \left(e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t)} \right) = i e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}_{op}(t)} \left(\vec{k} \cdot \dot{\vec{A}} \vec{r}_{op} + \vec{k} \cdot \frac{\dot{\vec{B}}}{m} \vec{p}_{op} + \vec{k} \cdot \dot{\vec{\xi}} + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \left(\dot{\vec{B}} \tilde{A} - \dot{\vec{A}} \tilde{B} \right) \vec{k} \right)$$

qui conduit à l'expression du désaccord généralisé de la partie 3.3.

A.8 Fonction δ

– **Définition :**

$$\delta(x) := \frac{d}{dx} (\text{Heavyside}(x))$$

$$\delta(\vec{r}) := \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

– **Propriétés :**

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad \text{pour } \epsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
 \delta(g(x)) &= \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \frac{dg}{dx}(x_i) \right|} \quad \text{où les } x_i \text{ sont les racines de } g \\
 \implies \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2/2\epsilon} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi\epsilon} \text{sinc}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\vec{u}) &= (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{u}\cdot\vec{r}} \\ \Rightarrow \int d^3\vec{r} e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} &= (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p})\end{aligned}$$

A.9 Intégrales Gaussiennes

$$\int d(\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{v}) e^{-\mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v}} = \pi^N [\det(\mathbf{A})]^{-1}$$

où :

- \mathbf{v} est un vecteur à N composantes complexes (\mathbf{v}^\dagger est son complexe conjugué)
- $d(\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{v}) := \prod_{i=1}^N d(\operatorname{Re}(v_i)) d(\operatorname{Im}(v_i))$
- \mathbf{A} est une matrice $N \times N$ complexe dont la partie hermitienne (ie $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)/2$) est définie positive.

– **Propriété :**

$$\int d(\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{v}) e^{-\mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{w}^\dagger \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^\dagger \cdot \mathbf{w}'} = \pi^N [\det(\mathbf{A})]^{-1} e^{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{w}'}$$

pour \mathbf{w} et \mathbf{w}' deux vecteurs à N composantes complexes.

– **Application :**

$$\int d^3\vec{r} e^{\frac{i}{2\hbar} \vec{r} \cdot \mathbf{A} \vec{r} + i \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}}{\hbar}} = \frac{(2\pi\hbar)^{3/2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}} e^{-\frac{i}{2\hbar} \vec{w} \cdot \mathbf{A}^{-1} \vec{w}}$$

où \mathbf{A} est une matrice 3×3 complexe dont la partie hermitienne (ie $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)/2$) est définie positive.

A.10 Translations et représentations position et impulsion

– **Représentations canoniques :**

$$\begin{aligned}\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle &= (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \\ \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle &= (\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle)^* = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

– **Translation d'impulsion de $+\vec{a}$:**

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} |\vec{p}\rangle = |\vec{p} + \vec{a}\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} | \varphi_{\vec{p}_0} \rangle &= \varphi_{\vec{p}_0}(\vec{p} - \vec{a}) \\ &= \varphi((\vec{p} - \vec{a}) - \vec{p}_0) \\ &= \varphi(\vec{p} - (\vec{p}_0 + \vec{a})) \\ &= \varphi_{\vec{p}_0 + \vec{a}}(\vec{p}) \quad \text{à une phase près} \end{aligned} \tag{A.10}$$

(ie translation de l'impulsion centrale de $+\vec{a}$).

Pour un paquet d'ondes Gaussien $|\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle$ du type :

$$\langle \vec{r} | \varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar}(\vec{r} - \vec{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{i}{\hbar}\vec{p}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

on obtient ainsi :

$$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} |\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_0} \cdot |\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0 + \vec{a})\rangle}$$

– **Translation de position de $-\vec{b}$:**

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} |\vec{r}\rangle = |\vec{r} - \vec{b}\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} | \varphi_{\vec{r}_0} \rangle &= \varphi_{\vec{r}_0}(\vec{r} + \vec{b}) \\ &= \varphi((\vec{r} + \vec{b}) - \vec{r}_0) \\ &= \varphi(\vec{r} - (\vec{r}_0 - \vec{b})) \\ &= \varphi_{\vec{r}_0 - \vec{b}}(\vec{r}) \quad \text{à une phase près} \end{aligned} \tag{A.11}$$

(ie translation de la position centrale de $-\vec{b}$).

Ainsi, pour le paquet d'ondes Gaussien précédent $|\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle$, qui s'écrit en représentation $|\vec{p}\rangle$:

$$\langle \vec{p} | \varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\det(mY_0)}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_0)X_0Y_0^{-1}(\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar}\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}$$

on obtient :

$$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} |\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle = \left| \varphi\left(\vec{r}_0 - \vec{b}, \vec{p}_0\right) \right\rangle}$$

Remarque : Combinaison des deux types de translation pour le paquet d'ondes Gaussien précédent :

$$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} |\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{b})} \cdot \left| \varphi\left(\vec{r}_0 - \vec{b}, \vec{p}_0 + \vec{a}\right) \right\rangle}$$

et :

$$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_{op}} |\varphi(\vec{r}_0, \vec{p}_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{r}_0} \cdot \left| \varphi\left(\vec{r}_0 - \vec{b}, \vec{p}_0 + \vec{a}\right) \right\rangle}$$

– Formule de Taylor vectorielle :

$$\begin{aligned}
 f(\vec{r} + \vec{b}) &= \langle \vec{r} | e^{\frac{i}{\hbar} \vec{b} \cdot \vec{p}_{op}} | f \rangle \\
 &= e^{\vec{b} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}} (f(\vec{r})) \\
 &= \left(1 + \vec{b} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{1}{2!} (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})^2 + \dots \right) (f(\vec{r})) \\
 &\neq \left(1 + \vec{b} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{b}^2}{2!} \Delta_r + \dots \right) (f(\vec{r}))
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.11 Matrices de Pauli

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &: = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \sigma_2 &: = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 \sigma_3 &: = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– Propriétés :

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) 1 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$e^{i \vec{\sigma} \cdot \vec{a}} = \cos(\|\vec{a}\|) + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \sin(\|\vec{a}\|)$$

A.12 Rotation à 3 D

– Générateurs infinitésimaux

$$\begin{aligned}
 J_x &: = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
 J_y &: = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 J_z &: = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– Propriétés :

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

$$\begin{aligned}
 e^{i\vec{J} \cdot \vec{\theta}} &= 1 + i\vec{J} \cdot \frac{\vec{\theta}}{\theta} \sin[\theta] + \left(i\vec{J} \cdot \frac{\vec{\theta}}{\theta} \right)^2 (1 - \cos[\theta]) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{u^2 + (v^2 + w^2) \cos[\theta]}{\theta^2} & \frac{uv(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} + \frac{w \sin[\theta]}{\theta} & \frac{uw(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} - \frac{v \sin[\theta]}{\theta} \\ \frac{uv(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} - \frac{w \sin[\theta]}{\theta} & \frac{v^2 + (w^2 + u^2) \cos[\theta]}{\theta^2} & \frac{vw(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} + \frac{u \sin[\theta]}{\theta} \\ \frac{uw(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} + \frac{v \sin[\theta]}{\theta} & \frac{vw(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} - \frac{u \sin[\theta]}{\theta} & \frac{w^2 + (u^2 + v^2) \cos[\theta]}{\theta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{\theta} &: = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
 \theta &: = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}
 \end{aligned}$$

Annexe B

Propriétés des matrices ABCD

Les matrices $ABCD$ vérifient l'équation de Hamilton suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} \quad (\text{B.1})$$

et s'écrivent par conséquent sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} := \mathcal{T} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} dt' \right) \right)} \quad (\text{B.2})$$

avec l'aide de l'opérateur \mathcal{T} de Dyson (voir appendice A).

Ces matrices d'évolution ont de nombreuses propriétés, dont la plupart découlent de la *structure symplectique* de la mécanique Hamiltonienne (certaines des propriétés établies ci-dessous ont également été démontrées par Guillemin & Sternberg dans [98]).

On peut en effet montrer que les solutions des équations de Hamilton appartiennent au *groupe des transformations symplectiques* de l'espace des phases \mathcal{V} ($\mathcal{V} := R^6$ dans notre cas). Ces transformations S sont définies comme les transformations linéaires de l'espace \mathcal{V} dans lui même (transformations de coordonnées de R^6) qui laissent la *forme symplectique* ϖ invariante, ie telles que :

$$\varpi(Su, Sv) = \varpi(u, v)$$

quelque soient u et v appartenant à \mathcal{V} .

On peut également montrer qu'il existe une base de \mathcal{V} dans laquelle cette forme symplectique ϖ - forme bilinéaire antisymétrique et non-dégénérée de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans R - s'écrit :

$$\varpi(u, v) = \tilde{u} \mathbf{J} v$$

avec :

$$\boxed{\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}} \quad (\text{B.3})$$

où le signe \sim désigne la transposée, et où I est la matrice identité (matrice 3×3), qu'on notera simplement 1 par la suite.

Par exemple, avec :

$$u = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} \vec{r}' \\ \vec{p}' \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\varpi(u, v) = \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}' - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r}'$$

Une transformation symplectique S vérifie donc :

$$\tilde{S} J S = J$$

Dans notre cas, ce résultat implique que la matrice

$$\mathcal{M}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix}$$

vérifie :

$$\boxed{\tilde{\mathcal{M}} J \mathcal{M} = J} \quad (\text{B.4})$$

ie :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \tilde{B} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}C - \tilde{C}A & \tilde{A}D - \tilde{C}B \\ \tilde{B}C - \tilde{D}A & \tilde{B}D - \tilde{D}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui conduit aux propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A}C & \text{symétrique} \\ \tilde{B}D & \text{symétrique} \end{array}} \quad (\text{B.5})$$

$$\boxed{\tilde{A}D - \tilde{C}B = 1} \quad (\text{B.6})$$

Ces propriétés nous permettent alors de trouver la matrice inverse (à gauche) de $\mathcal{M}(t, t_0)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{B} \\ -\tilde{C} & \tilde{A} \end{pmatrix}} \quad (\text{B.7})$$

qui, du fait de l'égalité des inverses à gauche et à droite, implique que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} A\tilde{B} & \text{symétrique} \\ C\tilde{D} & \text{symétrique} \end{array}} \quad (\text{B.8})$$

$$\boxed{A\tilde{D} - B\tilde{C} = 1} \quad (\text{B.9})$$

De plus, les solutions $\mathcal{M}(t, t_0)$ étant réversibles dans le temps, on a le résultat :

$$[\mathcal{M}(t, t_0)]^{-1} = \mathcal{M}(t_0, t)$$

qui se traduit par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}(t_0, t) & -\tilde{B}(t_0, t) \\ -\tilde{C}(t_0, t) & \tilde{A}(t_0, t) \end{pmatrix}} \quad (\text{B.10})$$

Toujours en utilisant les propriétés de groupe des solutions $\mathcal{M}(t, t_0)$, on montre de même que :

$$\mathcal{M}(t, t') \cdot \mathcal{M}(t', t_0) = \mathcal{M}(t, t_0)$$

qui se traduit par :

$$\boxed{\begin{aligned} A(t, t') \cdot A(t', t_0) + B(t, t') \cdot C(t', t_0) &= A(t, t_0) \\ A(t, t') \cdot B(t', t_0) + B(t, t') \cdot D(t', t_0) &= B(t, t_0) \\ C(t, t') \cdot A(t', t_0) + D(t, t') \cdot C(t', t_0) &= C(t, t_0) \\ C(t, t') \cdot B(t', t_0) + D(t, t') \cdot D(t', t_0) &= D(t, t_0) \end{aligned}} \quad (\text{B.11})$$

D'autres propriétés découlent simplement de la définition B.1. En effet, on peut montrer que les matrices suivantes :

$$DB^{-1} \quad , \quad B^{-1}A \quad , \quad AC^{-1} \quad , \quad C^{-1}D$$

et leur transposée obéissent à la même équation différentielle, et qu'elles vérifient les mêmes conditions initiales. Par conséquent, on obtient les propriétés supplémentaires :

$$\boxed{\begin{array}{ll} DB^{-1} & \text{symétrique} \\ B^{-1}A & \text{symétrique} \\ AC^{-1} & \text{symétrique} \\ C^{-1}D & \text{symétrique} \end{array}} \quad (\text{B.12})$$

dont on peut se servir pour montrer la symétrie des matrices suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} A\tilde{D} & \text{symétrique} \\ \tilde{D}A & \text{symétrique} \\ C\tilde{B} & \text{symétrique} \\ \tilde{B}C & \text{symétrique} \end{array}} \quad (\text{B.13})$$

(par exemple $A\tilde{D} = AC^{-1}C\tilde{D}$ est symétrique car AC^{-1} et $C\tilde{D}$ sont symétriques).

Remarque sur la nullité de la matrice C : Du fait que les matrices triangulaires par blocs forment un groupe, nous obtenons également le résultat suivant :

$$\boxed{\gamma = 0 \Leftrightarrow C = 0} \quad (\text{B.14})$$

Cas particulier d'un Hamiltonien indépendant du temps

Dans ce cas, ie lorsque α , γ , \vec{g} et \vec{f} sont constants (avec $\beta = 1$), les matrices $ABCD$ (et $\vec{\xi}$, $\vec{\phi}$) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \exp[\Gamma \cdot (t - t_0)]$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} = \left(e^{\Gamma \cdot (t - t_0)} - 1 \right) \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix}$$

en fonction de l'exponentielle de la matrice Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Lorsque Γ est inversible :

$$\det(\alpha^2 - \gamma) \neq 0$$

on peut écrire simplement sa matrice inverse :

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \alpha & -(\alpha^2 - \gamma)^{-1} \\ 1 - \alpha \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \alpha & \alpha \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \end{pmatrix}$$

et obtenir ainsi une expression très pratique pour $\vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$.

Par exemple, lorsque $\vec{f} = \vec{0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= (B \cdot \alpha - A + 1) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g} \\ \vec{\phi} &= (D \cdot \alpha - \alpha - C) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g} \end{aligned}$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous une autre forme en utilisant la propriété :

$$(e^{\Gamma \cdot T} - 1) \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} (e^{\Gamma \cdot T} - 1)$$

qui conduit entre autres à la relation :

$$(\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot (\alpha \cdot B - D + 1) = (B \cdot \alpha - A + 1) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1}$$

et, par conséquent, à l'expression suivante de $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} = (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot (\alpha \cdot B - D + 1) \cdot \vec{g}$$

D'autres propriétés peuvent également être déduites d'égalités du type :

$$(e^{\Gamma \cdot T} - 1) \Gamma^n = \Gamma^n (e^{\Gamma \cdot T} - 1)$$

(avec n entier positif).

Par exemple, avec $n = 1$, on obtient les relations :

$$\begin{aligned} \alpha A + C &= A\alpha + B\gamma \\ \alpha B + D &= A + B\alpha \\ \gamma A + \alpha C &= A\alpha + D\gamma \\ \gamma B + \alpha D &= C + D\alpha \end{aligned}$$

Annexe C

Développement de Taylor des matrices ABCD

Dans le cas d'un Hamiltonien H_{ext} indépendant du temps, on peut donner une formule explicite aux matrices $ABCD$, comme cela est détaillé dans l'appendice D. Néanmoins, il est souvent plus intéressant - et moins fastidieux - de ne considérer qu'un développement de Taylor de ces matrices (développement en puissances de β , α , $(t - t_0)$ et γ , $(t - t_0)^2$).

Lorsque $\beta = 1$, les premiers termes du développement des matrices $ABCD$ deviennent alors :

$$A(T) = 1 + \alpha T + (\alpha^2 + \gamma) \frac{T^2}{2} + (\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) \frac{T^3}{3!} + (\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma\alpha + \gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^4}{4!} + (\alpha^5 + 4\alpha^3\gamma + 3\alpha^2\gamma\alpha + 2\alpha\gamma\alpha^2 + \gamma\alpha^3 + 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + \gamma^2\alpha) \frac{T^5}{5!} + \dots \quad (C.1)$$

$$B(T) = T + \alpha T^2 + (3\alpha^2 + \gamma) \frac{T^3}{3!} + (4\alpha^3 + 2\alpha\gamma + 2\gamma\alpha) \frac{T^4}{4!} + (5\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma + 4\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^5}{5!} + (6\alpha^5 + 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma\alpha + 6\alpha\gamma\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 + 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) \frac{T^6}{6!} + \dots \quad (C.2)$$

$$C(T) = \gamma T + (\alpha\gamma + \gamma\alpha) \frac{T^2}{2} + (\alpha^2\gamma + \alpha\gamma\alpha + \gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^3}{3!} + (\alpha^3\gamma + \alpha^2\gamma\alpha + \alpha\gamma\alpha^2 + \gamma\alpha^3 + \alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + \gamma^2\alpha) \frac{T^4}{4!} + \dots \quad (C.3)$$

$$D(T) = 1 + \alpha T + (\alpha^2 + \gamma) \frac{T^2}{2} + (\alpha^3 + \alpha\gamma + 2\gamma\alpha) \frac{T^3}{3!} + (\alpha^4 + \alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^4}{4!} + (\alpha^5 + \alpha^3\gamma + 2\alpha^2\gamma\alpha + 3\alpha\gamma\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 + \alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) \frac{T^5}{5!} + \dots \quad (C.4)$$

Remarque : On vérifie bien que $D(T) = \tilde{A}(-T)$, $B(T) = -\tilde{B}(-T)$ et $C(T) = -\tilde{C}(-T)$ (voir l'appendice B), et on fait surtout attention au fait que $D(T) \neq A(T)$.

– **Expression de $\vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$:**

A partir de l'expression de $\vec{\xi}$ et $\vec{\phi}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}(T) \\ \vec{\phi}(T) \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} (e^{\Gamma \cdot T} - 1) \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix}$$

pour un tel H_{ext} indépendant du temps, il est facile d'en obtenir le développement de Taylor. Lorsqu'on ne considère que l'effet de \vec{g} (ie $\vec{f} = \vec{0}$), on obtient ainsi :

$$\vec{\xi}(T) = (B(T) \cdot \alpha - [A(T) - 1]) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g}$$

avec :

$$\begin{aligned} (B(T) \cdot \alpha - [A(T) - 1]) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} &= \frac{T^2}{2} + \alpha \frac{T^3}{3} + (3\alpha^2 + \gamma) \frac{T^4}{4!} + (4\alpha^3 + 2\alpha\gamma + 2\gamma\alpha) \frac{T^5}{5!} \\ &+ (5\alpha^4 + 3\alpha^2\gamma + 4\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^6}{6!} \\ &+ (6\alpha^5 + 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma\alpha + 6\alpha\gamma\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 + 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) \frac{T^7}{7!} + \dots \end{aligned} \quad (C.5)$$

et :

$$\vec{\phi}(T) = ([D(T) - 1] \cdot \alpha - C(T)) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} \cdot \vec{g}$$

avec :

$$\begin{aligned} ([D(T) - 1] \cdot \alpha - C(T)) \cdot (\alpha^2 - \gamma)^{-1} &= T + \alpha \frac{T^2}{2} + (\alpha^2 + \gamma) \frac{T^3}{3!} + (\alpha^3 + \alpha\gamma + 2\gamma\alpha) \frac{T^4}{4!} \\ &+ (\alpha^4 + \alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma\alpha + 3\gamma\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T^5}{5!} \\ &+ (\alpha^5 + \alpha^3\gamma + 2\alpha^2\gamma\alpha + 3\alpha\gamma\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 + \alpha\gamma^2 + 2\gamma\alpha\gamma + 2\gamma^2\alpha) \frac{T^6}{6!} + \dots \end{aligned} \quad (C.6)$$

– **Expression de $1 - 2A(T) + A(T + T')$, $-2B(T) + B(T + T')$ et $-2\vec{\xi}(T) + \vec{\xi}(T + T')$:**

Ces expressions interviennent dans l'expression du déphasage global (voir la partie 5.2 par exemple) et s'obtiennent directement à partir des expressions ci-dessus (en fonction de la différence $T' - T$) :

$$\begin{aligned} 1 - 2A(T) + A(T + T') &= (\alpha^2 + \gamma) T^2 + (\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) T^3 + \dots \\ &+ (T' - T) \cdot [\alpha + 2(\alpha^2 + \gamma) T + 2(\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) T^2 + \dots] \\ &+ (T' - T)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma) T + (\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha) T + \dots \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2B(T) + B(T + T') &= 2\alpha T^2 + (3\alpha^2 + \gamma) T^3 + \frac{7}{6} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^4 + \dots \\
&+ (T' - T) \cdot \left[1 + 4\alpha T + 2(3\alpha^2 + \gamma) T^2 + \frac{8}{3} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^3 + \dots \right] \\
&+ (T' - T)^2 \cdot [\alpha + (3\alpha^2 + \gamma) T + 2(2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^2 + \dots] \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\overrightarrow{\xi}(T) + \overrightarrow{\xi}(T + T') &= \left[T^2 + 2\alpha T^3 + \frac{7}{12} (3\alpha^2 + \gamma) T^4 + \frac{1}{2} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^5 + \dots \right] \cdot \overrightarrow{g} \\
&+ (T' - T) \cdot \left[2T + 4\alpha T^2 + \frac{4}{3} (3\alpha^2 + \gamma) T^3 + \frac{4}{3} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^4 + \dots \right] \cdot \overrightarrow{g} \\
&+ (T' - T)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + 2\alpha T + (3\alpha^2 + \gamma) T^2 + \frac{2}{3} (2\alpha^3 + \alpha\gamma + \gamma\alpha) T^3 + \dots \right] \cdot \overrightarrow{g} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Annexe D

Matrices ABCD pour H_{ext} indépendant du temps

Cet appendice montre comment la théorie des matrices [242] permet d'obtenir explicitement chaque terme des matrices $ABCD$, lorsque l'Hamiltonien H_{ext} est indépendant du temps.

En effet, lorsque H_{ext} est indépendant du temps, les matrices $ABCD$ (et $\vec{\xi}$, $\vec{\phi}$) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \exp[\Gamma \cdot (t - t_0)]$$
$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}(t, t_0) \\ \vec{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \left(e^{\Gamma \cdot (t - t_0)} - 1 \right) \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

en fonction de l'exponentielle de la matrice Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est une matrice 6×6 réelle.

Pour obtenir l'expression de chaque élément des matrices $ABCD$, il est donc nécessaire de savoir transformer l'exponentielle de $\Gamma \cdot (t - t_0)$ en une matrice 6×6 explicite.

On peut alors le faire en écrivant l'exponentielle sous forme d'un développement infini :

$$e^{\Gamma \cdot (t - t_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Gamma \cdot (t - t_0)]^n}{n!}$$

et en obtenant ainsi chacun des éléments voulus sous forme d'une somme infinie. Cette approche est la plus utilisée du point de vue de la modélisation des interféromètres atomiques, car on considère souvent des effets inertiels et gravitationnels tels que $\alpha \cdot (t - t_0)$ et $\gamma \cdot (t - t_0)^2$ soient de norme très inférieure à un. Le développement précédent est alors vu comme un développement perturbatif, dont on ne conserve que les premiers termes (voir l'appendice C).

Cependant, lorsque les champs extérieurs ont un effet important sur les ondes atomiques (rotations rapides, forts gradients d'accélération lors de chocs violents, temps de vol longs...), ces développements

ne sont plus valables, et il est nécessaire de tenir compte de tous les termes des développements infinis précédents, à moins de pouvoir obtenir une expression analytique de ces matrices $ABCD$. Nous allons voir que c'est le cas grâce à certains résultats de la théorie des matrices. Plus précisément nous allons montrer comment transformer l'exponentielle de la matrice $\Gamma \cdot (t - t_0)$ (matrice 6×6) en une matrice 6×6 d'exponentielles.

La démarche est la suivante : on commence par exposer rapidement les formules qui permettent de passer d'une fonction de matrice à une matrice de fonctions, on applique ensuite les résultats obtenus au cas particulier de l'exponentielle de la matrice $\Gamma \cdot (t - t_0)$.

D.1 Quelques résultats de théorie des matrices

Dans le cas général, si Γ est une matrice ($n \times n$, où n est un entier) et f une fonction quelconque (par exemple : $f = \exp$), et si l'on désire exprimer $f(\Gamma)$ sous forme d'une matrice *explicite* (ie dont l'expression de chaque terme est connue), trois étapes sont nécessaires (pour plus de détail, se référer à [242]) :

Calcul des valeurs propres et du polynôme caractéristique de Γ :

Les valeurs propres λ_i de la matrice Γ sont les racines du polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &: = \text{Det}(\lambda - \Gamma) \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{s_p} \end{aligned}$$

où :

$$s_1 + s_2 + \dots + s_p = n := \dim(\Gamma)$$

Polynôme minimal de Γ :

Définissons la fonction δ :

$$\delta(\lambda, \nu) := \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\nu)}{\lambda - \nu}$$

et la fonction de matrice ρ :

$$\rho(\lambda) := \delta(\lambda, \Gamma)$$

$\rho(\lambda)$ peut alors être toujours être divisée par un polynôme du type :

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{t_p}$$

où $0 \leq t_i \leq s_i$ pour chaque i .

Considérons maintenant la valeur maximale de t_i :

$$u_i := t_{i_{\max}}$$

et définissons le polynôme suivant :

$$\Delta_{n-1}(\lambda) := (\lambda - \lambda_1)^{u_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{u_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{u_p}$$

Le polynôme minimal de Γ est alors défini par la relation suivante :

$$\psi(\lambda) := \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)^{s_1-u_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{s_2-u_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{s_p-u_p}$$

Il convient de remarquer que :

$$\psi(\lambda) = \Delta(\lambda)$$

si Γ possède n valeurs propres différentes (i.e. $p = n$).

Formule fondamentale :

Pour toute fonction f et toute matrice Γ , on peut écrire $f(\Gamma)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\Gamma) &= f(\lambda_1) \cdot Z_1^1 + f^{(1)}(\lambda_1) \cdot Z_1^2 + \dots + f^{(s_1-u_1)}(\lambda_1) \cdot Z_1^{s_1-u_1+1} \\ &\quad + f(\lambda_2) \cdot Z_2^1 + f^{(1)}(\lambda_2) \cdot Z_2^2 + \dots + f^{(s_2-u_2)}(\lambda_2) \cdot Z_2^{s_2-u_2+1} + \dots \\ &\quad + f(\lambda_p) \cdot Z_p^1 + f^{(1)}(\lambda_p) \cdot Z_p^2 + \dots + f^{(s_p-u_p)}(\lambda_p) \cdot Z_p^{s_p-u_p+1} \end{aligned}$$

où les coefficients Z_i^j ne dépendent pas de la fonction f , mais uniquement de la matrice Γ .

Par conséquent, en remplaçant f par des fonctions simples (du type $\lambda \mapsto 1, \lambda - \lambda_1, (\lambda - \lambda_1)^2 \dots$), on peut avoir accès aux coefficients Z_i^j (souvent après avoir résolu un système linéaire).

Dans le cas particulier de l'exponentielle d'une matrice $\Gamma.t$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} e^{\Gamma.t} &= (Z_1^1 + Z_1^2.t + \dots + Z_1^{s_1-u_1+1}.t^{s_1-u_1-1}) \cdot e^{\lambda_1.t} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (Z_p^1 + Z_p^2.t + \dots + Z_p^{s_p-u_p+1}.t^{s_p-u_p-1}) \cdot e^{\lambda_p.t} \end{aligned}$$

De plus, si Γ a n valeurs propres différentes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, l'expression précédente devient égale à :

$$e^{\Gamma.t} = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot e^{\lambda_i.t}$$

avec (pour tout i) :

$$Z_i = \prod_{j \neq i} \frac{(\Gamma - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)}$$

D.2 Application au calcul des matrices ABCD

Appliquons les résultats précédents au cas particulier de l'exponentielle de matrice :

$$e^{\Gamma.t}$$

où Γ est la matrice suivante (traduisant l'effet d'un Hamiltonien H_{ext} indépendant du temps) :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

La première étape consiste à calculer le polynôme caractéristique de Γ :

$$\Delta(\lambda) = Det(\Gamma - \lambda)$$

qui peut en fait être exprimé comme le déterminant d'une matrice 3×3 :

$$\Delta(\lambda) = Det\left((\alpha - \lambda)^2 - \gamma\right)$$

On remarque alors que $\Delta(\lambda)$ est paire :

$$\Delta(-\lambda) = \Delta(\lambda)$$

du fait que la matrice α est anti-symétrique :

$$\tilde{\alpha} = -\alpha$$

(on rappelle que la matrice α est liée au vecteur rotation $\vec{\Omega}$ par la relation $\alpha.\vec{u} = -\vec{\Omega} \times \vec{u}$, pour tout vecteur \vec{u}).

Par conséquent, $\Delta(\lambda)$ est un polynôme d'ordre trois en $\Lambda := \lambda^2$, et l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ est une équation du troisième degré en Λ :

$$\Lambda^3 + a_1.\Lambda^2 + a_2.\Lambda + a_3 = 0$$

où les coefficients a_i sont obtenus par la méthode de Faddeev [242] :

$$\begin{aligned} a_1 & : = -Tr(\alpha^2 + \gamma) \\ a_2 & : = \frac{1}{2}(Tr(\alpha^2 + \gamma))^2 - \frac{1}{2}Tr((\alpha^2 + \gamma)^2) - 2Tr(\alpha^2.\gamma) \\ a_3 & : = Det(\alpha^2 - \gamma) \end{aligned}$$

Finalement, les trois racines de cette équation du troisième degré sont données par la formule de Cardan :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 & = \left(-\frac{q}{2} + \mu\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \mu\right)^{1/3} - \frac{a_1}{3} \\ \Lambda_2 & = \left(-\frac{q}{2} + \mu\right)^{1/3} . e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \mu\right)^{1/3} . e^{-i\frac{2\pi}{3}} - \frac{a_1}{3} \\ \Lambda_3 & = \left(-\frac{q}{2} + \mu\right)^{1/3} . e^{i\frac{4\pi}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \mu\right)^{1/3} . e^{-i\frac{4\pi}{3}} - \frac{a_1}{3} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu & : = +\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ p & : = a_2 - \frac{a_1^2}{3} \\ q & : = a_3 - \frac{a_2.a_1}{3} + 2\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

et :

$$a_1 = 2\Omega^2 - \gamma$$

Il convient de souligner que :

$$\mu^2 = -\frac{1}{4 \cdot 27} \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 \cdot (\Lambda_2 - \Lambda_3)^2 \cdot (\Lambda_3 - \Lambda_1)^2$$

si bien que Λ_1, Λ_2 et Λ_3 sont distincts lorsque $\mu \neq 0$.

Par conséquent, si $\mu \neq 0$ et si $\Lambda_i \neq 0$ pour tout i , les six racines de $\Delta(\lambda)$ sont différentes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +\sqrt{\Lambda_1} \\ \widetilde{\lambda_1} &= -\sqrt{\Lambda_1} = -\lambda_1 \\ \lambda_2 &= +\sqrt{\Lambda_2} \\ \widetilde{\lambda_2} &= -\sqrt{\Lambda_2} = -\lambda_2 \\ \lambda_3 &= +\sqrt{\Lambda_3} \\ \widetilde{\lambda_3} &= -\sqrt{\Lambda_3} = -\lambda_3 \end{aligned}$$

Enfin, concernant les coefficients Z_i , ils sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_1(\lambda_1) = \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_2) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_3)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_3)} \cdot \frac{\Gamma + \lambda_1}{2\lambda_1} \\ Z_2 &= Z_1(-\lambda_1) \end{aligned}$$

et par celles obtenues en permutant les indices 123.

Finalement, pour toute fonction f , on obtient la matrice 6×6 suivante :

$$\begin{aligned} f(\Gamma) &= \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_2) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_3)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_3)} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \left(\Gamma \cdot \left(\frac{f(\lambda_1) - f(-\lambda_1)}{2} \right) + \lambda_1 \cdot \left(\frac{f(\lambda_1) + f(-\lambda_1)}{2} \right) \right) \\ &+ \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_1) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_3)}{(\Lambda_2 - \Lambda_1) \cdot (\Lambda_2 - \Lambda_3)} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot \left(\Gamma \cdot \left(\frac{f(\lambda_2) - f(-\lambda_2)}{2} \right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{f(\lambda_2) + f(-\lambda_2)}{2} \right) \right) \\ &+ \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_1) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_2)}{(\Lambda_3 - \Lambda_1) \cdot (\Lambda_3 - \Lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \cdot \left(\Gamma \cdot \left(\frac{f(\lambda_3) - f(-\lambda_3)}{2} \right) + \lambda_3 \cdot \left(\frac{f(\lambda_3) + f(-\lambda_3)}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

qui conduit au résultat voulu lorsque l'on particularise f par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{\Gamma \cdot t} &= \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_2) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_3)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_3)} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot (\Gamma \cdot \sinh(\lambda_1 t) + \lambda_1 \cdot \cosh(\lambda_1 t)) \\ &+ \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_1) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_3)}{(\Lambda_2 - \Lambda_1) \cdot (\Lambda_2 - \Lambda_3)} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot (\Gamma \cdot \sinh(\lambda_2 t) + \lambda_2 \cdot \cosh(\lambda_2 t)) \\ &+ \frac{(\Gamma^2 - \Lambda_1) \cdot (\Gamma^2 - \Lambda_2)}{(\Lambda_3 - \Lambda_1) \cdot (\Lambda_3 - \Lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \cdot (\Gamma \cdot \sinh(\lambda_3 t) + \lambda_3 \cdot \cosh(\lambda_3 t)) \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que cette expression redonne bien les relations du paragraphe 2.2.2, obtenues dans les deux cas particuliers $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$.

Annexe E

Précision concernant l'expression de H_{ext} pour le champ de gravité terrestre

Le but de cet appendice est de préciser le lien entre les termes de l'Hamiltonien H_{ext} (défini dans la partie 2.1) et les paramètres du potentiel gravitationnel de la Terre. C'est une illustration du type de problème susceptible de se poser lorsque l'on cherche à appliquer les diverses formules du signal de franges établies aux chapitres 4 et 5 (voir le point n° 8 de la partie 5.1).

Plaçons nous dans le référentiel cartésien dont l'origine est prise égale au centre de rotation de la Terre, et dont l'axe z est suivant un rayon terrestre (celui qui transperce le centre de la première séparatrice d'un interféromètre atomique par exemple). La force de gravité s'écrit alors, au point \vec{R} , comme :

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est un vecteur unitaire radial (attention \vec{u}_r est différent de \vec{u}_z), le potentiel associé devient alors :

$$V_{grav}(R) = -\frac{GmM_T}{R}$$

car il vérifie :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(V_{grav})$$

Plaçons nous maintenant au voisinage du point \vec{R}_T défini par :

$$\vec{R}_T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix}$$

(où R_T est la valeur du rayon terrestre), et développons le potentiel de gravité à l'ordre 2 en ¹ :

$$\vec{r} := \vec{R} - \vec{R}_T = \begin{pmatrix} x = X \\ y = Y \\ z = Z - R_T \end{pmatrix}$$

¹Ce calcul peut également être effectué avec l'expression de la force gravitationnelle.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 V_{grav}(R) &= -\frac{GmM_T}{\sqrt{(R_T + z)^2 + x^2 + y^2}} \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T} \left[\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{x}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_T}\right)^2 \right]^{-1/2} \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T} \left[1 + \frac{2z}{R_T} + \left(\frac{z}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{x}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_T}\right)^2 \right]^{-1/2} \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T} \left[1 - \frac{z}{R_T} + \left(\frac{z}{R_T}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_T}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R_T}\right)^2 + \dots \right] \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T} + \frac{GmM_T}{R_T^2} z - \frac{GmM_T}{R_T^2} \frac{1}{R_T} z^2 + \frac{GmM_T}{R_T^2} \frac{1}{2R_T} (x^2 + y^2) + \dots
 \end{aligned}$$

ie :

$$V_{grav}(R) = m \vec{g} \cdot \vec{R}_T - m \vec{g} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \gamma \cdot \vec{r} - \dots$$

avec :

$$\vec{g} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g := -\frac{GM_T}{R_T^2} \end{pmatrix}$$

le vecteur usuel de gravité uniforme, et :

$$\gamma := \begin{pmatrix} -\frac{g}{R_T} & & \\ & -\frac{g}{R_T} & \\ & & +2\frac{g}{R_T} \end{pmatrix}$$

le gradient de gravité au voisinage du point \vec{R}_T .

En ce qui concerne la forme de ce potentiel dans l'Hamiltonien quantique H_{ext} de la partie 2.1, on peut choisir de se placer dans le référentiel dont l'origine est située en :

$$\vec{R}_T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$V_{grav}(R) = m \vec{g} \cdot \vec{R}_T - m \vec{g} \cdot \vec{r}_{op} - \frac{1}{2} m \vec{r}_{op} \cdot \gamma \cdot \vec{r}_{op} - \dots$$

mais dans ce cas, le potentiel dû à la rotation de la Terre devient égal à :

$$V_{rot} = -\vec{\Omega} \cdot \left[\left(\vec{R}_T + \vec{r}_{op} \right) \times \vec{p}_{op} \right]$$

et un terme linéaire en \vec{p}_{op} apparaît dans H_{ext} (le paramètre \vec{f} n'est alors pas nul).

On peut également se placer dans le référentiel dont l'origine est en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ie au point appartenant à l'axe de rotation terrestre et à la direction de la force de gravité), et exprimer les potentiels précédents grâce à l'opérateur :

$$\boxed{\vec{q}_{op} := \vec{R}_T + \vec{r}_{op}}$$

(opérateur position translaté de \vec{R}_T).

On obtient ainsi :

$$V_{rot} = -\vec{\Omega} \cdot [\vec{q}_{op} \times \vec{p}_{op}]$$

et :

$$V_{grav}(R) = m \vec{g} \cdot \vec{R}_T - m \vec{g} \cdot (\vec{q}_{op} - \vec{R}_T) - \frac{1}{2} m (\vec{q}_{op} - \vec{R}_T) \cdot \gamma \cdot (\vec{q}_{op} - \vec{R}_T) - \dots$$

ie :

$$\boxed{V_{grav}(R) = cst - m \left(\vec{g} - \gamma \cdot \vec{R}_T \right) \cdot \vec{q}_{op} - \frac{1}{2} m \vec{q}_{op} \cdot \gamma \cdot \vec{q}_{op} - \dots}$$

où le terme constant :

$$cst := 2m \vec{g} \cdot \vec{R}_T - \frac{1}{2} m \vec{R}_T \cdot \gamma \cdot \vec{R}_T$$

peut être éliminé car il n'est pas physique (définition du potentiel à une constante près).

On obtient finalement un potentiel de gravité du type :

$$\boxed{V_{grav} = -m \vec{g}_{cor} \cdot \vec{q}_{op} - \frac{1}{2} m \vec{q}_{op} \cdot \gamma \cdot \vec{q}_{op}}$$

avec :

$$\boxed{\vec{g}_{cor} := \vec{g} - \gamma \cdot \vec{R}_T}$$

le vecteur de gravité corrigé de $-\gamma \cdot \vec{R}_T$.

C'est dans ce deuxième référentiel que l'on se placera préférentiellement par la suite, et que l'on calculera l'évolution des paquets d'ondes atomiques et le déphasage interférométrique (voir par exemple la partie 5.2 et la référence [81]).

Remarque :

Comme on l'a déjà dit, le potentiel est défini à une constante près. Si l'on veut garder, dans l'expression de V_{grav} , les vraies quantités gravitationnelles (ie \vec{g} et pas \vec{g}_{cor}), on peut toujours réécrire V_{grav} sous la forme :

$$\boxed{V_{grav} = -m \vec{g} \cdot \vec{q}_{op} - \frac{1}{2} m \left(\vec{q}_{op} - \vec{R}_T \right) \cdot \gamma \cdot \left(\vec{q}_{op} - \vec{R}_T \right) - \dots}$$

Annexe F

Modélisation des séparatrices pour paquets d'ondes incidents quelconques

Dans cet appendice, nous détaillons la modélisation aboutissant aux résultats exposés au paragraphe 3.6.4, ie la modélisation de l'effet d'une séparatrice laser temporelle (avec impulsion laser uniforme et constante pendant la durée τ) sur un paquet d'ondes atomique Gaussien (problème de Rabi libre, ie sans champ inertiel, ni gravitationnel).

Le cadre d'étude et les notations sont ceux du paragraphe 3.6.4.

F.1 Présentation de la modélisation

Comme nous l'avons déjà dit (aux paragraphes 3.6.2 et 3.6.3), la distribution en impulsion solution du problème de Rabi libre est différente de la distribution du paquet d'ondes atomique incident. Elle est en fait structurée en plusieurs paquets impulsionsnels, dont les impulsions centrales et les largeurs sont différentes de celles du paquet d'ondes initial (voir les figures 3.27, 3.29, 3.30 et 3.31).

Lorsque le paquet d'ondes incident possède une largeur en impulsion extrêmement fine, on a vu comment on pouvait avoir accès aux différentes caractéristiques des paquets d'ondes formés (impulsions centrales, vitesses de groupe, matrices de largeur...voir le paragraphe 3.6.3). La méthode était simple : on prenait simplement des développements limités autour de l'impulsion centrale initiale \vec{p}_0 , que l'on tronquait à l'ordre deux, et que l'on exprimait sous forme exponentielle. On obtenait ainsi des Gaussiennes (modélisation Gaussienne), ie des paquets d'ondes ayant la même forme que le paquet d'ondes incident, et il était facile de les comparer.

Dans le cas général, on ne peut pas faire de développement limité comme celui-là, et il faut, en toute rigueur, considérer les solutions complètes du type :

$$\frac{i}{\sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2} \right] a(\vec{p}, t_0)$$

(pour l'amplitude de transition $a \longrightarrow b$) où $a(\vec{p}, t_0)$ est le paquet d'ondes incident (initialement dans l'état a). Il est alors possible d'effectuer une étude numérique de cette distribution complexe, et d'obtenir ainsi la structuration en paquets d'ondes souhaitée.

Cependant, on a déjà souligné à plusieurs reprises qu'il est important d'avoir des solutions analytiques pour pouvoir inverser les signaux détectés (en interférométrie par exemple), afin de pouvoir identifier l'effet à mesurer. Il est par conséquent nécessaire d'obtenir une modélisation analytique performante (au sens où elle rend compte avec justesse de la structuration précédente) des séparatrices.

Plusieurs raisons nous poussent alors à choisir une modélisation Gaussienne, ie une modélisation des paquets d'ondes formés par des fonctions d'ondes Gaussiennes.

Premièrement, gardons à l'esprit qu'il est important d'avoir une modélisation compatible avec la modélisation des paquets d'ondes détaillée au chapitre 2 (évolution de paquets d'ondes quelconques grâce à l'étude de paquets d'ondes Gaussiens par la méthode de la fonction génératrice, voir 2.3.2). Ainsi, il est judicieux de conserver la forme Gaussienne du paquet d'ondes incident, d'autant plus lorsque plusieurs séparatrices se succèdent (comme en interférométrie atomique).

Deuxièmement, on peut modéliser l'essentiel de la structuration précédente en termes de paquets d'ondes Gaussiens : les modifications d'impulsion centrale, de position centrale (liée aux vitesses de groupe), d'état interne (masse effective), de phase, d'amplitude et de largeur complexe en position et impulsion peuvent, en effet, être prises en compte avec ce type de modélisation (comme nous l'avons vu au paragraphe 3.6.3).

Enfin, cette modélisation en termes de fonctions Gaussiennes généralise directement les résultats du paragraphe 3.6.3, et nous permet ainsi de faire le lien avec le cas extrême qu'il décrit.

Nous adopterons donc la même démarche qu'au paragraphe 3.6.3, à savoir, pour chaque type de transition ($u \mapsto u$ ou $u \mapsto v$, $u, v = a, b$) :

1. déterminer les impulsions centrales des paquets d'ondes formés dans la séparatrice,
2. modéliser leur structure en impulsion sous forme de distributions Gaussiennes (complexes).

Bien sûr, comme nous l'avons déjà souligné, cette modélisation ne pourra pas rendre compte de la sous-structuration en lobes secondaires (voir figures 3.30 et 3.31), et seuls les paquets d'ondes principaux seront modélisés (un seul paquet impulsif wp_0 dans le cas des transitions avec changement d'état interne du type $u \mapsto v$, deux paquets impulsifs wp_1 et wp_2 pour les transitions sans changement d'état interne $u \mapsto u$).

F.2 Cas des transitions avec changement d'état interne ($a \mapsto b$)

Dans ce cas, le terme à modéliser s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+y_+^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+^2} \right] * u(y_+, t_0)}$$

avec :

$$y_+(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - kp_{\parallel}/m - \delta}{2\Omega_0} = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{\parallel})}{2m\Omega_0}$$

et où $u(y_+, t_0)$ est le terme d'amplitude du paquet d'ondes incident Gaussien :

$$u(y_+, t_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_{0+} - y_+}{\sigma_y} \right)^2 \right]$$

Le cas $b \mapsto a$ se traite de la même façon, en faisant le changement :

$$y_+ \longrightarrow y_-$$

Impulsion centrale et vitesses de groupe principales

Pour déterminer l'impulsion centrale (et ainsi les deux vitesses de groupe associées) du paquet d'ondes principal wp_0 , nous étudions la distribution finale en impulsion

$$u(y_+, t_0) / \sqrt{1 + y_+^2}$$

de chaque état adiabatique :

$$\frac{1}{2\sqrt{1 + y_+^2}} u(y_+, t_0) e^{\pm i\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2}}$$

Celle-ci est représentée sur la figure F.1.

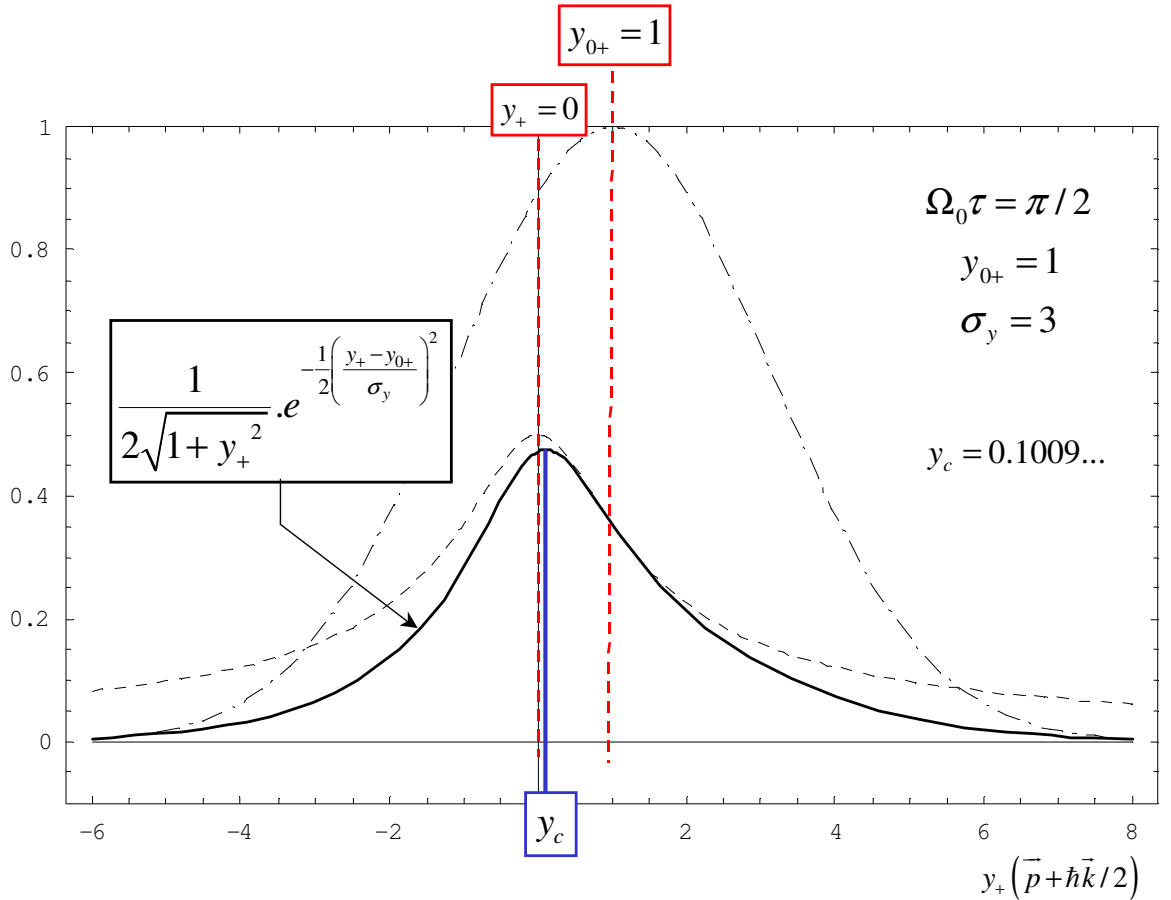


FIG. F.1: Distribution finale en impulsion de chaque état adiabatique (en trait plein). Celles du paquet d'ondes incident Gaussien et du filtre dû au préfacteur sont également représentées (en trait discontinu).

- Lorsque $y_{0+} = 0$, la distribution finale en impulsion est centrée en $p_{s\parallel} = p_{0\parallel}$, et par conséquent $p_{0\parallel}$ est l'impulsion centrale du paquet d'ondes principal. Comme $y_{0+} = 0$, on peut déduire des résultats de la partie 3.6 que les deux paquets d'ondes associés à ce paquet d'ondes principal ont même trajectoire centrale (effet Borrmann atomique) :

$$\pm \vec{v}_{g0} = \vec{0}$$

- Au contraire, lorsque $|y_{0+}| \gg 1$, la distribution finale est proche de zéro, et la séparatrice ne joue plus son rôle. D'une façon générale, il en est de même lorsque le paquet d'ondes principal n'est pas

issu du lobe central de la distribution *sinc* (ie lorsque la distribution en impulsion du paquet d'ondes incident ne recouvre pas suffisamment le lobe central du *sinc*).

• Pour y_{0+} quelconque, et à condition que le paquet d'ondes incident recouvre suffisamment le lobe central de la distribution *sinc*, l'impulsion centrale est celle du paquet d'ondes

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2}} * u(y_+, t_0)$$

et est comprise entre $p_{s\parallel}$ et $p_{0\parallel}$ (on rappelle que $p_{s\parallel} = \frac{\omega - \omega_0 - \delta}{k}$) : voir figure F.1.

Une des façons d'approcher cette impulsion centrale est de l'approximer par l'impulsion $p_{m\parallel}$ donnant le maximum de la distribution finale. On trouve alors que $p_{m\parallel}$ est la solution réelle de l'équation du troisième ordre suivante :

$$y + (y - y_0)(1 + y^2) / \sigma_y^2 = 0$$

ou encore :

$$(p_{s\parallel} - p) + (p_{0\parallel} - p) \left[1 + a(p_{s\parallel} - p)^2 \right] / \sigma_y^2 = 0$$

avec :

$$a := \left(\frac{k}{2m\Omega_0} \right)^2$$

On peut alors résoudre analytiquement cette équation et trouver $p_{m\parallel}$.

Cependant, et comme nous l'avons déjà dit, les séparatrices ne sont utiles que si l'on a au moins l'une des conditions suivantes :

- la distribution en impulsion du paquet d'ondes incident recouvre le lobe central du *sinc*
- $p_{0\parallel}$ est proche de $p_{s\parallel}$ (plus précisément $|y_{0+}| < \sqrt{(\pi/\Omega_0\tau)^2 - 1}$)

Dans ces deux cas, le maximum de la distribution finale est proche de $p_{s\parallel}$ (ie du maximum du lobe central du *sinc*), et on peut ainsi négliger le terme $(p_{s\parallel} - p_{m\parallel})^2$ dans l'équation précédente. On obtient alors :

$$p_{m\parallel} \simeq \frac{p_{s\parallel} + p_{0\parallel} / \sigma_y^2}{1 + 1 / \sigma_y^2}$$

Cette expression est en fait celle de l'impulsion centrale du produit des deux Gaussiennes :

$$e^{-\frac{1}{2}y_+(p_{\parallel})^2} * u(y_+, t_0)$$

ie celle du paquet d'ondes $\frac{1}{\sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2}} * u(y_+, t_0)$ où on a approximé $1/\sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2}$ par sa partie Gaussienne

$$1/\sqrt{1+y_+(p_{\parallel})^2} \sim e^{-\frac{1}{2}y_+^2}$$

(développement autour de $y_+ = 0$ à l'ordre deux).

En effet, pour le produit de deux Gaussiennes on obtient :

$$e^{-\frac{\alpha_1}{2}(p-p_1)^2} e^{-\frac{\alpha_2}{2}(p-p_2)^2} = e^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}(p-p_{centrale})^2} e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1+\alpha_2)}(p_1-p_2)^2}$$

avec :

$$p_{centrale} := \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Dans la suite, nous pouvons donc prendre comme impulsion centrale :

$$p_{c\parallel} := \frac{p_{s\parallel} + p_{0\parallel} / \sigma_y^2}{1 + 1 / \sigma_y^2} \quad (\text{F.1})$$

même si en toute rigueur il faut plutôt considérer la solution de l'équation du troisième ordre précédente.

Une fois $p_{c\parallel}$ connue, il est alors simple d'obtenir les vitesses de groupe principales. Elles sont données par :

$$\pm \vec{v}_{gc} = \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(p_{c\parallel})}{\sqrt{1 + y(p_{c\parallel})^2}}$$

et correspondent aux vitesses des paquets d'ondes associés aux deux états adiabatiques du paquet d'ondes principal.

Modélisation

Dans le cas des transitions $a \mapsto b$, la distribution finale en impulsion

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_+^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2} \right] * u(y_+, t_0)$$

peut comporter de nombreux lobes. Nous ne modélisons ici que le lobe principal dont la largeur est contrôlée essentiellement par le terme $1/\sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2}$, responsable de la sélectivité en vitesse transverse vue au paragraphe 3.6.2. Il est à souligner que ce préfacteur est commun aux deux états adiabatiques, ce qui n'est pas le cas des transitions sans changement d'état interne du type $a \mapsto a$ ou $b \mapsto b$.

On peut alors modéliser ce préfacteur $1/\sqrt{1 + y_+ (p_{\parallel})^2}$ sous une forme Hermito-Gaussienne simple. Etant donné la forme particulière de la distribution $1/\sqrt{1 + y_+^2}$ qui est naturellement proche d'une distribution Gaussienne, nous pouvons nous restreindre à une Gaussienne pure. On l'obtient en prenant un développement quadratique en $(\vec{p} - \vec{p}_c)$ où \vec{p}_c est l'impulsion centrale calculée auparavant, ou - de façon équivalente - en $(y_+ - y_{c+})$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_+^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1 + y_{c+}^2}} e^{a_c * (y_+ - y_{c+}) - \frac{1}{2} b_c * (y_+ - y_{c+})^2}$$

où on a introduit les paramètres a_c et b_c qui peuvent être très différents des coefficients obtenus dans le *développement limité* de $1/\sqrt{1 + y_+^2}$, pris au deuxième ordre autour de y_{c+} (voir paragraphe 3.6.3).

Afin d'obtenir un paquet d'ondes final centré en \vec{p}_c , il faut que le paquet d'ondes produit :

$$\exp \left[a_c * (y_+ - y_{c+}) - \frac{1}{2} b_c (y_+ - y_{c+})^2 \right] * e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2}$$

n'ait pas de terme linéaire en $(y_+ - y_{c+})$, ce qui impose :

$$a_c = \frac{y_{c+} - y_{0+}}{\sigma_y^2}$$

Pour l'autre paramètre b_c , la modélisation la plus simple est celle pour laquelle $b_c = 1$, ie celle correspondant au développement limité de $1/\sqrt{1+y_+^2}$ à l'ordre deux en y_+ . Pour les valeurs usuelles de \vec{p}_c et de σ_y , on observe que cette modélisation conduit au meilleur accord entre le paquet d'ondes réel et le paquet d'ondes modélisé pour les lames π . Par contre, dans le cas des lames $\pi/2$, le coefficient donnant le meilleur fit vaut : $b_c \sim 0.32$ (en diminuant légèrement lorsque σ_y augmente) :

$$\boxed{b_c \sim 1. \longrightarrow \text{lame } \pi} \quad (F.2)$$

$$\boxed{b_c \sim 0.32 \longrightarrow \text{lame } \pi/2}$$

En fait, plus le temps d'interaction τ augmente, plus ce paramètre est grand. C'est une conséquence directe de la sélectivité en vitesse étudiée avant. La loi "d'évolution" de b_c vaut alors approximativement :

$$b_c \sim 16 / \left(1 + 3 \frac{\pi/2}{\Omega_0 \tau} \right)^2$$

Signalons aussi que cette modélisation peut être améliorée d'une façon simple pour rendre compte des lobes secondaires : en multipliant le paquet d'ondes modélisé par des polynômes d'Hermite du type :

$$* \left[1 - (y_+/y_{j+})^2 \right]$$

où les $\pm y_{j+}$ sont les racines de la fonction $\text{sinc} \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+^2} \right]$:

$$y_{j+} := \sqrt{\left(\frac{j\pi}{\Omega_0 \tau} \right)^2 - 1}$$

et en modifiant convenablement le paramètre b_c .

D'autre part, en ce qui concerne la modélisation des exponentielles complexes, nous voulons faire apparaître explicitement les deux vitesses de groupe calculées avant. Pour cela, on peut décomposer le paquet d'ondes principal wp_0 en paquets d'ondes fin (au sens du paragraphe 3.6.3) auxquels on applique l'analyse du paragraphe 3.6.3. On aimerait ainsi pouvoir également écrire $\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+^2}$ sous la forme d'un *développement quadratique* en $(\vec{p} - \vec{p}_c)$, où $\vec{p}_c := p_{c\parallel} \vec{k}/k$ est l'impulsion centrale calculée auparavant (et ainsi continuer à travailler avec des Gaussiennes complexes). Une façon simple d'obtenir ce développement est de considérer le *développement limité* en $(\vec{p} - \vec{p}_c)$ vu précédemment :

$$\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} = \sqrt{1+y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} + \frac{1}{2(1+y_c^2)^{3/2}} \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} \right)^2 + \dots$$

Rigoureusement, ce développement n'est valable que pour des impulsions proche de \vec{p}_c , ou bien il faut le voir comme un développement en série entière et considérer tous les termes au-delà du terme quadratique. Cependant le terme linéaire rend bien compte des vitesses de groupe possibles, car ces vitesses sont définies par la dérivée impulsionnelle de $\pm \Omega_0 \sqrt{1+y_+^2}$ prise en \vec{p}_c :

$$\pm \vec{v}_{gc} := \mp \hbar \left[\vec{\nabla}_{\vec{p}} \left(\Omega_0 \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right) \right]_{\vec{p}_c} = \pm \frac{y_c}{\sqrt{1+y_c^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$$

Par contre, il semble logique que le coefficient $1/2(1+y_{c+}^2)^{3/2}$, qui est devant le terme quadratique et qui modifie la largeur *complexe* en impulsion d'un paquet d'ondes fin, ne soit plus pertinent dans le

cas de paquets d'ondes larges en impulsion. On peut donc modéliser $\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ simplement par le développement :

$$\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2} \sim \sqrt{1 + y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} + coef * \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} \right)^2$$

où l'on a introduit le paramètre "coef" pour précisément mieux rendre compte de l'effet de :

$$\exp \left[\pm i\Omega_0\tau \sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2} \right]$$

sur les largeurs complexes.

Ce que nous voulons, c'est obtenir le meilleur accord possible entre $\sin \left[\Omega_0\tau \sqrt{1 + y_+^2} \right]$ et

$$\sin \left[\Omega_0\tau \left\{ \sqrt{1 + y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} + coef * \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_c)}{2m\Omega_0} \right)^2 \right\} \right]$$

sur la plus grande plage d'impulsions possible autour de \vec{p}_c . En particulier, il est important d'avoir un bon accord pour le lobe central du sinus cardinal, ie entre les lobes centraux de ces deux fonctions sinus. En imposant alors l'égalité de leurs premiers minima, on obtient un très bon fit (voir figure F.2).

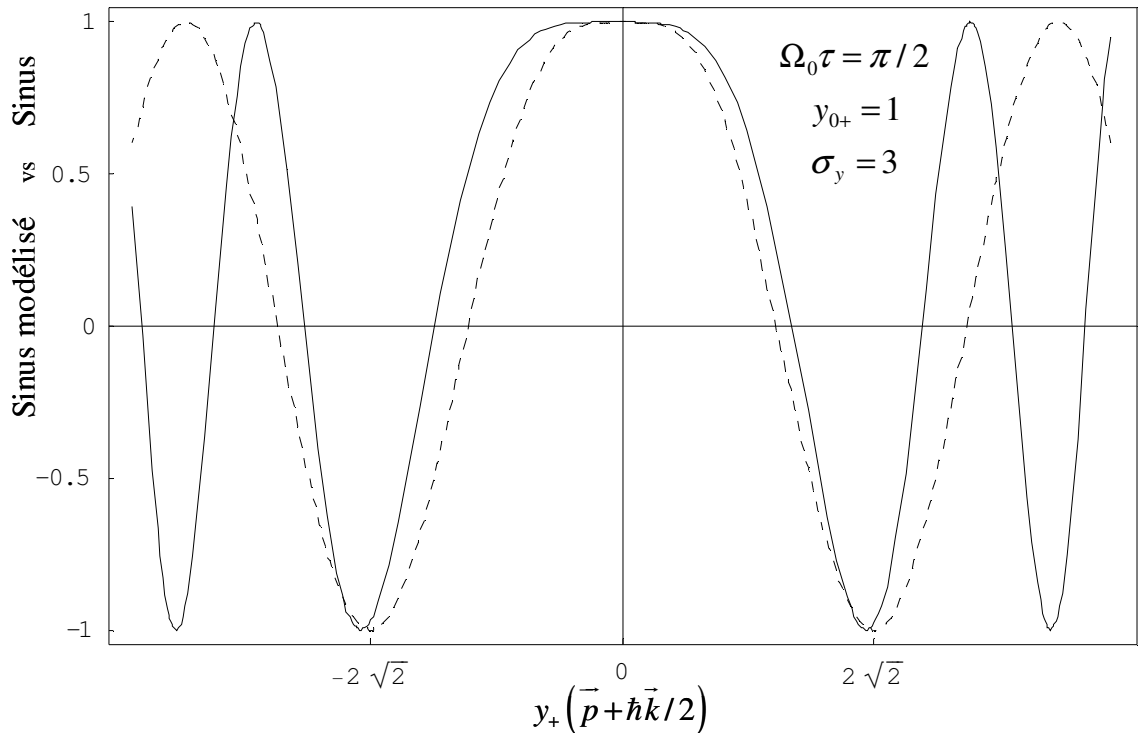


FIG. F.2: Comparaison des courbes représentant la fonctions sinus du texte et sa modélisation.

Cette condition s'écrit :

$$coef_{+1} = \frac{3 \frac{\Omega_0\tau}{\pi/2} - \sqrt{1 + y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} (y_{\min} - y_{c+})}{(y_{\min} - y_c)^2}$$

avec :

$$y_{\min} = \sqrt{\left(3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2}\right)^2 - 1}$$

pour le premier minimum à droite du lobe central, et :

$$coef_{-1} = \frac{3 \frac{\Omega_0 \tau}{\pi/2} - \sqrt{1 + y_c^2} - \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} (-y_{\min} - y_c)}{(-y_{\min} - y_c)^2}$$

pour celui à gauche. Finalement, le meilleur fit s'obtient pour la condition médiane (voir figure F.3) :

$$\boxed{coef = \frac{coef_{+1} + coef_{-1}}{2}} \quad (F.3)$$

Par conséquent, la modélisation considérée s'écrit :

$$e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2}} \sim e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*) \left[\mp coef * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 \right] (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*)} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*) \cdot \left[\pm \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]}$$

où les vitesses de groupe apparaissent explicitement (on a réintroduit la notation vectorielle pour plus de généralité).

Finalement, on obtient une modélisation relativement simple (Gaussienne réelle pour la sélectivité en vitesse et développement des exponentielles complexes (associées aux états adiabatiques) pour les vitesses de groupe) pour rendre compte des deux paquets d'ondes adiabatiques $wp_{0\pm}$ issus du paquet d'ondes principal wp_0 :

$$wp_{0\pm}(\pm \vec{r}_c, \vec{p}_c) = \left\{ \frac{e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_c^2}}}{\sqrt{1 + y_c^2}} e^{-\frac{i}{\hbar} a_c * (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*) \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{2m} / \Omega_0} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*) \cdot \left[\pm \frac{y_c}{\sqrt{1 + y_c^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*) \left[(\mp coef * \tau - i b_c / \Omega_0) \vec{\delta} / \Omega_0 \right] (\vec{p}^* - \vec{p}_c^*)} u(\vec{p}_0, t_0)$$

Et on peut vérifier le bon accord entre la distribution exacte et celle modélisée (voir figure F.3).

Remarque 1 : lorsque $y_{0+} = 0$, on a égalité entre \vec{p}_c et \vec{p}_0 et $y_c = 0$. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule vitesse de groupe, et on peut alors être tenté de ne considérer qu'un seul paquet d'ondes. Il ne faut cependant pas perdre de vue que, même s'il n'y a qu'une vitesse de groupe, il y a deux largeurs complexes différentes lorsque $y_c = 0$. Il y a donc bien encore deux paquets d'ondes distincts à modéliser dans ce cas.

Remarque 2 : pour un paquet d'ondes incident non-minimal, ie pour lequel on a :

$$u(y_+, t_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2 + i \frac{1}{2} \mu * (y_+ - y_{0+})^2 \right]$$

avec μ réel, il faut également ajouter un facteur multiplicatif à la modélisation de $e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2}}$:

$$* e^{-i \mu * (y_c - y_{0+})}$$

afin que le paquet d'ondes modélisé ait bien la bonne impulsion centrale \vec{p}_c . C'est la même démarche que celle suivie plus haut pour la partie linéaire du terme réel $\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2 \right]$.

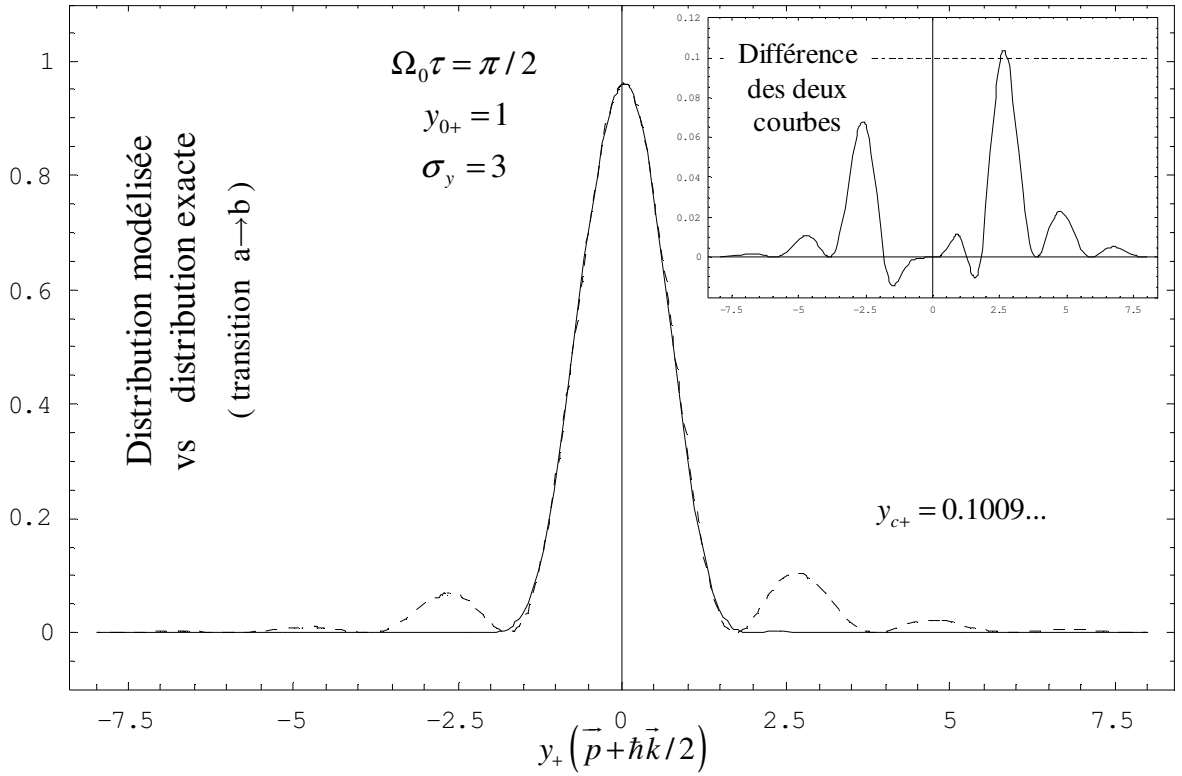


FIG. F.3: Distribution en impulsion, en sortie d'une séparatrice laser (lame π), des paquets d'ondes atomiques correspondant à la transition $a \longrightarrow b$ (ie avec changement d'état interne). En trait discontinu est tracée la solution exacte, et en trait continu est représentée la distribution modélisée.

F.3 Cas des transitions sans changement d'état interne ($a \mapsto a$)

Dans ce cas, le terme à modéliser s'écrit :

$$\left(\cos \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2} \right] + i \frac{y_+}{\sqrt{1 + y_+^2}} \sin \left[\Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+^2} \right] \right) * u(y_+, t_0)$$

avec comme précédemment :

$$y_+(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - kp_{\parallel}/m - \delta}{2\Omega_0} = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{\parallel})}{2m\Omega_0}$$

$$u(y_+, t_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_{0+} - y_+}{\sigma_y} \right)^2 \right]$$

Le cas $b \mapsto b$ se traite de la même façon, en faisant le changement :

$$y_+ \longrightarrow -y_-$$

Vitesses de groupe principales

Comme pour le cas $a \mapsto b$, nous étudions - afin de déterminer les impulsions centrales des paquets d'ondes principaux wp_1 et 2 - les distributions finales en impulsion

$$\left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1 + y_+^2}} \right) * u(y_+, t_0) / 2 \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1 + y_+^2}} \right) * u(y_+, t_0) / 2$$

corespondant à chaque état adiabatique :

$$\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right) u(y_+, t_0) e^{\pm i\Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+^2}}$$

Ces deux distributions (qui ont une forme de *marche* - ascendante ou descendante - et qui sont tracées sur la figure F.4) montrent l'existence de deux paquets d'ondes impulsionnels ayant une forme à peu près Gaussienne. L'un a une plus grande amplitude que l'autre, et cette propriété change selon que y_{0+} est positif ou négatif (lorsque y_{0+} est positif, la Gaussienne incidente recouvre plus la marche ascendante $1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}$ que celle descendante $1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}$).

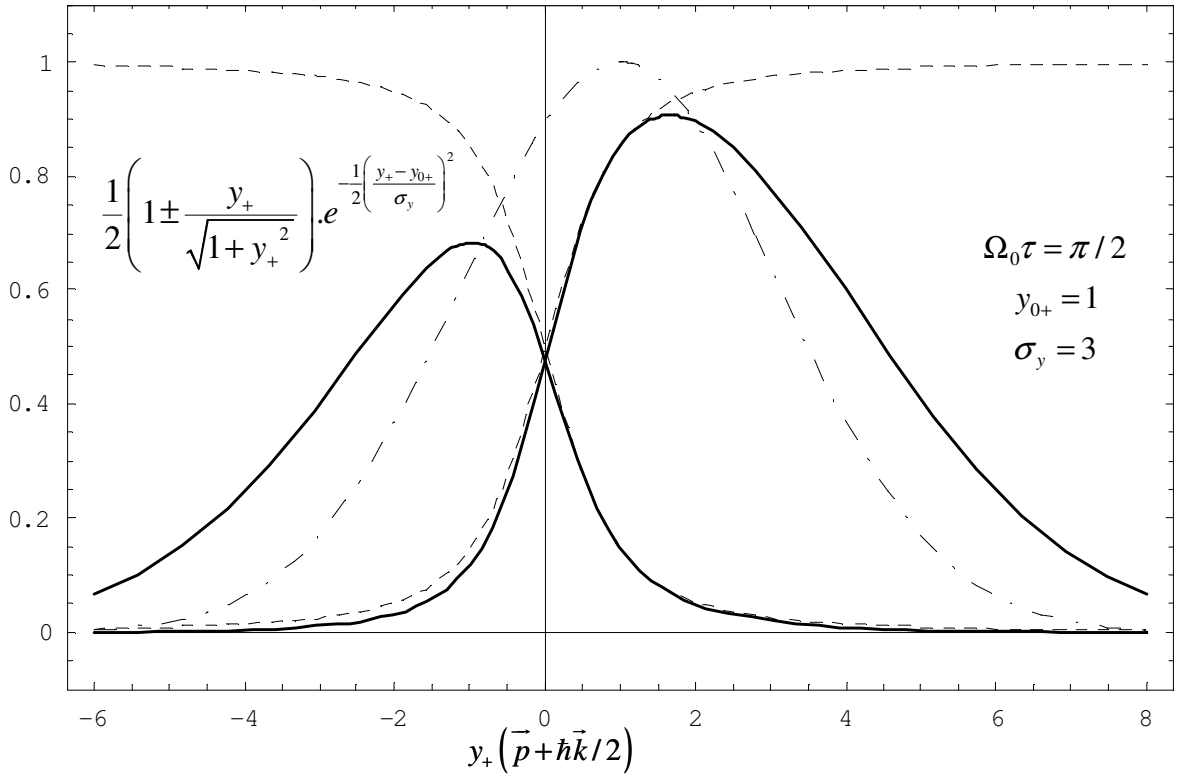


FIG. F.4: Distributions en impulsion des paquets d'ondes correspondant aux deux états adiabatiques (en trait plein). Celles correspondant au paquet d'ondes initial et aux deux filtres sont également représentées (en trait discontinu).

Comme précédemment, on peut alors approximer les impulsions centrales ($p_{c||+}$ et $p_{c||-}$) de ces paquets d'ondes par celles donnant le maximum des deux distributions.

Le maximum $p_{m||+}$ de la distribution $\left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right) u(y_+, t_0)$ obéit par exemple à l'équation :

$$\sigma_y^2 = (y_+ - y_{0+}) (1 + y_+^2) \left(\sqrt{1 + y_+^2} + y_+ \right)$$

et celui $p_{m||-}$ de la distribution $\left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right) u(y_+, t_0)$ obéit à :

$$\sigma_y^2 = -(y_+ - y_{0+}) (1 + y_+^2) \left(\sqrt{1 + y_+^2} - y_+ \right)$$

On ne connaît pas de solution analytique à ces équations, et il faut les résoudre numériquement. Cependant, une étude rapide montre que :

$$p_{m||+} \simeq p_{m||-} \simeq p_{0||} \quad \text{lorsque} \quad \sigma_y \ll 1$$

et :

$$p_{m||+} \simeq p_{s||} - \frac{2m\Omega_0}{k} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad p_{m||-} \simeq -p_{m||+} \quad \text{lorsque} \quad \sigma_y \gg 1$$

(on rappelle que σ_y est une quantité sans dimension).

Pour σ_y quelconque, on obtient numériquement $p_{m||+}$ et $p_{m||-}$ approchant $p_{c||+}$ et $p_{c||-}$:

$$\boxed{p_{c||+} \sim p_{m||+} \quad \text{et} \quad p_{c||-} \sim p_{m||-}} \quad (\text{F.4})$$

Ces deux impulsions centrales permettent alors de connaître les deux vitesses de groupe principales. Elles sont données par :

$$\boxed{\vec{v}_{gc+} = + \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(p_{c||+})}{\sqrt{1+y(p_{c||+})^2}}}$$

pour le paquet d'ondes issu de la distribution $\left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}\right) u(y_+, t_0) / 2$, et :

$$\boxed{\vec{v}_{gc-} = - \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(p_{c||-})}{\sqrt{1+y(p_{c||-})^2}}}$$

pour le paquet d'ondes issu de la distribution $\left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}\right) u(y_+, t_0) / 2$.

Modélisation

Comme précédemment, nous cherchons à modéliser chacune des deux distributions *adiabatiques* :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}\right) * u(y_+, t_0) / 2 \\ & \left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}\right) * u(y_+, t_0) / 2 \end{aligned}$$

d'une façon simple et pratique, ie à l'aide de Gaussiennes préférentiellement. Ce choix peut paraître étrange du fait que les "marches" $1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}$ et $1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}$ n'ont pas du tout la forme Gaussienne. Néanmoins, nous ne voulons pas modéliser à proprement parler ces deux "marches" mais plutôt leur produit avec la Gaussienne incidente $u(y_+, t_0)$.

Comme pour le cas $a \mapsto b$, nous allons donc approximer ces deux fonctions par des Gaussiennes dont l'exposant est un développement au plus quadratique en $(y_+ - y_{c\pm})$. Nous obtenons ainsi :

$$1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \sim \left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}}\right)_{\text{mod}} = \left(1 + \frac{y_{c+}}{\sqrt{1+y_{c+}^2}}\right) e^{a_{c+}*(y_+-y_{c+}) - b_{c+}*\frac{1}{2}(y_+-y_{c+})^2}$$

et :

$$1 - \frac{y_+}{\sqrt{1 + y_+^2}} \sim \left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1 + y_+^2}}\right)_{\text{mod}} = \left(1 - \frac{y_{c-}}{\sqrt{1 + y_{c-}^2}}\right) e^{a_{c-} * (y_+ - y_{c-}) - b_{c-} * \frac{1}{2} (y_+ - y_{c-})^2}$$

en introduisant des paramètres a_{c+} , b_{c+} , a_{c-} et b_{c-} pour rendre compte de l'écart au *développements limités* de $1 \pm y_+ / \sqrt{1 + y_+^2}$, pris au deuxième ordre autour de $y_{c\pm,+}$.

Comme dans le cas des transitions $a \mapsto b$, on impose alors aux coefficients a_{c+} et a_{c-} d'assurer que les impulsions centrales des paquets d'ondes finaux soient respectivement : $p_{c||+}$ et $p_{c||-}$. Cela revient à éliminer le terme linéaire $-(y_+ - y_{c\pm,+})(y_{c\pm,+} - y_{0+}) / \sigma_y^2$ de l'exponentielle $\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2 \right]$ à l'aide de ces coefficients. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} a_{c+} &= (y_{c+,+} - y_{0+}) / \sigma_y^2 \\ a_{c-} &= (y_{c-,+} - y_{0+}) / \sigma_y^2 \end{aligned}$$

Pour les coefficients b_{c+} et b_{c-} , on ne peut suivre la démarche utilisée dans le cas précédent (transitions $a \mapsto b$) où la largeur des paquets d'ondes solution était essentiellement contrôlée par le préfacteur $1/\sqrt{1 + y_+^2}$ (sélectivité en vitesse). Les largeurs ici dépendent principalement de celle du paquet d'ondes incident $u(y_+, t_0)$, et les deux paramètres b_{c+} et b_{c-} vont dépendre fortement de σ_y et y_{0+} . Plus précisément, on s'attend à ce qu'ils augmentent avec σ_y pour y_{0+} fixé, et à ce que b_{c+} augmente (resp. b_{c-} diminue) avec y_{0+} pour σ_y fixée. L'expression de ces paramètres en fonction de σ_y et y_{0+} est accessible numériquement, mais on peut néanmoins en rechercher une version analytique simplifiée.

Une modélisation très simple consiste alors à négliger la dépendance en y_{0+} , et à évaluer la fonction de σ_y donnant le meilleur fit autour de la valeur $y_+ = 0$ pour une lame $\pi/2$ (cette valeur est très importante lorsqu'une autre séparatrice succède à une lame $\pi/2$) et pour y_+ quelconque dans le cas d'une lame π (dans ce cas en effet, ce n'est pas la zone autour de $y_+ = 0$ qui importe, car les paquets d'ondes solutions sont sensés être négligeables autour de $y_+ = 0$).

On trouve finalement les deux lois suivantes :

$$\begin{aligned} \boxed{b_{c+} = b_{c-} \sim \frac{1.4}{1 + \sigma_y} \quad : \text{ lame } \pi} \\ \boxed{b_{c+} = b_{c-} \sim \frac{2}{0.8 + \sigma_y} \quad : \text{ lame } \pi/2} \end{aligned} \tag{F.5}$$

qui conduisent à un assez bon accord entre les paquets d'ondes réels et ceux modélisés pour les valeurs usuelles de σ_y et y_{0+} .

En ce qui concerne la modélisation des exponentielles complexes, nous voulons comme précédemment faire apparaître explicitement les vitesses de groupe. On choisit donc le même genre de modélisation, ie sous forme de *développements quadratiques* en $(\vec{p} - \vec{p}_{c\pm})$, où $\vec{p}_{c\pm}$ sont les impulsions centrales calculées auparavant.

On développe donc - comme dans le paragraphe précédent - le terme $\sqrt{1 + y_+ (\vec{p})^2}$ à l'ordre deux en $y - y_{c\pm}$, et on introduit deux paramètres : $coef_+$ et $coef_-$ afin de mieux rendre compte de l'effet

de $\exp \left[\pm i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right]$ sur les largeurs complexes des paquets d'ondes solutions :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} &\sim \left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_+} \\ &= \sqrt{1+y_{c+}^2} - \frac{y_{c+}}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_{c+})}{2m\Omega_0} + \text{coef}_+ * \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_{c+})}{2m\Omega_0} \right)^2 \\ \sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} &\sim \left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_-} \\ &= \sqrt{1+y_{c-}^2} - \frac{y_{c-}}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_{c-})}{2m\Omega_0} + \text{coef}_- * \left(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_{c-})}{2m\Omega_0} \right)^2\end{aligned}$$

Puis, on cherche la valeur de ces paramètres pour obtenir le meilleur fit possible entre les distributions d'impulsion réelle et modélisée.

En comparant ces deux distributions, ie celle réelle :

$$1 - \frac{1}{1+y_+(\vec{p})^2} \sin^2 \left[\Omega_0\tau\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right]$$

avec celle modélisée :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right)_{\text{mod}} + \left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right)_{\text{mod}} \right]^2 \\ &- \left(1 + \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right)_{\text{mod}} \left(1 - \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right)_{\text{mod}} \sin^2 \left[\Omega_0\tau \frac{\left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_+} + \left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_-}}{2} \right]\end{aligned}$$

on observe que leur valeur en $y = 0$ (abscisse centrale) est importante. Elle l'est d'autant plus à la lumière de la modélisation des interféromètres atomiques, car dans ce cas l'attention est portée uniquement sur la partie des deux paquets d'ondes solution qui repose sur cette gamme d'abscisse (intervalle autour de $y = 0$). En effet, par exemple, lorsqu'une séparatrice π succède à une séparatrice $\pi/2$, c'est la partie (des paquets d'ondes impulsionnels solutions pour la lame $\pi/2$) qui est centrée en $y_0 = 0$ qui sera séparée efficacement par la lame π suivante.

On peut alors choisir d'imposer à $\left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_+}$ et à $\left(\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2} \right)_{\text{mod}_-}$ de respecter la valeur de $\sqrt{1+y_+(\vec{p})^2}$ en $y = 0$, ie 1. On est ainsi conduit à :

$$\begin{aligned}\boxed{\text{coef}_+ = \left(1 - \sqrt{1+y_{c+}^2} + \frac{y_{c+}^2}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \right) / y_{c+}^2} \\ \boxed{\text{coef}_- = \left(1 - \sqrt{1+y_{c-}^2} + \frac{y_{c-}^2}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \right) / y_{c-}^2}\end{aligned} \tag{F.6}$$

On obtient donc comme modélisations :

$$\begin{aligned}e^{+i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_+^2}} &\sim e^{+i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_{c+}^2}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_c)} \left[-\text{coef}_+ * \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0} \tau \right] (\vec{p}-\vec{p}_c) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_c)} \cdot \left[+\frac{y_{c+}}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right] \\ e^{-i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_+^2}} &\sim e^{-i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_{c-}^2}} e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_c)} \left[+\text{coef}_- * \frac{\vec{\delta}}{\Omega_0} \tau \right] (\vec{p}-\vec{p}_c) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}_c)} \cdot \left[-\frac{y_{c-}}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]\end{aligned}$$

pour chacun des paquets d'ondes adiabatiques.

Finalement, comme dans le cas des transitions $a \mapsto b$, on obtient une modélisation relativement simple à l'aide de Gaussiennes complexes pour rendre compte des deux paquets d'ondes adiabatiques $wp_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
 wp_1(\vec{r}_{c+}, \vec{p}_{c+}) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_{c+}}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \right) e^{+i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_{c+}^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c+}) \cdot \vec{a}_{c+} * \frac{\hbar \vec{k}}{2m} / \Omega_0} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c+}) \cdot \left[\frac{y_{c+}}{\sqrt{1+y_{c+}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]} \\
 &\quad \cdot e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c+}) \left[-\text{coef}_+ * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 - ib_{c+} * \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right] (\vec{p}^* - \vec{p}_{c+})} u(\vec{p}_0, t_0) \\
 wp_2(\vec{r}_{c-}, \vec{p}_{c-}) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y_{c-}}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \right) e^{-i\Omega_0\tau\sqrt{1+y_{c-}^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c-}) \cdot \vec{a}_{c-} * \frac{\hbar \vec{k}}{2m} / \Omega_0} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c-}) \cdot \left[-\frac{y_{c-}}{\sqrt{1+y_{c-}^2}} \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \tau \right]} \\
 &\quad \cdot e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p}^* - \vec{p}_{c-}) \left[+\text{coef}_- * \vec{\delta} \tau / \Omega_0 - ib_{c-} * \vec{\delta} / \Omega_0^2 \right] (\vec{p}^* - \vec{p}_{c-})} u(\vec{p}_0, t_0)
 \end{aligned}$$

dont on peut évaluer la pertinence en comparant les deux distributions : celle exacte et celle issue de la modélisation (voir figure F.5).

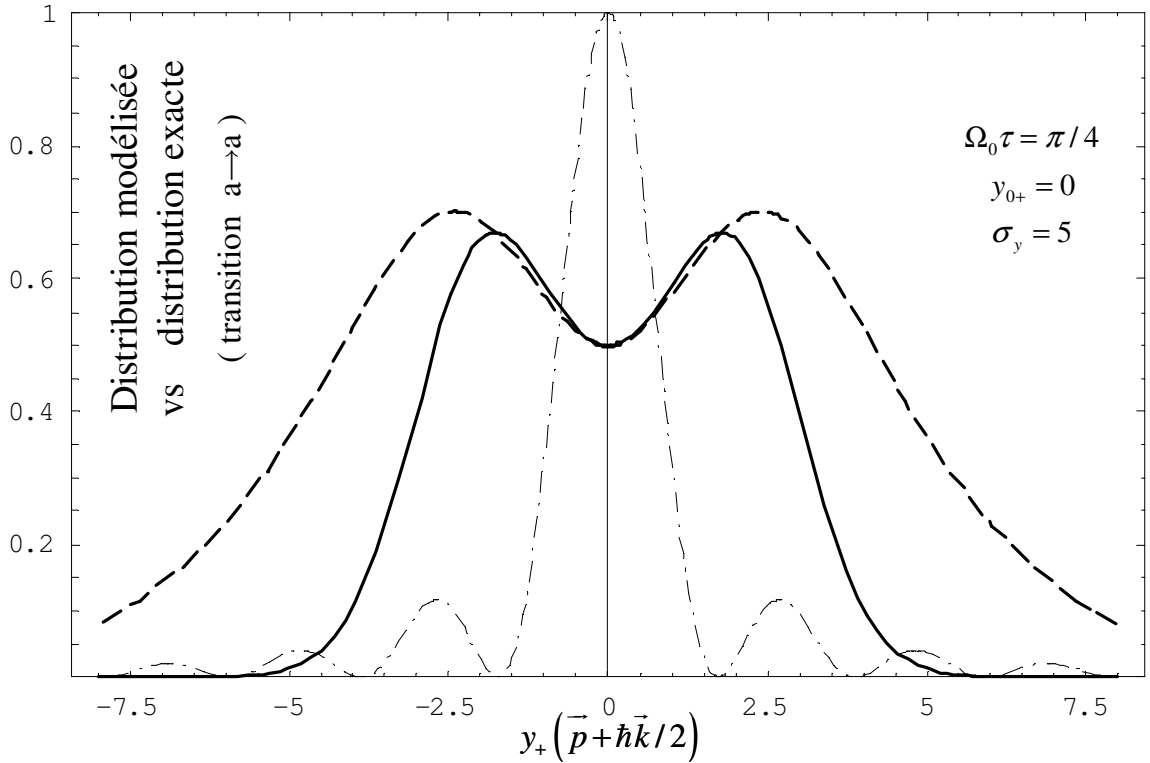


FIG. F.5: Distribution en impulsion, en sortie d'une séparatrice laser (lame $\pi/2$), des paquets d'ondes atomiques correspondant à la transition $a \rightarrow a$ (ie sans changement d'état interne). En trait discontinu est tracée la solution exacte, et en trait continu est représentée la distribution modélisée. L'accord entre les deux courbes est très bon pour les abscisses comprises entre les deux premiers minima du sinus cardinal (courbe $-\cdot-\cdot-$).

Remarque : pour un paquet d'ondes incident non-minimal, ie pour lequel on a :

$$u(y_+, t_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2 + i \frac{1}{2} \mu * (y_+ - y_{0+})^2 \right]$$

avec μ réel, il faut également ajouter un facteur multiplicatif aux deux modélisations de $e^{\pm i \Omega_0 \tau \sqrt{1+y_+^2}}$:

$$*e^{-i\mu*(y_{c\pm}-y_{0+})}$$

afin que les paquets d'ondes modélisés aient bien les bonnes impulsions centrales \vec{p}_{c+} et \vec{p}_{c-} . C'est la même démarche que celle suivie plus haut pour la partie linéaire du terme réel $\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_+ - y_{0+}}{\sigma_y} \right)^2 \right]$.

F.4 Résumé des modélisations considérées

Les modélisations précédentes peuvent être schématisées en trois étapes :

- (a) ré-expression du paquet d'ondes incident $a(\vec{p}, t_0; r_0, p_0, X_0, Y_0)$ sous forme diagonale
- (b) recherche des impulsions centrales des paquets d'ondes solution
- (c) modélisation de leur structure en impulsion (réelle et imaginaire)

Ré-expression du paquet d'ondes incident sous forme diagonale

Soit un paquet d'ondes incident Gaussien (générateur de la base des fonctions d'Hermite-Gauss) :

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, t_0) &= a(\vec{p}, t_0; r_0, p_0, X_0, Y_0) \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) X_0 Y_0^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0 \right] \end{aligned}$$

Comme on l'a dit au début de ce paragraphe, on cherche d'abord à mettre en évidence sa structure en impulsion suivant la direction du vecteur d'onde \vec{k} . On réécrit donc $a(\vec{p}, t_0)$ en séparant la phase de l'amplitude et les parties parallèles à \vec{k} (notées avec le signe \parallel) des parties orthogonales à \vec{k} (notées avec le signe \perp), puis on *diagonalise* l'exposant dans le terme d'amplitude :

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, t_0) &= e^{-\frac{i}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) \text{Re}(X_0 Y_0^{-1}) (\vec{p} - \vec{p}_0) - \frac{i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0} e^{\frac{1}{2m\hbar} (\vec{p} - \vec{p}_0) \text{Im}(X_0 Y_0^{-1}) (\vec{p} - \vec{p}_0)} \\ &= e^{\frac{1}{2m\hbar} \left[(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel} (p_{\parallel} - p_{0\parallel})^2 + (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) (\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\perp\perp} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) + 2(p_{\parallel} - p_{0\parallel}) (\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\perp} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) \right]} \\ &= e^{\frac{1}{2m\hbar} \left[(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel} (p_{\parallel} - \widetilde{p_{0\parallel}})^2 + (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) \left[(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\perp\perp} - \frac{(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\perp\parallel} (\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\perp}}{(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel}} \right] (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) \right]} \end{aligned}$$

où :

$$\widetilde{p_{0\parallel}} := p_{0\parallel} - \frac{(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\perp}}{(\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel}} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp})$$

est l'impulsion centrale suivant la direction de \vec{k} .

Recherche des impulsions centrales des paquets d'ondes solutions

Dans la solution de Rabi, on peut mettre en évidence les états adiabatiques (cela revient simplement à écrire les sinus et cosinus sous forme d'exponentielles complexes), et étudier les expressions obtenues. Elles s'écrivent sous la forme :

$$\text{préfacteur} \times \exp\left(\pm i\Omega_0\tau \sqrt{1+y_{\pm}^2}\right)$$

Le produit de la distribution en impulsion $u(p_{\parallel}, t_0)$ du paquet d'ondes incident avec les distributions données par les préfacteurs de la solution de Rabi conduit alors à des distributions ayant un ou deux lobes principaux, et des lobes secondaires. On cherche alors à connaître les impulsions centrales des paquets d'ondes associés à ces lobes principaux. En première approximation, ces impulsions centrales $\vec{p}_{c\pm}$ sont prises égales aux impulsions donnant les maxima des distributions finales.

Ces distributions sont égales à :

$$\frac{1}{2\sqrt{1+y_+^2}} * u(y_+, t_0)$$

dans le cas des transitions $a \mapsto b$;

$$\frac{1}{2\sqrt{1+y_-^2}} * u(y_-, t_0)$$

dans le cas des transitions $b \mapsto a$;

$$\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_+}{\sqrt{1+y_+^2}} \right) * u(y_+, t_0)$$

dans le cas des transitions $a \mapsto a$; et :

$$\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{y_-}{\sqrt{1+y_-^2}} \right) * u(y_-, t_0)$$

dans le cas des transitions $b \mapsto b$, où :

$$\begin{aligned} y_+ & : = y_+(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m - \delta}{2\Omega_0} = \frac{k(p_{s\parallel} - p_{\parallel})}{2m\Omega_0} \\ y_- & : = y_-(p_{\parallel}) = \frac{\omega - \omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{p}/m + \delta}{2\Omega_0} = \frac{k(\widetilde{p_{s\parallel}} - p_{\parallel})}{2m\Omega_0} \end{aligned}$$

Par conséquent les maxima de ces distributions obéissent aux équations suivantes :

$$\boxed{y_{\pm} + (y_{\pm} - y_{0\pm})(1+y_{\pm}^2)/\sigma_y^2 = 0} \quad \Longrightarrow \quad p_{c\parallel} \quad (\text{F.7})$$

dans le cas des transitions $a \mapsto b$ et $b \mapsto a$ (une seule impulsion centrale), et :

$$\boxed{\sigma_y^2 = (y_{\pm} - y_{0\pm})(1+y_{\pm}^2)\left(\sqrt{1+y_{\pm}^2} + y_{\pm}\right)} \quad \Longrightarrow \quad p_{c\parallel+} \quad \text{et} \quad p_{c\parallel-} \quad (\text{F.8})$$

dans le cas des transitions $a \mapsto a$ et $b \mapsto b$ (deux impulsions centrales), avec :

$$\sigma_y := \sqrt{\frac{-\delta}{2\Omega_0^2 (\text{Im}(X_0 Y_0^{-1}))_{\parallel\parallel}}} \quad \text{et} \quad y_{0\pm} := y_{\pm}(\widetilde{p_{0\parallel}})$$

qu'on peut résoudre numériquement ou en les approchant.

A partir de ces impulsions centrales, on obtient alors les vitesses de groupe des paquets d'ondes solution :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(p_{c\parallel})}{\sqrt{1 + y(p_{c\parallel})^2}} && \text{pour ceux créés par les transitions } a \mapsto b \text{ (ou } b \mapsto a) \\ \vec{v}_{gc\pm} &= \pm \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \frac{y(p_{c\parallel\pm})}{\sqrt{1 + y(p_{c\parallel\pm})^2}} && \text{pour ceux créés par les transitions } a \mapsto a \text{ (ou } b \mapsto b) \end{aligned}$$

Modélisation de leur structure en impulsion (réelle et imaginaire)

Par souci de simplicité (utilisation du formalisme $ABCD$), nous modélisons la structure en impulsion des paquets d'ondes solution sous forme Gaussienne (ou Hermite-Gaussienne). Plus précisément, nous approximons les préfacteurs précédents et les énergies adiabatiques par des développements quadratiques en $(p_{\parallel} - p_{c\parallel i})$, et nous conjecturons de façon simple les coefficients de ces développements (afin d'obtenir la meilleure approximation possible, tout en préservant la valeur des impulsions centrales précédentes).

On obtient finalement une modélisation des éléments $S_{uv}(p_{\parallel} \pm \frac{\hbar k}{2})$ (avec $u, v = a, b$) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} M_+ & e^{i\Theta_+} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c+}) \cdot \vec{v}_{gc+}} \tau e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c+}) \cdot \vec{\delta} / \Omega_0^2 [-coef_+ * \Omega_0 \tau - ib_{c+}]} (\vec{p} - \vec{p}_{c+}) \\ & \cdot e^{\frac{i}{m\hbar}(p_{c\parallel+} - p_{0\parallel})} \left[(X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\parallel} (p_{\parallel} - p_{c\parallel+}) + (X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\perp} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) \right] \\ + M_- & e^{i\Theta_-} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c-}) \cdot \vec{v}_{gc-}} \tau e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c-}) \cdot \vec{\delta} / \Omega_0^2 [+coef_- * \Omega_0 \tau - ib_{c-}]} (\vec{p} - \vec{p}_{c-}) \\ & \cdot e^{\frac{i}{m\hbar}(p_{c\parallel-} - p_{0\parallel})} \left[(X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\parallel} (p_{\parallel} - p_{c\parallel-}) + (X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\perp} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp}) \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\boxed{M_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y_+(\vec{p}_{c\pm})^2}}} \quad (F.9)$$

$$\boxed{\Theta_{\pm} = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(\vec{p}_{c\pm})^2}}$$

dans le cas des transitions $a \mapsto b$, et :

$$\boxed{M_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_+(\vec{p}_{c\pm})}{\sqrt{1 + y_+(\vec{p}_{c\pm})^2}} \right)} \quad (F.10)$$

$$\boxed{\Theta_{\pm} = \pm \Omega_0 \tau \sqrt{1 + y_+(\vec{p}_{c\pm})^2}}$$

dans le cas des transitions $a \mapsto a$ (pour la transition $b \mapsto a$, il faut changer y_+ en y_- ; et pour celle $b \mapsto b$, il faut changer y_+ en $-y_-$).

Autrement dit, les éléments S_{uv} s'écrivent sous la forme d'une somme de deux fonctions complexes, qui, une fois appliquées sur le paquet d'ondes incident, donnent les deux paquets d'ondes solutions principaux $w_{p1,2}(\vec{r}_{c\pm}, \vec{p}_{c\pm})$.

Chaque terme de ces sommes est ainsi le produit de cinq termes :

- un facteur d'*amplitude* : M_{\pm}
- un terme de *phase* : $\exp(i\Theta_{\pm})$
- un facteur donnant la *vitesse de groupe* : $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c\pm}) \cdot \vec{v}_{gc\pm} \tau\right)$
- un terme de *structuration complexe* de la distribution en impulsion :

$$\exp\left(-\frac{i}{2m\hbar}(\vec{p} - \vec{p}_{c\pm}) \cdot \vec{\delta} / \Omega_0^2 [\mp \text{coef}_{\pm} * \Omega_0 \tau - ib_{c\pm}] (\vec{p} - \vec{p}_{c\pm})\right)$$

- un terme correctif pour préserver la valeur des *impulsions centrales* (lors du produit du paquet d'ondes incident par les S_{uv} modélisées) :

$$\exp\left(\frac{i}{m\hbar}(p_{c\parallel+} - p_{0\parallel}) \left[(X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\parallel} (p_{\parallel} - p_{c\parallel+}) + (X_0 Y_0^{-1})_{\parallel\perp} (\vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{0\perp})\right]\right)$$

Annexe G

Quelques résultats concernant les matrices $X_{\nu D}$ et $Y_{\nu D}$

Cet appendice montre comment exprimer les paramètres complexes $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$ en fonction des paramètres initiaux X_1 et Y_1 , ainsi que des paramètres $E_{\nu i}$ caractéristiques des séparatrices. Il s'inscrit dans le cadre de la partie 4.3.3, et fait suite plus précisément au paragraphe 4.3.3.

Ré-expression des matrices $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$

Les matrices complexes $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$ intervenant dans de nombreuses expressions (déphasage local, amplitude, contraste...), il est important de pouvoir les exprimer en fonction des paramètres initiaux X_1 et Y_1 , ainsi que des modifications $E_{\nu i}$ dues aux N séparatrices.

Contrairement à la partie 4.3.2, on ne peut pas lier simplement ces matrices $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$ à la matrice de largeur complexe initiale $Y_1X_1^{-1}$ (voir les relations 4.39 et 4.38). En effet, selon les modélisations *ttt champs forts*, on n'obtient pas la matrice $Y_{\nu, i+1}X_{\nu, i+1}^{-1}$ simplement à partir de $Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1}$ et des matrices $ABCD$ correspondantes, car il faut également tenir compte de la matrice complexe supplémentaire $E_{\nu i}$, qui rend compte de la modification des largeurs complexes par la séparatrice n° i :

$$Y_{\nu, i+1}X_{\nu, i+1}^{-1} = \left[C_{i+1, i} + D_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1})^+ \right] \cdot \left[A_{i+1, i} + B_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1})^+ \right]^{-1}$$

ie :

$$Y_{\nu, i+1} X_{\nu, i+1}^{-1} = \left[C_{i+1, i} + D_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i}) \right] \cdot \left[A_{i+1, i} + B_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i}) \right]^{-1}$$

La présence d'une matrice inverse complique beaucoup le calcul des matrices $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$, et il faut en fait les construire par récurrence.

En remarquant alors que :

$$\begin{aligned} Y_{\nu, i+1}X_{\nu, i+1}^{-1} &= (Y_{\nu, i+1}X_{\nu i}^{-1}) \cdot (X_{\nu, i+1}X_{\nu i}^{-1})^{-1} \\ X_{\nu, i+1}X_1^{-1} &= (X_{\nu, i+1}X_{\nu i}^{-1}) \cdot (X_{\nu i}X_{\nu, i-1}^{-1}) \dots (X_{\nu 2}X_1^{-1}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} X_{\nu, i+1}X_{\nu i}^{-1} &= A_{i+1, i} + B_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i}) \\ Y_{\nu, i+1}X_{\nu i}^{-1} &= C_{i+1, i} + D_{i+1, i} \cdot (Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1} + E_{\nu i}) \end{aligned}$$

cette **construction itérative** peut se faire de la façon suivante :

1. on calcule $X_{\nu,i+1}X_{\nu i}^{-1}$ et $Y_{\nu,i+1}X_{\nu i}^{-1}$ à partir de $Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1}$,
2. qui nous donne $Y_{\nu,i+1}X_{\nu,i+1}^{-1}$;
3. on répète le processus N fois à partir de $Y_1X_1^{-1}$,
4. on obtient finalement $Y_{\nu D}X_{\nu D}^{-1}$ et $X_{\nu D}X_1^{-1}$.

Les premiers termes peuvent se calculer aisément (en fonction des matrices $E_{\nu i}$ ou $F_{\nu i}$) :

$$\begin{aligned} X_{\nu 2}X_1^{-1} &= A_{21} + B_{21} \cdot (Y_1X_1^{-1} + E_{\nu 1}) \\ Y_{\nu 2}X_1^{-1} &= C_{21} + D_{21} \cdot (Y_1X_1^{-1} + E_{\nu 1}) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} &= [C_{21} + D_{21} \cdot (Y_1X_1^{-1} + E_{\nu 1})] \cdot [A_{21} + B_{21} \cdot (Y_1X_1^{-1} + E_{\nu 1})]^{-1} \\ &= [C_{21} \cdot (X_1Y_1^{-1} + F_{\nu 1}) + D_{21}] \cdot [A_{21} \cdot (X_1Y_1^{-1} + F_{\nu 1}) + B_{21}]^{-1} \end{aligned}$$

qui permet d'exprimer les termes :

$$\begin{aligned} X_{\nu 3}X_{\nu 2}^{-1} &= A_{32} + B_{32} \cdot (Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} + E_{\nu 2}) \\ Y_{\nu 3}X_{\nu 2}^{-1} &= C_{32} + D_{32} \cdot (Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} + E_{\nu 2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{\nu 3}X_{\nu 3}^{-1} &= [C_{32} + D_{32} \cdot (Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} + E_{\nu 2})] \cdot [A_{32} + B_{32} \cdot (Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} + E_{\nu 2})]^{-1} \\ &= [C_{32} \cdot (X_{\nu 2}Y_{\nu 2}^{-1} + F_{\nu 2}) + D_{32}] \cdot [A_{32} \cdot (X_{\nu 2}Y_{\nu 2}^{-1} + F_{\nu 2}) + B_{32}]^{-1} \\ X_{\nu 3}X_1^{-1} &= [A_{32} + B_{32} \cdot (Y_{\nu 2}X_{\nu 2}^{-1} + E_{\nu 2})] \cdot [A_{21} + B_{21} \cdot (Y_1X_1^{-1} + E_{\nu 1})] \end{aligned}$$

en fonction de $Y_1X_1^{-1}$, $E_{\nu 1}$ et $E_{\nu 2}$ (on peut également utiliser les relations de groupe des matrices $ABCD$ pour simplifier certains termes dans ces expressions, et faire apparaître des matrices du type A_{31} et B_{31}).

De plus, nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de calculer ces matrices pour chaque chemin atomique (ie pour $\nu = \alpha, \beta, \gamma \dots$). En effet, la présence d'un invariant (symplectique) particulier va nous permettre d'exprimer les matrices $Y_{\nu i}X_{\nu i}^{-1}$ (avec $\nu \neq \alpha$) en fonction des matrices $Y_{\alpha i}X_{\alpha i}^{-1}$. C'est l'objet des lignes qui suivent.

Ré-expression des matrices $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}$ et $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1})^*$

Ces deux matrices complexes interviennent dans le signal de franges (voir partie 4.3.3). Nous allons montrer ici qu'il n'est pas nécessaire de calculer $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1}$ et $Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}$ pour les obtenir. La démonstration de ce résultat étant identique pour les deux matrices $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}$ et $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1})^*$, nous la détaillerons uniquement pour la matrice $Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}$.

En effet, cette différence peut être exprimée à l'aide de la quantité suivante :

$$\widetilde{X_{\alpha D}} \cdot Y_{\beta D} - \widetilde{Y_{\alpha D}} \cdot X_{\beta D}$$

sous la forme :

$$\begin{aligned} Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1} &= Y_{\beta D}X_{\beta D}^{-1} - \widetilde{Y_{\alpha D}X_{\alpha D}^{-1}} \\ &= \widetilde{X_{\alpha D}^{-1}} \cdot (\widetilde{X_{\alpha D}} \cdot Y_{\beta D} - \widetilde{Y_{\alpha D}} \cdot X_{\beta D}) \cdot X_{\beta D}^{-1} \end{aligned}$$

Or on a vu que $\widetilde{X_{\alpha D}} \cdot Y_{\beta D} - \widetilde{Y_{\alpha D}} \cdot X_{\beta D}$ faisait partie des **invariants (symplectiques) caractéristiques d'une paire de chemins homologues** (cf. la fin du paragraphe 4.2.2), et qu'il vérifiait par conséquent l'égalité :

$$\boxed{\widetilde{X_{\alpha D}} \cdot Y_{\beta D} - \widetilde{Y_{\alpha D}} \cdot X_{\beta D} = \widetilde{X_{\alpha N}^+} \cdot Y_{\beta N}^+ - \widetilde{Y_{\alpha N}^+} \cdot X_{\beta N}^+}$$

entre l'instant initial t_N^+ et l'instant final t_D^{-1} .

En exprimant alors les quantités indicées + (ie juste après l'instant t_N) à l'aide des quantités prises juste avant l'instant t_N , on en déduit la relation suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1} &= \left[A_{DN} + B_{DN} \cdot \widetilde{(Y_{\alpha N} X_{\alpha N}^{-1} + E_{\alpha N})} \right]^{-1} \\ &\cdot \left(Y_{\beta N} X_{\beta N}^{-1} - Y_{\alpha N} X_{\alpha N}^{-1} + E_{\beta N} - E_{\alpha N} \right) \cdot \left[A_{DN} + B_{DN} \cdot (Y_{\beta N} X_{\beta N}^{-1} + E_{\beta N}) \right]^{-1} \end{aligned}}$$

qui montre que $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$ s'exprime uniquement en fonction des matrices $Y_{\alpha N} X_{\alpha N}^{-1}$, $Y_{\beta N} X_{\beta N}^{-1}$ et $Y_{\beta N} X_{\beta N}^{-1} - Y_{\alpha N} X_{\alpha N}^{-1}$.

On peut alors recommencer l'opération pour $Y_{\beta N} X_{\beta N}^{-1} - Y_{\alpha N} X_{\alpha N}^{-1}$, et passer de l'étape N à l'étape $N-1$. En itérant ce processus jusqu'à l'étape 1, pour laquelle on a :

$$Y_{\beta 1} X_{\beta 1}^{-1} - Y_{\alpha 1} X_{\alpha 1}^{-1} = Y_1 X_1^{-1} - Y_1 X_1^{-1} = 0$$

on obtient ainsi que $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$ ne dépend que des quantités $Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1}$ et $Y_{\beta i} X_{\beta i}^{-1}$, pour i allant de 1 à N .

En fait, comme $Y_{\beta i} X_{\beta i}^{-1} - Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1}$ s'exprime uniquement en fonction des matrices $Y_{\alpha, i-1} X_{\alpha, i-1}^{-1}$, $Y_{\beta, i-1} X_{\beta, i-1}^{-1}$ et $Y_{\beta, i-1} X_{\beta, i-1}^{-1} - Y_{\alpha, i-1} X_{\alpha, i-1}^{-1}$, on peut finalement exprimer $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1}$ en fonction uniquement :

- des matrices $ABCD$,
- des matrices de modification instantanée $E_{\alpha i}$ et $E_{\beta i}$,
- des matrices caractéristiques d'un seul des deux chemins - les $Y_{\alpha i} X_{\alpha i}^{-1}$ pour le chemin α par exemple.

Au passage, nous avons montré qu'il n'est pas nécessaire de calculer les **matrices** $Y_{\nu i} X_{\nu i}^{-1}$ pour tous les chemins atomiques, et qu'il **suffit de les connaître pour un seul chemin** (qu'il y ait deux chemins ou plus).

¹ L'invariant symplectique pour la matrice $Y_{\beta D} X_{\beta D}^{-1} - (Y_{\alpha D} X_{\alpha D}^{-1})^*$ s'écrit sous la forme $\widetilde{X_{\alpha D}}^* \cdot Y_{\beta D} - \widetilde{Y_{\alpha D}}^* \cdot X_{\beta D}$ comme il est dit à la fin du paragraphe 4.2.2. Les calculs suivants sont alors les mêmes : il suffit juste de remplacer $X_{\alpha i}$ et $Y_{\alpha i}$ par $X_{\alpha i}^*$ et $Y_{\alpha i}^*$.

Annexe H

Valeur numérique des différents termes du déphasage

Dans cet appendice, nous évaluons numériquement les différents termes du développement de Taylor (en αT et γT^2) du déphasage :

$$\Delta\phi(2T) = \Delta\phi_{r1} + \Delta\phi_{OB} + \Delta\phi_g$$

détaillé dans la partie 5.2 (voir les relations 5.2, 5.3 et 5.4).

Ces termes sont calculés (à titre illustratif) pour différentes **configurations réelles** d'interférométrie atomique. Nous examinons ainsi successivement le cas du gyromètre à Césium du SYRTE [69] (pour deux orientations différentes), celui du groupe de Kasevich à Yale [68], puis le gravimètre à Césium du groupe de Chu à Stanford [66] et enfin celui à Rubidium qui est en construction au SYRTE (les caractéristiques utiles de ces interféromètres sont rappelées succinctement ci-dessous).

Chaque tableau donne l'expression analytique de la partie du déphasage qui est évaluée, sa valeur numérique et sa valeur relative par rapport au terme dominant.

On suppose que les interféromètres sont immobiles à la surface terrestre (à la latitude λ). L'axe z du repère cartésien utilisé est un rayon terrestre perçant la surface terrestre au centre de la première séparatrice de l'interféromètre. L'axe y appartient à la surface formée par ce rayon et l'axe de rotation de la Terre. L'axe x du trièdre orthonormé est orienté ouest-est. L'origine du référentiel est en outre prise au centre de la Terre (voir l'appendice E), d'où les relations :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_y = \Omega \cos(\lambda) \\ \Omega_z = \Omega \sin(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_x = -\frac{g}{R} & & \\ & \gamma_y = -\frac{g}{R} & \\ & & \gamma_z = 2\frac{g}{R} \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z = -g \end{pmatrix}$$

(g_z est donc négatif).

Toutes ces données dépendent de l'emplacement où a lieu l'expérience, et en particulier de sa latitude (corrections dues à la forme du géoïde terrestre et à l'accélération centrifuge). Afin de tenir compte de ces corrections, nous utilisons les expressions et valeurs de la référence [243].

Les autres données utiles sont le vecteur d'onde effectif \vec{k} des transitions Raman, la masse m des atomes utilisés, le temps de vol T entre les séparatrices et la vitesse centrale \vec{v}_{at} du nuage atomique initial. \vec{k} et \vec{v}_{at} ont a priori trois composantes :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

La norme du vecteur \vec{k} peut en outre être évaluée facilement pour les deux transitions Raman stimulées que l'on considère ici (ainsi que le rapport \hbar/m) :

$$\text{Césium :} \quad \begin{cases} \|\vec{k}\| = 2k_{Cs} = 1,47 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \\ \hbar/m_{Cs} = 4,94 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{Rubidium :} \quad \begin{cases} \|\vec{k}\| = 2k_{Rb} = 1,61 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \\ \hbar/m_{Rb} = 7,72 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Gyromètre à Césium froid du SYRTE [69]

Données inertielles et gravitationnelles (à Paris) :

$$\begin{aligned} \lambda &= 48,8^\circ \\ R &= 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \\ g &= 9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \Omega &= 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Données cinétiques et temps de vol :

Configuration n° 1 : \vec{k} est orienté selon la direction ouest-est, les atomes sont lancés quasi-verticalement (à $2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) selon la direction sud-nord (angles de 8° avec la verticale et 6° selon la direction de $-\vec{k}$) :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x = 2k_{Cs} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} v_x = -2,4 * \sin(8^\circ) * \sin(6^\circ) = -3,49 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_y = 2,4 * \sin(8^\circ) * \cos(6^\circ) = 3,32 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_z = 2,4 * \cos(8^\circ) = 2,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{pmatrix}$$

Le temps de vol T est égal à :

$$T = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

Les différents termes du déphasage sont alors listés et évalués dans le tableau 1.

Termes du déphasage	Valeur en rad	Valeur relative
$-2 k_x T^2 \Omega_y v_z$	-3,03	1
$2 k_x T^2 \Omega_z v_y$	$4,84 \cdot 10^{-1}$	$-1,6 \cdot 10^{-1}$
$-2 k_x T^3 \Omega_y g_z$	$3,76 \cdot 10^{-1}$	$-1,2 \cdot 10^{-1}$
$-2 k_x T^3 \Omega^2 \Omega_y R$	$-1,29 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$
$k_x T^3 \gamma_x v_x$	$2,15 \cdot 10^{-5}$	$-7,1 \cdot 10^{-6}$
$k_x T^3 \gamma_x \frac{\hbar k_x}{2m}$	$-2,24 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-7}$
$-3 k_x T^3 \Omega^2 v_x$	$2,22 \cdot 10^{-7}$	$-7,3 \cdot 10^{-8}$
$-3 k_x T^3 \Omega^2 \frac{\hbar k_x}{2m}$	$-2,31 \cdot 10^{-8}$	$7,6 \cdot 10^{-9}$
$-\frac{7}{3} k_x T^4 \Omega_y \gamma_z v_z$	$-9,82 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-9}$
$\frac{7}{3} k_x T^4 \Omega_z \gamma_y v_y$	$-7,84 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$
$-\frac{1}{2} k_x T^5 \Omega_y \gamma_z g_z$	$2,61 \cdot 10^{-10}$	$-8,6 \cdot 10^{-11}$
$-\frac{1}{2} k_x T^5 \gamma_x \Omega_y g_z$	$-1,30 \cdot 10^{-10}$	$4,3 \cdot 10^{-11}$
$\frac{7}{3} k_x T^4 \Omega^2 \Omega_y v_z$	$1,69 \cdot 10^{-11}$	$-5,6 \cdot 10^{-12}$

Tableau 1 : valeur numérique des différents termes du déphasage observé en sortie du gyromètre à Césium froid du SYRTE (configuration n°1).

Configuration n° 2 : \vec{k} est orienté selon la direction sud-nord, les atomes sont lancés quasi-verticalement (à $2,4 \text{ m.s}^{-1}$) selon la direction ouest-est (angles de 8° avec la verticale et 6° selon la direction de $-\vec{k}$) :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_y = 2k_{Cs} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} v_x = 2,4 * \sin(8^\circ) * \cos(6^\circ) = 3,32 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1} \\ v_y = -2,4 * \sin(8^\circ) * \sin(6^\circ) = -3,49 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1} \\ v_z = 2,4 * \cos(8^\circ) = 2,38 \text{ m.s}^{-1} \end{pmatrix}$$

Le temps de vol T est identique :

$$T = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

Les différents termes du déphasage sont alors listés et évalués dans le tableau 2.

Termes du déphasage	Valeur en rad	Valeur relative
$-k_y T^2 \Omega_y \Omega_z R$	$-2,23 \cdot 10^2$	1
$-2 k_y T^2 \Omega_z v_x$	$-4,84 \cdot 10^{-1}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
$k_y T^3 \gamma_y v_y$	$2,15 \cdot 10^{-5}$	$-9,6 \cdot 10^{-8}$
$3 k_y T^3 \Omega_y \Omega_z v_z$	$7,48 \cdot 10^{-6}$	$-3,4 \cdot 10^{-8}$
$k_y T^3 \gamma_y \frac{\hbar k_y}{2m}$	$-2,24 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$
$\frac{7}{4} k_y T^4 \Omega_y \Omega_z g_z$	$-5,41 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$
$-\frac{7}{12} k_y T^4 \gamma_y \Omega_y \Omega_z R$	$1,80 \cdot 10^{-7}$	$-8,1 \cdot 10^{-10}$
$-3 k_y T^3 \Omega_z^2 v_y$	$1,26 \cdot 10^{-7}$	$-5,6 \cdot 10^{-10}$
$-3 k_y T^3 \Omega_z^2 \frac{\hbar k_y}{2m}$	$-1,31 \cdot 10^{-8}$	$5,9 \cdot 10^{-11}$
$\frac{7}{4} k_y T^4 \Omega^2 \Omega_y \Omega_z R$	$1,86 \cdot 10^{-9}$	$-8,4 \cdot 10^{-12}$
$-\frac{7}{3} k_y T^4 \Omega_z \gamma_x v_x$	$7,84 \cdot 10^{-10}$	$-3,5 \cdot 10^{-12}$

Tableau 2 : valeur numérique des différents termes du déphasage observé en sortie du gyromètre à Césium froid du SYRTE (configuration n°2).

Gyromètre à Césium du groupe de Kasevich à Yale [68]

Données inertielles et gravitationnelles :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 41,3^\circ \\
 R &= 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \\
 g &= 9,82 \text{ m.s}^{-2} \\
 \Omega &= 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Données cinétiques et temps de vol :

\vec{k} est orienté selon la direction ouest-est (configuration identique à la configuration n°1 précédente), les atomes sont lancés horizontalement (à 290 m.s^{-1}) selon la direction sud-nord :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x = 2k_{Cs} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_y = 290 \text{ m.s}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le temps de vol T est égal à :

$$T = 1/290 = 3,45 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Les différents termes du déphasage sont alors listés et évalués dans le tableau 3.

Termes du déphasage	Valeur en rad	Valeur relative
$2 k_x T^2 \Omega_z v_y$	4.50	1
$-2 k_x T^3 \Omega_y g_z$	$6,90 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
$-2 k_x T^3 \Omega^2 \Omega_y R$	$-2,37 \cdot 10^{-6}$	$-5,3 \cdot 10^{-7}$
$k_x T^3 \gamma_x \frac{\hbar k_x}{2m}$	$-3,40 \cdot 10^{-9}$	$-7,6 \cdot 10^{-10}$
$\frac{7}{3} k_x T^4 \Omega_z \gamma_y v_y$	$-9,66 \cdot 10^{-11}$	$-2,1 \cdot 10^{-11}$
$-3 k_x T^3 \Omega^2 \frac{\hbar k_x}{2m}$	$-3,51 \cdot 10^{-11}$	$-7,8 \cdot 10^{-12}$
$\frac{7}{3} k_x T^4 \Omega^2 \Omega_z v_y$	$-3,32 \cdot 10^{-13}$	$-7,4 \cdot 10^{-14}$

Tableau 3 : valeur numérique des différents termes du déphasage observé en sortie du gyromètre à Césium du groupe de Kasevich à Yale.

Gravimètre à Césium froid du groupe de Chu à Stanford [66]

Données inertielles et gravitationnelles :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 37,4^\circ \\
 R &= 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \\
 g &= 9,83 \text{ m.s}^{-2} \\
 \Omega &= 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Données cinétiques et temps de vol :

\vec{k} et \vec{v}_{at} sont orientés verticalement (axe z). Les atomes sont lancés de bas en haut (à $1,57 \text{ m.s}^{-1}$) :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z = 2k_{Cs} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_y = +1,57 \text{ m.s}^{-1} \end{pmatrix}$$

Le temps de vol T est égal à :

$$T = 1,60 \cdot 10^{-1} \text{ s}$$

Les différents termes du déphasage sont alors listés et évalués dans le tableau 4.

Termes du déphasage	Valeur en rad	Valeur relative
$k_z T^2 g_z$	$-3,72 \cdot 10^6$	1
$k_z T^2 \Omega_y^2 R$	$7,23 \cdot 10^3$	$-1,9 \cdot 10^{-3}$
$k_z T^3 \gamma_z v_z$	$2,94 \cdot 10^{-1}$	$-7,9 \cdot 10^{-8}$
$\frac{7}{12} k_z T^4 \gamma_z g_z$	$-1,71 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$
$-3 k_z T^3 \Omega_y^2 v_z$	$-8,57 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$
$k_z T^3 \gamma_z \frac{\hbar k_z}{2m}$	$6,81 \cdot 10^{-4}$	$-1,8 \cdot 10^{-10}$
$-\frac{7}{4} k_z T^4 \Omega_y^2 g_z$	$5,00 \cdot 10^{-4}$	$-1,3 \cdot 10^{-10}$
$\frac{7}{12} k_z T^4 \gamma_z \Omega_y^2 R$	$3,33 \cdot 10^{-4}$	$-9,0 \cdot 10^{-11}$
$-3 k_z T^3 \Omega_y^2 \frac{\hbar k_z}{2m}$	$-1,99 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-13}$
$-\frac{7}{4} k_z T^4 \Omega^2 \Omega_y^2 R$	$-1,72 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-13}$

Tableau 4 : valeur numérique des différents termes du déphasage observé en sortie du gravimètre à Césium froid du groupe de Chu à Stanford.

Gravimètre à Rubidium froid en construction au SYRTE

Données inertielles et gravitationnelles (à Paris) :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 48,8^\circ \\
 R &= 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \\
 g &= 9,82 \text{ m.s}^{-2} \\
 \Omega &= 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Données cinétiques et temps de vol :

\vec{k} et \vec{v}_{at} sont orientés verticalement (axe z). Les atomes ne sont pas lancés mais lâchés au-dessus de l'interféromètre (ils atteignent la première séparatrice au bout de 20 ms, ie avec une vitesse égale à $1,57 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$) :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z = 2k_{Rb} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{at} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_y = -1,57 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1} \end{pmatrix}$$

Le temps de vol T est égal à :

$$T = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

Les différents termes du déphasage sont alors listés et évalués dans le tableau 5.

Termes du déphasage	Valeur en rad	Valeur relative
$k_z T^2 g_z$	$-3,96 \cdot 10^5$	1
$k_z T^2 \Omega_y^2 R$	$5,91 \cdot 10^2$	$-1,5 \cdot 10^{-3}$
$\frac{7}{12} k_z T^4 \gamma_z g_z$	$-1,78 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-9}$
$k_z T^3 \gamma_z v_z$	$-1,22 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$
$k_z T^3 \gamma_z \frac{\hbar k_z}{2m}$	$3,87 \cdot 10^{-5}$	$-9,8 \cdot 10^{-11}$
$-\frac{7}{4} k_z T^4 \Omega_y^2 g_z$	$3,99 \cdot 10^{-6}$	$-1,0 \cdot 10^{-11}$
$-3 k_z T^3 \Omega_y^2 v_z$	$2,73 \cdot 10^{-6}$	$-6,9 \cdot 10^{-12}$
$\frac{7}{12} k_z T^4 \gamma_z \Omega_y^2 R$	$2,66 \cdot 10^{-6}$	$-6,7 \cdot 10^{-12}$
$-3 k_z T^3 \Omega_y^2 \frac{\hbar k_z}{2m}$	$-8,66 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-13}$
$-\frac{7}{4} k_z T^4 \Omega^2 \Omega_y^2 R$	$-1,37 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-14}$

Tableau 5 : valeur numérique des différents termes du déphasage observable en sortie du gravimètre à Rubidium froid en construction au SYRTE.

Bibliographie

- [1] L. De Broglie, *Nature* 112 (1923) 540
- [2] C. Davisson & L. H. Germer, *Phys. Rev.* 30 (1927) 705
- [3] I. Estermann & O. Stern, *Z. Phys.* 61 (1930) 95
- [4] H. V. Halban & P. Preiswerk, *C. R. Acad. Sci. Paris* 203 (1936) 73
- [5] L. Marton, *Phys. Rev.* 85 (1952) 1057
- [6] G. Möllenstedt & H. Duker, *Naturwissenschaften* 42 (1955) 41
- [7] F. Hasselbach & M. Nicklaus, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 143
- [8] R. Neutze & F. Hasselbach, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 557
- [9] A. Tonomura, *Electron Holography*, Springer, New York, 1993
- [10] H. Maire-Liebnitz & J. Springer, *Z. Phys.* 167 (1962) 386
- [11] H. Rauch, W. Treimer & U. Bonse, *Phys. Rev. A* 47 (1974) 369
- [12] R. Collela, A. W. Overhasuer & S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* 34 (1975) 1472
- [13] H. Rauch & al., *Phys. Lett. A* 54 (1975) 425
- [14] H. Kaiser & al., *Physica B*, 151 (1988) 68
- [15] H. Rauch & S. A. Werner, *Neutron Interferometry*, Clarendon Press, Oxford, 2000
- [16] N. F. Ramsey, *Phys. Rev.* 78 (1950) 695
- [17] Ch.J. Bordé & al., *Phys. Rev. A* 30 (1984) 1836
- [18] Ch.J. Bordé, *Phys. Lett. A* 140 (1989) 10
- [19] J. C. Berquist & al., dans : *Laser Spectroscopy IV*, Springer Verlag, Berlin, 1979
- [20] E. Hundhausen & H. Pauly, *Z. Phys.* 187 (1965) 303
- [21] Y. L. Sokolov, *Sov. Phys. -JETP* 36 (1973) 243
- [22] O. Carnal & J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 2689
- [23] D. W. Keith & al., *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 2693
- [24] F. Riehle & al., *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 177
- [25] M. Kasevich & S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 181
- [26] J. Robert & al., *Europhys. Lett.* 16 (1991) 29
- [27] E. M. Rasel & al., *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 2633
- [28] D. M. Giltner & al., *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 2638
- [29] P. Schiftgiser & al., *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 4
- [30] Ch.J. Bordé & al., *Phys. Lett. A* 188 (1994) 187
- [31] M. S. Chapman & al., *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 4783
- [32] Ch. Lisdat & al., *Eur. Phys. J. D* 12 (2000) 235
- [33] B. Brezger & al., *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 100404
- [34] R. Delhuille & al., *Bulletin de la SFP* 135 (2002) 14
- [35] Ch.J. Bordé, *Metrologia* 39 (2002) 435-63

- [36] R. M. Godun & al., *Contemp. Phys.* 42 (2001) 77
- [37] V. I. Balykin & J. Wonho, *J. Kor. Phys. Soc.* 37 (2000) 654
- [38] J. Baudon & al., *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* 32 (1999) R173
- [39] *Atom interferometry*, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [40] M. Kasevich & al., *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 612
- [41] A. Clairon & al., *Europhys. Lett.* 16 (1991) 165
- [42] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 2003-04
- [43] J. Dalibard & C. Salomon, *Séminaire Poincaré* 1 (2003) 39
- [44] R. P. Feynman & A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965
- [45] M. Kasevich & S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 1741
- [46] M. Kasevich & S. Chu, *Appl. Phys. B* 54 (1992) 321
- [47] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 1992-93
- [48] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 1993-94
- [49] P. Wolf & Ph. Tourrenc, *Phys. Lett. A* 251 (1999) 241
- [50] K. Bongs & al., preprint : quant-ph/0204102 (2002)
- [51] Ch.J. Bordé, Propagation of laser beams and of atomic systems, dans : J. Dalibard (Ed.), *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Elsevier, 1991
- [52] J. Ishikawa, F. Riehle, J. Helmcke & Ch.J. Bordé, *Phys. Rev. A* 49 (1994) 4794
- [53] C. Lämmerzahl & Ch.J. Bordé, *Phys. Lett. A* 203 (1995) 59
- [54] K.-P. Marzlin & J. Audretsch, *Phys. Rev. A* 53 (1996) 1004
- [55] Ch.J. Bordé, A. Karasiewicz & Ph. Tourrenc, *Int. J. Mod. Phys. D* 3 (1994) 157
- [56] Ch.J. Bordé & al., dans : *Gyros, Clocks and Interferometers : Testing Relativistic Gravity in Space*, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [57] B. Linet & Ph. Tourrenc, *Can. J. Phys.* 54 (1976) 1129
- [58] Ch.J. Bordé, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 2 (Série IV)* (2001) 509
- [59] P. Wolf & Ch. J. Bordé, Recoil effects in microwave Ramsey spectroscopy, quant-ph/0403194 (2004)
- [60] J. Audretsch & K.-P. Marzlin, *J. Physique* 4 (1994) 2073
- [61] S. Reynaud & al., *Int. J. Mod. Phys. A* 17 (2002) 1003
- [62] M.-C. Angonin-Willaime & al., *Gen. Rel. Grav.* 36 (2004) 411
- [63] A. Peters & al., *Nature* 400 (1999) 849
- [64] M. J. Snadden & al., *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 971
- [65] J. M. McGuirk & al., *Phys. Rev. A* 65 (2002) 033608
- [66] A. Peters, K. Y. Chung & S. Chu, *Metrologia* 38 (2001) 25
- [67] M. Fattori & al., *Phys. Lett. A* 318 (2003) 184
- [68] T. L. Gustavson & al., *Class. Quantum Grav.* 17 (2000) 2385
- [69] F. Yver-Leduc & al., *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* 5 (2003) S136
- [70] C. R. Ekstrom & al., *Phys. Rev. A* 51 (1995) 3883
- [71] J. Schmiedmayer & al., *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 1043
- [72] E. Audouard & al., *Europhys. Lett.* 32 (1995) 397
- [73] J. Vigué, *Phys. Rev. A* 52 (1995) 3973
- [74] C. W. Oates & al., *Opt. Lett.* 25 (2000) 1603
- [75] S. Bize & al., *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 150802

- [76] Hyper Assessment Study Report, ESA-SCI 10 (2000)
- [77] Ch.J. Bordé & al., *Int. J. Mod. Phys. D* 3 (1994) 157
- [78] Ch.J. Bordé & al., dans : *Gyros, Clocks and Interferometers : Testing Relativistic Gravity in Space*, C. Lämmerzahl & al. (Eds), Springer-Verlag, New York, 2001
- [79] Ch.J. Bordé, *Gen. Rel. Grav.* 36 (2004) 475
- [80] Ch. Antoine & Ch.J. Bordé, *Phys. Lett. A* 306 (2003) 277
- [81] Ch. Antoine & Ch.J. Bordé, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* 5 (2003) S199
- [82] site internet : [http ://www.iqo.uni-hannover.de/ertmer](http://www.iqo.uni-hannover.de/ertmer)
- [83] site internet : [http ://syrtel.obspm.fr](http://syrtel.obspm.fr)
- [84] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1980
- [85] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1989
- [86] L. D. Landau & E. Lifshitz, *Physique Théorique, tome 1 : Mécanique*, Mir, Moscou, 1964
- [87] J. H. Van Vleck, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 14 (1928) 178
- [88] J. A. Arnaud, *Beam and Fiber Optics*, Academic Press, London, 1976
- [89] D. Hirondelet, *Cours de Physique Quantique (cours de 3ème année, Ecole Centrale de Paris)*, 1997-98
- [90] M. Omote & S. Kamefuchi, *Phys. Lett. A* 206 (1995) 273
- [91] S. Sakoda & al. dans : J.-P. Gazeau & al. (Ed.), *proceedings of the 24th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, IOP, 2003
- [92] E. Noether, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl.* 57 (1918) 235
- [93] M. Lutzky, *Phys. Lett. A* 68 (1978) 3
- [94] P. Chattopadhyay, *Phys. Lett. A* 75 (1980) 457
- [95] P. G. L. Leach, *Soc. Ind. Appl. Math., J. Appl. Math.* 34 (1978) 496
- [96] H. R. Lewis & P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.* 23 (1982) 2371
- [97] J. Struckmeier & C. Riedel, *Phys. Rev. E* 64 (2001) 026503
- [98] V. Guillemin & S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984
- [99] Ch.J. Bordé, *An elementary Quantum Theory of Atom-Wave Beam Splitters : The ttt theorem*, Lecture notes for a mini-course, Institut für Quantenoptik, Universität Hannover, Germany
- [100] B.R. Mollow, *Phys. Rev. A* 12 (1975) 1919
- [101] C. Lämmerzahl & Ch.J. Bordé, *Gen. Rel. Grav.* 31 (1999) 635
- [102] Ch.J. Bordé, dans : *Atom interferometry*, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [103] Ch.J. Bordé & C. Lämmerzahl, *Ann. Phys. (Leipzig)* 8 (1999) 83
- [104] M. A . Horne, *Physica A* 137 (1986) 260
- [105] S. A. Werner & al., *Physica B* 151 (1988) 22
- [106] Ch.J. Bordé, dans : *Advances in Laser Spectroscopy*, H. Walther & al. (Ed.), Plenum, 1983
- [107] J. Schmiedmayer & al., dans : *Atom interferometry*, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [108] J.F. Clauser & S. Li, dans : *Atom interferometry*, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [109] B. Dubetsky & P.R. Berman, dans : *Atom interferometry*, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [110] D.W. Keith & al., *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 1580
- [111] O. Carnal & J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 2689
- [112] P. Rosenbusch & al., *Appl. Phys. B* 70 (2000) 661
- [113] S.A. Schulz & al., *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 020406

- [114] H.-J. Briegel & al., dans : Atom interferometry, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [115] E.A. Hinds & I.G. Hugues, J. Phys. D 32 (1999) R119
- [116] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg, Processus d'interaction entre photons et atomes, InterEditions/Editions du CNRS, 1988
- [117] L. Allen & J.H. Eberly, Optical Resonance and Two-Level Atoms, Wiley, New-York, 1975
- [118] F. Bloch & A. Siegert, Phys. Rev. 57 (1940) 522
- [119] A. Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism, Clarendon Press, Oxford, 1961
- [120] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & C. Fabre, J. Phys. B6 (1973) L214
- [121] C. Fabre, Thèse de troisième cycle, Paris, 1974
- [122] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 1976-77
- [123] J.M. Martinis, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 117901
- [124] M.S. Shahriar & P. Pradhan, The Proceedings of the 6th International Conference on Quantum Communication, Measurement and Computing (QCMC'02) (2003) 289
- [125] B. Young & al., dans : Atom interferometry, P. Berman (Ed.), Academic, New York, 1997
- [126] P. Pradhan, G.C. Cardoso & M.S. Shahriar, Effects of the Bloch-Siegert Oscillation on the Precision of Qubit Rotations : Direct Two-Level vs. Off-Resonant Raman Excitation, Phys. Rev. A (2004) à paraître
- [127] A. Peters, Thèse de troisième cycle, Stanford, 1998
- [128] J. Fils, Thèse de troisième cycle, Paris, 2002
- [129] S. Burger & al., Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 5198
- [130] L. Khaykovich & al., Science 296 (2002) 1290
- [131] K. E. Strecker & al., Nature 417 (2002) 150
- [132] B.M. Garraway & K.-A. Suominen, Rep. Prog. Phys. 58 (1995) 365
- [133] S. Reynaud, Thèse Paris 1981, Ann. Phys. Fr. 8 (1983) 315 et 371
- [134] Ch.J. Bordé, Revue du Cethedec-Ondes et signal, NS83-1 (1983) 1
- [135] W. P. Schleich, Quantum Optics in Phase Space, Wiley (Ed.) Berlin, 2001
- [136] S. Haroche, cours donné au Collège de France, 2002-03
- [137] S. Haroche, cours donné au Collège de France, 2003-04
- [138] C. Tanguy, thèse de troisième cycle, Paris, 1983
- [139] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 1983-84
- [140] N. Rosen & C. Zener, Phys. Rev. 40 (1932) 502
- [141] Yu.N. Demkov & M. Kunike, Vest. Leningr. Univ. Fiz. Khim. 16 (1969) 39
- [142] S.L. McCall & E.L. Hahn, Phys. Rev. 183 (1969) 457
- [143] A. Bambini & P.R. Berman, Phys. Rev. A 23 (1981) 2496
- [144] F.T. Hioe & C.E. Carroll, Phys. Rev. A 32 (1985) 1541
- [145] K.-A. Suominen & B.M. Garraway, Phys. Rev. A 45 (1992) 374
- [146] N.V. Vitanov & B.M. Garraway, Phys. Rev. A 53 (1996) 4288
- [147] L. Carmel & A. Mann, Phys. Rev. A 61 (2000) 052113
- [148] A.M. Ishkhanyan, J. Phys. A : Math. Gen. 30 (1997) 1203
- [149] A.M. Ishkhanyan, Opt. Comm. 176 (2000) 155
- [150] L.D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion 2 (1932) 46
- [151] C. Zener, Proc. R. Soc., London A 137 (1932) 696
- [152] I.I. Rabi, Phys. Rev. 51 (1937) 652
- [153] M.G. Floquet, Ann. Ecole Norm. Sup. 12 (1883) 47

- [154] S. Guérin & H.R. Jauslin, *Adv. Chem. Phys.* 125 (2003) 1
- [155] S. Autler & C. Townes, *Phys. Rev.* 100 (1955) 703
- [156] J.H. Shirley, *Phys. Rev.* 138 (1965) B 979
- [157] H. Sambe, *Phys. Rev. A* 7 (1973) 2203
- [158] W.R. Salzman, *Phys. Rev. A* 10 (1974) 461
- [159] S.R. Barone, M.A. Narcowich & F.J. Narcowich, *Phys. Rev. A* 15 (1977) 1109
- [160] S. Guérin & al, *J. Phys. A : Math. Gen.* 30 (1997) 7193
- [161] J.K. Boyd, *J. Math. Phys.* 41 (2000) 4330
- [162] S. Rahav, I. Gilary & S. Fishman, *Phys. Rev. A* 68 (2003) 013820
- [163] T.-S. Ho & S.-I. Chu, *J. Phys. B* 17 (1984) 2101
- [164] S.-I. Chu, *Adv. Atom. Mol. Phys.* 21 (1985) 197
- [165] J.S. Howland, *Math. Ann.* 207 (1974) 315
- [166] U. Peskin & N. Moiseyev, *J. Chem. Phys.* 99 (1993) 4590
- [167] G. Jolicard & N. Balakrishnan, *J. Chem. Phys.* 106 (1997) 3613
- [168] S.C. Althorpe & al, *Chem. Phys.* 217 (1997) 289
- [169] W. Magnus, *Commun. Pure Appl. Math.* 7 (1954) 649
- [170] F. Fer, *Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Bel.* 44 (1958) 818
- [171] S. Blanes, F. Casas & J. Ros, DAMTP Tech. Report No. 2000/NA07, University of Cambridge, 2000
- [172] A. Iserles, DAMTP Tech. Report No. 1999/NA04, University of Cambridge, 1999
- [173] P.C. Moan & J.A. Oeo, *J. Math. Phys.* 42 (2001) 501
- [174] R. Suarez & L. Saenz, *J. Math. Phys.* 42 (2001) 4582
- [175] S. Klarsfeld & J.A. Oteo, *Phys. Rev. A* 39 (1989) 3270
- [176] A. Iserles & S.P. Nørsett, DAMTP Tech. Report No. 1997/NA9, University of Cambridge, 1997
- [177] A. Iserles, A. Marthinsen & S.P. Nørsett, DAMTP Tech. Report No. 1998/NA2, University of Cambridge, 1998
- [178] A. Iserles, H.Z. Munthe-Kaas, S.P. Nørsett & A. Zanna, *Acta Numerica* 2000, 215
- [179] D. Prato & P.W. Lambert, *J. Chem. Phys.* 106 (1997) 4640
- [180] S. Blanes, F. Casas & J. Ros, DAMTP Tech. Report No. 1999/NA08, University of Cambridge, 1999
- [181] B. Mielnik & J. Plebanski, *Ann. Inst. Henri Poincaré* XII (1970) 215
- [182] S. Klarsfeld & J.A. Oteo, *J. Phys. A* 22 (1989) 4565
- [183] F.M. Fernandez, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 2311
- [184] W.R. Salzman, *J. Chem. Phys.* 85 (1986) 4605
- [185] E.B. Feldman, *Phys. Lett. A* 104 (1984) 479
- [186] S. Blanes, F. Casas, J.A. Oteo & J. Ros, *J. Phys. A* 22 (1998) 259
- [187] P.C. Moan, J.A. Oeo & J. Ros, *J. Phys. A* 32 (1999) 5133
- [188] M.M. Maricq, *J. Chem. Phys.* 86 (1987) 5647
- [189] X. Miao, *Phys. Lett. A* 271 (2000) 296
- [190] Ch. Lubich, *NIC Series* 10 (2002) 459
- [191] M. Hochbruck, K. Lorenz & Ch. Lubich, report WEB
- [192] M.V. Berry, *Proc. R. Soc. London A* 429 (1990) 61
- [193] A. Joye & C.-E. Pfister, *J. Math. Phys.* 34 (1993) 454
- [194] M.V. Berry & R. Lim, *J. Phys. A* 26 (1993) 4737

- [195] K. Drese & M. Holthaus, *Eur. Phys. J. D* 5 (1999) 119
- [196] N.V. Vitanov & K.-A. Suominen, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 4580
- [197] H. Munthe-Kaas, *BIT Numer. Math.* 38 (1998) 92
- [198] H. Rauch & D. Petrascheck, dans : *Neutron Diffraction*, Springer, New York, 1978
- [199] J. M. Cowley, *Diffraction Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1990
- [200] G. Borrmann, *Phys. Z.* 42 (1941) 157
- [201] J. W. Knowles, *Acta Cryst.* 9 (1956) 61
- [202] M. K. Oberthaler & al., *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 4980
- [203] A. Aspect & al., *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 826
- [204] A. Aspect & al., *J.O.S.A. B6* (1989) 2112
- [205] J. Lawall & al., *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 1915
- [206] C. Cohen-Tannoudji, cours donné au Collège de France, 1995-96
- [207] F. Bardou & al., *Laser cooling and Lévy statistics - How rare events bring atoms to rest*, Cambridge University Press, 2002
- [208] M. Drewsen & al., *Appl. Phys. B* 59 (1994) 283
- [209] S. Chang & V. Minogin, *Phys. Rep.* 365 (2002) 65
- [210] J. Dalibard & al., *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 580
- [211] K. Mølmer & al., *J. Opt. Soc. Am. B* 10 (1993) 524
- [212] Y. Castin & K. Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 3772
- [213] T. W. Hänsch & A. L. Schawlow, *Opt. Comm.* 13 (1975) 68
- [214] J. Dalibard & W. D. Phillips, *Bull. Am. Phys. Soc.* 30 (1985) 748
- [215] S. Chu & al., *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 48
- [216] E. Raab & al., *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2631
- [217] H. Metcalf, *J. Opt. Soc. Am. B* 6 (1989) 2206
- [218] C. G. Townsend & al., *Phys. Rev. A* 52 (1995) 1423
- [219] J. Dalibard & C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B* 6 (1989) 2023
- [220] B. Lounis & al., *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 3029
- [221] J.-Y. Courtois & G. Grynberg, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 1378
- [222] C. Cohen-Tannoudji & W. D. Phillips, *Phys. Today* 43(10) (1990) 33
- [223] C. Salomon & al., *Europhys. Lett.* 12 (1990) 683
- [224] B. Sheehy & al., *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 858
- [225] O. Emile & al., *J. Phys. II (France)* 3 (1993) 1709
- [226] H. Wallis, *Phys. Rep.* 255 (1995) 203
- [227] Y. Castin & al., *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules*, Moi & al. (Ed.), ETS Editrice, Pisa, 1991
- [228] Y. Castin & J. Dalibard, *Europhys. Lett.* 14 (1991) 761
- [229] T. W. Hodapp & al., *Appl. Phys. B* 60 (1995) 135
- [230] J. Jersblad & al., *Phys. Rev. A* 69 (2004) 013410
- [231] L. Sanchez-Palencia & al., *Eur. Phys. J. D* 18 (2002) 353
- [232] Y. Sortais & al., *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 3117
- [233] P. Storey & C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. II* 4 (1994) 1999
- [234] Ch.J. Bordé, communication personnelle, 2004
- [235] M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, London, 1964
- [236] A. Adam, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 4803

- [237] Ye. V. Baklanov & al., Appl. Phys. 9 (1976) 171
- [238] Ch.J. Bordé, Phys. Lett. A 204 (1995) 217
- [239] M. Olshany & al., dans : Laser Spectroscopy XII, World Scientific, 1995
- [240] R. J. C. Spreeuw & al., dans : Laser Spectroscopy XII, World Scientific, 1995
- [241] Ch.J. Bordé, dans : Laser Spectroscopy XII, World Scientific, 1995
- [242] F. R. Gantmacher, *Matrix theory*, Vol. 1, Chelsea Pub Co, 2nd edition, 1990
- [243] Allen's Astrophysical Quantities, Arthur N. Cox editor, 4th edition, Springer, 2000
- [244] J. Robert & al., J. Phys. II (France) 2 (1992) 601
- [245] Ch.J. Bordé & al., Phys. Rev. 14 (1976) 236
- [246] P. L. Gould & al., Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 827
- [247] P. J. Martin & al., Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 515